

# Kurzmitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): - **(1981)**

Heft 2

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## D. Kurzmitteilungen

BJØRN SUNDT, Oslo/Zurich<sup>1</sup>

### Some comments to D. Zagorac: Ein Beitrag zur Intervallschätzung der Glaubwürdigkeitsparameter

(Mitteilungen 1/1981, 67–75)

1. Referring to the Fisher Lemma Zagorac states that

$$\frac{(nN-1)W}{\sigma^2 + \sigma_0^2} = \sum_i \sum_j \frac{(X_{ij} - m_0)^2}{\sigma^2 + \sigma_0^2} - nN \frac{(M - m_0)^2}{\sigma^2 + \sigma_0^2}$$

is  $\chi^2$ -distributed with  $nN - 1$  degrees of freedom. However, in the present case one has to be a bit careful, as for fixed  $j$  the  $X_{ij}$ 's are dependent when  $\sigma_0^2 \neq 0$ . By use of orthogonal transformations it can be shown that

$$Q_0 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n (X_{ij} - X_{.j})^2,$$

$$Q = n \sum_{j=1}^N (X_{.j} - M)^2,$$

and  $M$  are independent, and that  $Q_0/\sigma^2$  and  $Q/(\sigma^2 + n\sigma_0^2)$  are  $\chi^2$ -distributed with  $N(n-1)$  resp.  $N-1$  degrees of freedom.

From this we see that

$$\frac{(nN-1)W}{\sigma^2 + \sigma_0^2} = \frac{Q_0 + Q}{\sigma^2 + \sigma_0^2}$$

is  $\chi^2$ -distributed with  $nN - 1$  degrees of freedom if and only if  $\sigma_0^2 = 0$ .

2. Referring to the above, the confidence regions proposed in Zagorac's (1981) Sections 7.1, 7.2, and 7.4 seem questionable, and in the rest of this note I shall propose other confidence regions.

<sup>1</sup> The present note was submitted for publication as a «Letter to the Editor».

3. Confidence interval for  $m_0$ .

As  $X_{.1}, \dots, X_{.N}$  are independent and identically normally distributed with mean  $m_0$ ,

$$T = \frac{M - m_0}{\sqrt{Q}} \sqrt{nN(N-1)}$$

is Student distributed with  $N - 1$  degrees of freedom. From this follows that

$$J_1 = \left[ M - t_{N-1, 1-\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{Q}{nN(N-1)}}, M + t_{N-1, 1-\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{Q}{nN(N-1)}} \right],$$

with  $t_{N-1, 1-\frac{\epsilon}{2}}$  being the  $1 - \frac{\epsilon}{2}$  fractile of the Student distribution with  $N - 1$  degrees of freedom, is a  $1 - \epsilon$  confidence interval for  $m_0$ .

4. Confidence interval for  $\sigma_0^2$ .

Let  $\chi_{v, \alpha}^2$  denote the  $\alpha$  fractile in the  $\chi^2$ -distribution with  $v$  degrees of freedom. We have

$$\Pr\left(\frac{Q}{\sigma^2 + n\sigma_0^2} \geq \chi_{N-1, \epsilon}^2\right) = 1 - \epsilon,$$

that is,

$$\Pr\left(\frac{Q}{n\chi_{N-1, \epsilon}^2} \geq \frac{\sigma^2}{n} + \sigma_0^2\right) = 1 - \epsilon.$$

Then

$$\Pr\left(\frac{Q}{n\chi_{N-1, \epsilon}^2} \geq \sigma_0^2\right) > 1 - \epsilon,$$

and from this follows that

$$J_2 = \left(0, \frac{Q}{n\chi_{N-1, \epsilon}^2}\right]$$

is a  $1 - \epsilon$  confidence interval for  $\sigma_0^2$ .

5. Confidence interval for  $\sigma^2$ .

Zagorac uses that  $Q_0/\sigma^2$  is  $\chi^2$ -distributed with  $N(n-1)$  degrees of freedom and gets as a  $1 - \epsilon$  confidence interval for  $\sigma^2$

$$I_3 = \left[ \frac{N(n-1)V}{q_1}, \frac{N(n-1)V}{q_2} \right],$$

where  $q_1$  and  $q_2$  are determined such that

$$\Pr\left(q_2 \leq \frac{Q_0}{\sigma^2} \leq q_1\right) = 1 - \epsilon. \quad (1)$$

Zagorac uses  $q_1 = \chi_{N(n-1), 1-\frac{\epsilon}{2}}^2$  and  $q_2 = \chi_{N(n-1), \frac{\epsilon}{2}}^2$ .

Referring to Sverdrup (1967, Sections XIII 3.2 and XIII 4.2) I would recommend  $q_1$  and  $q_2$  determined by (1) and

$$\frac{\log q_1 - \log q_2}{q_1 - q_2} = \frac{1}{N(n-1)};$$

this will make the confidence interval unbiased.

6. Confidence interval for  $\kappa = \sigma^2/\sigma_0^2$ .

The credibility estimator of  $m_j$  is

$$\tilde{m}_j = \frac{n}{n+\kappa} X_{.j} + \frac{\kappa}{n+\kappa} m_0.$$

We see that in this formula  $\sigma^2$  and  $\sigma_0^2$  appear only through  $\kappa$ . Hence, it may be interesting to construct a confidence interval for  $\kappa$ .

