

# In welchem Ausmass kann in der Lebensversicherung der Versicherungsnehmer am Risikogewinn einzelner Gruppen oder Verträge beteiligt werden?

Autor(en): **Strickler, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): - **(1982)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966989>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

PAUL STRICKLER, Zürich

## In welchem Ausmass kann in der Lebensversicherung der Versicherungsnehmer am Risikogewinn einzelner Gruppen oder Verträge beteiligt werden?

### 1 Einleitung

In vielen Ländern hat es sich eingebürgert, im Leben-Gruppengeschäft den Versicherungsnehmer nicht nur am Gesamterfolg des Versicherers teilhaben zu lassen. Insbesondere bei Gruppenverträgen in Form jährlich erneuerbarer temporärer Todesfallversicherungen wird oft vom Risikogewinn jeder einzelnen Gruppe jährlich ein mehr oder weniger grosser Teil (im Extremfall bis 90 oder 100%) an den Versicherungsnehmer zurückgegeben. Man spricht dann auch von «Erfahrungstarifizierung».

Dieselbe Praxis findet sich bei gewinnanteilsberechtigten Rückversicherungsverträgen im Leben- und Nichtlebensgeschäft. Hier kann stipuliert sein, dass bei positivem Ergebnis eines einzelnen Rückversicherungsvertrages ein Teil davon als Gewinnanteil (GA) an den Erstversicherer zurückfliesst.

Wie der Ausdruck «Erfahrungstarifizierung» sagt, sollen Gewinnanteile auf dem Ergebnis einzelner Gruppenpolicen bzw. Rückversicherungsverträge bezwecken, den Versicherungsnehmer am «Übergewinn» teilhaben zu lassen, wenn die Erfahrung zeigt, dass die Prämie zu hoch angesetzt wurde.

Nun lässt sich aber auch im nachhinein nur mit einer mehr oder weniger grossen, von Portefeuille-Umfang und -Zusammensetzung abhängigen Wahrscheinlichkeit etwas über die tatsächliche Bedarfsprämie eines Portefeuilles aussagen. Das Ergebnis jeder Beobachtungsperiode ist mit Zufallsschwankungen behaftet. Gewinne aus Schwankungen der Schadenlast nach unten bei einem Teil der Verträge erlauben es erst, bei den anderen zufallsbedingten Abweichungen nach oben zu bezahlen – dies ist ja der Sinn der Versicherung. Gibt nun der Versicherer bei «gutem» Ergebnis eines Vertrages systematisch einen Teil der tatsächlichen Bedarfsprämie an den Versicherungsnehmer zurück, findet er selbst dann sein Auskommen nicht mehr, wenn die Bedarfsprämie an sich richtig festgesetzt wurde.

Wenn seine Zahlungsfähigkeit langfristig erhalten bleiben soll, muss dem Träger des Risikos auch nach Bezahlung eines GA gesamthaft neben der Nettoprämie gemäss Schadenerwartung und einer ausreichenden Kostenmarge ein ange-

messener Sicherheits- und Gewinnzuschlag verbleiben. Lässt ein knappes Prämienniveau beim Abschluss eines Vertrages keine andern Konzessionen mehr zu, so kann zur Rettung des Geschäftes auch kein GA offeriert werden in der Meinung, wenn es dann besser gehe als erwartet, habe jeder erhalten, was er wollte. Zum mindesten seit dem Artikel von H. J. Bolnick über «Experience Rating Group Life Insurance» (Transactions of the Society of Actuaries, Vol. XXVI, 1974) weiss der Mathematiker, dass der Risikoträger in solchen Situationen mit GA-Klauseln nur verlieren kann.

In den folgenden Ausführungen soll versucht werden, anhand eines mathematischen Modells über einige wesentliche Fragen im Zusammenhang mit GA-Klauseln Aufschluss zu erhalten. Insbesondere interessiert uns die Frage nach der Gewinnerwartung für den Risikoträger unter Berücksichtigung von

- inhomogenen Beständen in bezug auf das Risiko der einzelnen GA-berechtigten Verträge,
- verschiedenartigen Verteilungen der Versicherungssummen,
- Portefeuillegrösse,
- Verlustvortragsklauseln.

