Umlageprämie und Lebenserwartung

Umlageprämie und Lebenserwartung

von Walter Letsch, Zürich

Versichert sei eine Altersrente in Höhe des Lohnes. Für die Prämie β^A des Ausgabenumlage-Verfahrens gilt bekanntlich

$$\beta^A = \frac{\sum_{x=s}^{\omega} l_x}{\sum_{x=x_0}^{s-1} l_x}, \tag{1}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die Versichertenbestände der Überlebensordnung $\{l_x\}$ entsprechen.
Mit Hilfe der mittleren Lebenserwartung

$$e_x = \frac{\sum_{u=x}^{\omega} l_u}{l_x} \tag{2}$$

kann die Umlageprämie geschrieben werden als

$$\beta^A = \frac{l_s\, e_s}{l_{x_0}\, e_{x_0} - l_s\, e_s}. \tag{3}$$

Statt e_x kann natürlich auch $\mathring{e}_x = e_x - \frac{1}{2}$ gesetzt werden, um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass die Todesfälle im Durchschnitt in der Mitte des Jahres erfolgen. Bei der Formel (3) fällt die formale Ähnlichkeit mit der Formel für die Prämie β^D des Deckungskapital-Verfahrens (Anwartschaftsdeckung) beim Übergang $l_x\, e_x \longleftrightarrow N_x$ auf [1]:

$$\beta^D = \frac{N_s}{N_{x_0} - N_s}.$$

Mit der Beziehung $l_s = l_{x_0} \prod_{x=x_0}^{s-1} p_x$ erhält man

$$\beta^A = \frac{e_s \prod_{x=x_0}^{s-1} p_x}{e_{x_0} - e_s \prod_{x=x_0}^{s-1} p_x}, \tag{4}$$

oder, wenn

$$p_x = \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}$$

gesetzt wird,

$$\beta^A = \frac{\prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}}{\frac{e_{x_0}}{e_s} - \prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}} \tag{5}$$

$$\beta^A = \frac{\prod_{x=x_0}^{s-1} (e_x - 1)}{\prod_{x=x_0}^{s-1} e_x - \prod_{x=x_0}^{s-1} (e_x - 1)}. \tag{6}$$

Zur Illustration berechnen wir die Umlageprämie nach den Grundlagen SM/SF 1968/73, wobei wir für die Männer $x_0 = 25$, $s = 65$ und für die Frauen $y_0 = 25$, $s = 62$ annehmen wollen. Wir erhalten

$\beta^A = 0{,}2804$ für Männer und
$\beta^{A'} = 0{,}4811$ für Frauen.

Die oben hergeleitete Formel (5) bzw. (6) ist natürlich vor allem dann zweckmässig, wenn nur die Lebenserwartungen, jedoch keine Absterbeordnung, publiziert sind. Dies ist z. B. bei der von M. Frischknecht konstruierten «Theoretischen Sterbetafel 2101» [2] der Fall, der eine Extrapolation der mittleren Lebenserwartungen zugrunde liegt. Die Berechnung der Umlageprämien ergibt

$\beta^A = 0.6176$ für Männer und
$\beta^{A'} = 0.9176$ für Frauen.

Diese Prämien liegen für Männer 120%, für Frauen 91% höher als jene nach den Tafeln SM/SF 1968/73, was die demographische Abhängigkeit des Ausgabenumlage-Verfahrens deutlich demonstriert.
Wir wollen uns nun noch der Frage zuwenden, um wieviel sich die Umlageprämie β^A erhöht, wenn die Lebenserwartung ansteigt. Ist vom Ansteigen der Lebenserwartung um Δ Jahre innerhalb eines bestimmten Zeitraums die Rede, so versteht man darunter nicht eine Erhöhung im Sinne eines Übergangs von e_x zu $e_x + \Delta$ für alle x. Eine solche Erhöhung würde – ähnlich wie auch ein Übergang von e_x zu $(1 + \delta) e_x$ für alle x – nicht dem tatsächlichen Geschehen entsprechen. Überdies wäre dann auch die neue Umlageprämie nicht in geschlossener und praktikabler Form darstellbar.
Unter dem Ansteigen der Lebenserwartung um Δ Jahre versteht man vielmehr die Erhöhung der mittleren Lebensdauer, d.h. der vollständigen mittleren Lebenserwartung der Neugeborenen, $\mathring{e}_0$. Eine solche Erhöhung wirkt sich in den Altern $x > 0$ als Indexverschiebung aus: Erhöht sich die Lebenserwartung um Δ Jahre, so kann einem x-Jährigen im Sinn einer vernünftigen Näherung neu die Lebenserwartung eines $(x\text{-}\Delta)$-Jährigen zugeordnet werden.
Eine ähnliche Methode der Altersverschiebung wird, vor allem in Deutschland, auch angewendet, um aus Periodentafeln Generationentafeln zu erzeugen.
Wir untersuchen also $\beta^A(e_{x-\Delta})$ ausgehend von $\beta^A(e_x)$. Für praktische Zwecke reicht es völlig, den Fall $\Delta = 1$ zu berechnen, da ja eine weitere Rekursion jederzeit möglich ist. Wir erhalten