For this purpose we use that  $(1+n\kappa^{-1})^{-1}F$  with

$$F = \frac{Q}{Q_0} \frac{N(n-1)}{N-1}$$

is Fisher distributed with  $N-1$  and  $N(n-1)$  degrees of freedom. Let  $f_1$  and  $f_2$  be determined such that

$$\Pr(f_1 \leq (1+n\kappa^{-1})^{-1}F \leq f_2) = 1 - \epsilon. \quad (2)$$

Then

$$\Pr\left(\frac{n}{\frac{F}{f_1}-1} \leq \kappa \leq \frac{n}{\frac{F}{f_2}-1}\right) = 1 - \epsilon,$$

and

$$J_3 = \left[ \begin{array}{cc} \frac{n}{F} & \frac{n}{F} \\ \frac{1}{f_1} - 1 & \frac{1}{f_2} - 1 \end{array} \right]$$

is a  $1 - \epsilon$  confidence interval for  $\kappa$ .

A simple choice of  $f_1$  and  $f_2$  would be the  $\frac{\epsilon}{2}$  resp.  $1 - \frac{\epsilon}{2}$  fractile of the Fisher distribution with  $N - 1$  and  $N(n - 1)$  degrees of freedom. However, to get the confidence interval unbiased, I suggest to find  $f_1$  and  $f_2$  from the equations (2) and

$$\frac{\log\left(1 + f_2 \frac{N-1}{N(n-1)}\right) - \log\left(1 + f_1 \frac{N-1}{N(n-1)}\right)}{\log f_2 - \log f_1} = \frac{N-1}{Nn-1}.$$

7. Confidence regions for  $(m_0, \kappa)$  and  $(m_0, \sigma^2, \sigma_0^2)$ .

From the Bonfferoni inequality we get

$$Pr((m_0 \in J_1) \cap (\kappa \in J_3)) \geq 1 - 2\epsilon,$$

and thus

$$A_1 = J_1 \times J_3$$

is a  $1 - 2\epsilon$  confidence region for  $(m_0, \kappa)$ .

By using the independence of  $M$ ,  $Q$ , and  $Q_0$  we may construct a confidence region for  $(m_0, \sigma^2, \sigma_0^2)$  without using inequalities like the Bonfferoni one.

Let  $g_{1-\frac{\epsilon}{2}}$  denote the  $1 - \frac{\epsilon}{2}$  fractile of the normal distribution  $N(0, 1)$ . Then, as  $M$

has the distribution  $N\left(m_0, \sqrt{\frac{1}{N}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \sigma_0^2\right)}\right)$ ,

$$Pr\left(M - g_{1-\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2 + n\sigma_0^2}{nN}} \leq m_0 \leq M + g_{1-\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2 + n\sigma_0^2}{nN}}\right) = 1 - \epsilon,$$

and for given  $\sigma^2 + n\sigma_0^2$

$$J_4(\sigma^2 + n\sigma_0^2) = \left[ M - g_{1-\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2 + n\sigma_0^2}{nN}}, M + g_{1-\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2 + n\sigma_0^2}{nN}} \right]$$

is a  $1 - \epsilon$  confidence interval for  $m_0$ .

Using that  $Q/(\sigma^2 + n\sigma_0^2)$  is  $\chi^2$ -distributed with  $N - 1$  degrees of freedom, we get, analogously to Section 5, that

$$J_5 = \left[ \frac{Q}{p_1}, \frac{Q}{p_2} \right],$$

with  $p_1$  and  $p_2$  satisfying

$$Pr \left( p_2 \leq \frac{Q}{\sigma^2 + n\sigma_0^2} \leq p_1 \right) = 1 - \epsilon$$

is a  $1 - \epsilon$  confidence interval for  $\sigma^2 + n\sigma_0^2$ .

From the independence of  $M$ ,  $Q$ , and  $Q_0$  we now get

$$\begin{aligned} & Pr((m_0 \in J_4(\sigma^2 + n\sigma_0^2)) \cap (\sigma^2 + n\sigma_0^2 \in J_5) \cap (\sigma^2 \in I_3)) = \\ & Pr(m_0 \in J_4(\sigma^2 + n\sigma_0^2)) Pr(\sigma^2 + n\sigma_0^2 \in J_5) Pr(\sigma^2 \in I_3) = \\ & (1 - \epsilon)^3, \end{aligned}$$

and

$$A_2 = \{(x, y, z): x \in J_4(y + nz), z + ny \in J_5, z \in I_3\}$$

is a  $(1 - \epsilon)^3$  confidence region for  $(m_0, \sigma_0^2, \sigma^2)$ .

Bjørn Sundt  
Forschungsinstitut für  
Mathematik  
ETH-Zentrum  
8092 Zürich

## References

- Sverdrup, E. (1967): *Laws and chance variations*. Vol. II. North-Holland Publishing Company. Amsterdam.
- Zagorac, D. (1981): Ein Beitrag zur Intervallschätzung der Glaubwürdigkeitsparameter. *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 67–75.