Dabei beschränken wir uns auf die speziellen Verhältnisse jährlich erneuerbarer temporärer Todesfallversicherungen im Leben-Gruppengeschäft, bzw. in der Leben-Rückversicherung. Mit nur geringfügigen Modifikationen lassen sich die Ergebnisse auch auf Nichtleben-Portefeuilles anwenden.

## 2 Das verwendete Modell

2.1 Für die eben erwähnten Portefeuilles jährlich erneuerbarer Risikoversicherungen wird der Gewinn, an dem der Versicherungsnehmer beteiligt wird, üblicherweise definiert als in der Gewinnabrechnungsperiode verdiente Prämie (netto Kommissionen und Steuern) minus Verwaltungskostenabzug minus Schadenlast minus allfälliger Verlustvortrag aus dem Vorjahr. Zur mathematischen Darstellung verwende ich die folgenden Symbole, bei denen sich der Index  $i$  stets auf die betrachtete Gewinnabrechnungsperiode bezieht.

- $\pi_i$  = verdiente Risikoprämie in der Periode  $i$  nach Abzug allfälliger Kommissionen, Steuern usw.
- $\alpha$  = in der Gewinnabrechnung zu berücksichtigender Verwaltungskostensatz, der Einfachheit halber hier im Verhältnis  $\pi_i$  ausgedrückt statt wie oft auch üblich im Verhältnis zur Bruttoprämie vor Kommissionen usw.

- $P_i$  =  $(1 - \alpha)\pi_i$  = für die GA-Berechnung massgebende Nettoprämie nach Verwaltungskosten.  
 $X_i$  = in der GA-Periode effektiv eingetretene Schadenlast.  
 $Z_i$  = erwartungsmässige Schadenlast in der GA-Periode.  
 $\varrho$  = GA-Satz.  
 $V_i$  = Verlustvortrag am Ende der Abrechnungsperiode  $i$  (auf Periode  $i + 1$  zu übertragen).  
 $w_i(x)$  = Verteilungsfunktion der Schadenlast,  $x \geq 0$ .

Von  $w_i(x)$  setze ich voraus, dass es die im folgenden benötigten Integrierbarkeitseigenschaften besitzt, also insbesondere gilt:

$$\int_0^{\infty} w_i(x) \, dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} x \cdot w_i(x) \, dx = Z_i$$

Ist in der betrachteten GA-Periode der effektive Schaden  $X_i$  eingetreten, so ist der GA-pflichtige Gewinn

$$G_i = P_i - X_i - V_{i-1},$$

sofern  $G_i > 0$  ist. Ist  $G_i < 0$ , ist dieser Betrag als Verlustvortrag  $V_i$  in die nächste GA-Periode zu übertragen.

Zur Auszahlung kommt der Gewinnanteil  $\varrho G_i$ , und deren Restgewinn des Versicherers nach GA ist gleich

$$\pi_i - X_i - \varrho G_i.$$

2.2 Da uns zunächst nur der Gewinn der ersten Versicherungsperiode (ohne Verlustvortrag aus vorhergehenden Perioden) interessiert, lasse ich bis auf weiteres den Index  $i$  für die Bezeichnung der Gewinnabrechnungsperiode weg.

Ich gehe davon aus, dass in einem Portefeuille  $n$  Risiken mit durchschnittlicher Sterblichkeit  $q$  und durchschnittlicher Versicherungssumme 1 enthalten seien. Dann ist die totale Versicherungssumme des Portefeuilles gleich  $n$  und  $Z = nq$  = der Zahl der erwarteten Todesfälle. Im Verhältnis zur Prämie  $\pi$  beträgt der Restgewinn nach GA gemäss dem vorigen Abschnitt

$$\frac{1}{\pi} (\pi - Z - \varrho G)$$

Er muss für profitables Geschäft mindestens 15–20%, je nach Portefeuillegrösse und -struktur oft sehr wesentlich mehr betragen, um die Kosten decken zu können und eine genügende Sicherheits- und Gewinnmarge übrig zu lassen.