$$\beta^A_{\Delta=1} = \frac{\prod\limits_{x=x_0-1}^{s-2} \dfrac{e_x - 1}{e_{x+1}}}{\dfrac{e_{x_0-1}}{e_{s-1}} - \prod\limits_{x=x_0-1}^{s-2} \dfrac{e_x - 1}{e_{x+1}}} \tag{7}$$

$$\beta^A_{\Delta=1} = \frac{\dfrac{e_{x_0-1} - 1}{e_{s-1}} \cdot \dfrac{e_s}{e_{x_0}} \prod\limits_{x=x_0}^{s-1} \dfrac{e_x - 1}{e_{x+1}}}{\dfrac{e_{x_0-1}}{e_{s-1}} - \dfrac{e_{x_0-1} - 1}{e_{s-1} - 1} \cdot \dfrac{e_s}{e_{x_0}} \prod\limits_{x=x_0}^{s-1} \dfrac{e_x - 1}{e_{x+1}}}. \tag{8}$$

Aus (5) erhält man

$$\frac{e_s}{e_{x_0}} \prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}} = \frac{\beta^A}{1 + \beta^A}.$$

Setzt man dies in (8) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\beta^A_{\Delta=1} = \frac{\beta^A (e_{x_0-1} - 1)\, e_{s-1}}{(e_{s-1} - 1)\, e_{x_0-1} - \beta^A (e_{x_0-1} - e_{s-1})}. \tag{9}$$

Mit den Tafeln SM/SF 1968/73 erhalten wir

$\beta^A_{\Delta=1} = 1.068\, \beta^A$ für Männer und

$\beta^{A'}_{\Delta=1} = 1.050\, \beta^{A'}$ für Frauen.

Wir erkennen, dass sich die Erhöhung der Lebenserwartung um ein Jahr bei den Männern stärker auswirkt als bei den Frauen, was verständlich ist, da die Männer die kleinere Lebenserwartung aufweisen. Anderseits ist aber die Lebenserwartung der Frauen in den vergangenen Jahren deutlich stärker angestiegen als jene der Männer [3], so dass sich innerhalb eines bestimmten Zeitraumes etwa die gleiche Erhöhung der Umlageprämien für Männer und Frauen ergibt.

Literatur

[1] *Letsch, W.*: Beiträge und Reserven von Pensionskassen bei Berücksichtigung der wirtschaftlichen Entwicklung. 21. Int. Kongress der Versicherungsmathematiker, Thema 5.

[2] *Frischknecht, M.*: Mittlere Lebenserwartung der Schweizer und Schweizerinnen nach Generationen-Sterbetafeln. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 72, Heft 2, 1972.

[3] *Eidgenössisches Statistisches Amt*: Schweizerische Sterbetafel 1968/73. Statistische Quellenwerke der Schweiz/Heft 559, 1975.

Walter Letsch
VITA Lebensversicherungs-
Aktiengesellschaft
Mythenquai 10
8022 Zürich

Zusammenfassung

Der Autor zeigt, wie die Prämie des Ausgabenumlageverfahrens mit Hilfe der Lebenserwartungen ausgedrückt werden kann. Anschliessend wird die Erhöhung dieser Prämie bei einer Zunahme der Lebenserwartung ermittelt.

Résumé

L'auteur montre comment exprimer la prime d'une rente selon le système de la répartition des dépenses au moyen des espérances de vie, puis comment exprimer l'augmentation de cette prime lorsque l'espérance de vie elle-même augmente.

Riassunto

L'autore dimostra come si puo esprimere il premio di una rendita calculata secondo il sistema di ripartizione delle spese, per mezzo di «speranze di vita». Indica in seguito come si determina l'aumento di detto premio quando aumenta la speranza di vita stessa.

Summary

The author shows how the premium of an expense contributory system can be expressed by means of expected mean lives. Then the increase of such premiums as a function of increased expected mean life is assessed.