2.3 Mit den Bezeichnungen gemäss Absatz 2.1 berechnet sich der uns interessierende Erwartungswert  $G$  des Gewinns nach der Formel

$$G = \int_0^P w(x) (P - x) dx$$

Um seine Grösse abschätzen zu können, müssen wir sowohl über die Verteilung der Schadenhäufigkeiten als auch der Schadenhöhe für die einzelnen Policen geeignete Annahmen treffen.

Für die Schadenzahl  $k$  betrachten wir als erste Möglichkeit eine Verteilung nach Poisson

$$h_1(k) = e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} = e^{-Z} \frac{Z^k}{k!}$$

Wie sich anhand von Beispielen gezeigt hat, gelten die so berechneten Ergebnisse praktisch unverändert auch für binomial verteilte Schäden, selbst für sehr kleine  $n$ .

Um den Einfluss schwankender Grundwahrscheinlichkeiten (im Sinne Ammeters) beurteilen zu können, soll als 2. Möglichkeit

$$h_2(k) = \frac{1}{q_2 - q_1} \int_{q_1}^{q_2} e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} dq$$

untersucht werden. Die Auswertung des Integrals ergibt mit der Abkürzung  $Z_i = nq_i$

$$h_2(k) = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \left[ e^{-Z_1} \sum_{j=0}^k \frac{Z_1^j}{j!} - e^{-Z_2} \sum_{j=0}^k \frac{Z_2^j}{j!} \right]$$

Bei dieser Verteilung sind alle  $Z$  zwischen  $Z_1$  und  $Z_2$  gleich wahrscheinlich, also breit gestreut. Im übrigen gilt selbstverständlich

$$\lim_{Z_2 \rightarrow Z_1} h_2(k) = h_1(k)$$

2.4 Als Verteilungsfunktion der Versicherungssummen im Portefeuille wählen wir eine Gamma-Funktion

$$\varphi^{(1)}(x) = \frac{c^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-cx}$$

Diese besitzt bekanntlich die ersten drei Momente

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = 1 + \frac{1}{c}$$

$$M_3 = \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{2}{c}\right)$$

Durch geeignete Wahl von  $c$  lässt sich in der Regel die Summenverteilung in einem Lebensversicherungsportefeuille für praktische Zwecke genügend genau darstellen.

Durch  $(k-1)$ -malige Faltung erhalten wir die Summenverteilung für  $k > 1$  Schäden als

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{c^{kc}}{\Gamma(kc)} x^{kc-1} e^{-cx}$$

2.5 Zur praktischen Durchführung der Berechnungen können wir die Tatsache benützen, dass zwischen GA und Stop-loss (SL) ein sehr enger Zusammenhang besteht. Schon Bolnick hat im obenerwähnten Artikel darauf hingewiesen.

Die Prämie  $L$  für seine SL-Deckung des Überschadens ab SL-Punkt  $P$  berechnet sich zu

$$L = \int_P^{\infty} w(x) (x - P) dx$$

Zusammen mit der ersten Formel von Abschnitt 2.3 folgt daraus sofort

$$G - L = \int_0^{\infty} w(x) (P - x) dx = P - Z,$$

also  $G = P - Z + L$ .

Mit unseren Verteilungsfunktionen wird  $L$  zu

$$\begin{aligned} L &= \int_P^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(k) \varphi^{(k)}(x) (x - P) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} h(k) \int_P^{\infty} x \varphi^{(k)}(x) dx - P \sum_{k=1}^{\infty} h(k) \int_P^{\infty} \varphi^{(k)}(x) dx \end{aligned}$$

2.6 Für ein Portefeuille mit lauter gleichen Versicherungssummen  $x = 1$  (also  $c = \infty$  in der Gamma-Verteilung) gilt

$$\begin{aligned} \int_P^{\infty} \varphi^{(k)}(x) dx &= 1 \quad \text{für } k \geq P \\ \int_P^{\infty} x \varphi^{(k)}(x) dx &= k \quad \text{für } k \geq P \end{aligned}$$

während für  $k < P$  beide Integrale gleich 0 zu setzen sind. Kombiniert mit  $h_1(k)$  bzw.  $h_2(k)$  gemäss obigem Abschnitt 2.3 erhalten wir die expliziten Formeln für die SL-Prämie und damit auch für den Erwartungswert des Restgewinnes nach GA.

2.7 Auch für ganzzahlige positive Werte von  $c$  können die in der Formel für  $L$  auftretenden Integrale explizit ausgewertet werden. Man findet

$$\begin{aligned} \int_P^{\infty} \varphi^{(k)}(x) dx &= e^{-cP} \sum_{j=0}^{kc-1} \frac{(cP)^j}{j!} \\ \int_P^{\infty} x \varphi^{(k)}(x) dx &= k e^{-cP} \sum_{j=0}^{kc} \frac{(cP)^j}{j!} \end{aligned}$$

2.8 Für nicht ganzzahlige Werte von  $c$  können die Integrale nicht explizit dargestellt werden. Immerhin lassen sich die auftretenden unvollständigen Gammafunktionen mit genügender Genauigkeit auf einem modernen Taschenrechner programmieren.

### 3 Abhängigkeit des Gewinnes des Versicherers vom Gewinnanteil

3.0 Im folgenden möchte ich einen Überblick darüber geben, wie sich GA-Klauseln für den Versicherer auf das Ergebnis eines Portefeuilles auswirken. Dabei gehe ich von Annahmen aus, die grosso modo in vielen Fällen etwa den Realitäten in der heutigen Rückversicherung entsprechen dürften. In der Direktversicherung enthalten die Prämien in der Regel grössere Margen, andererseits sind die Kosten ebenfalls höher anzusetzen. R. Tornil hat die sich hieraus ergebenden Schwierigkeiten in seinen Untersuchungen über «El seguro de grupo y su entorno técnico» (Tesis doctoral, Barcelona 1980) dadurch umgangen, dass er im wesentlichen annimmt, der Verwaltungskostenabzug zur GA-Berechnung sei gleich den tatsächlichen VK und diese entsprechen den in den Prämien dafür eingerechneten Zuschlägen. In den Beispielen wurde in der Regel mit 10% von  $\pi$  als VK-Abzug gerechnet sowie mit 50% GA. Ferner wurde die effektive Sterblichkeit im allgemeinen auf 70% von  $\pi$  angesetzt.

Von ausschlaggebendem Einfluss auf die Kosten eines GA ist die Portefeuillegrösse. Als Mass dafür dient die Zahl der erwarteten Schäden  $Z$ . In der Regel wird auf Portefeuilles mit weniger als 100 Risiken kein GA gewährt, was bei 2% durchschnittlicher Sterblichkeit einem  $Z$  von 0,2 entspricht. Portefeuilles mit weniger als etwa 5 erwarteten Schäden sind als klein zu betrachten, solche zwischen 5 und 20 als mittelgross. Zum Vergleich wird jeweils noch die Gewinnerwartung für ein unendlich grosses Portefeuille (effektiver Schaden in jedem Fall gleich erwarteter Schaden) angegeben.

3.1 In einem ersten Beispiel (vgl. Anhangstabellen auf S. 255ff) wird dargestellt, wie sich die verschiedenen Annahmen über die Verteilung der  $q$  und der Versicherungssummen auf die Gewinnerwartung eines Portefeuilles auswirken.

Unter den angegebenen Bedingungen wird die Bruttomarge von 30% auf den Prämien für sehr grosse Portefeuilles auf 20% reduziert.

Für mittelgrosse Portefeuilles ( $Z = 5$ ) sinkt die tatsächliche Gewinnmarge bei lauter gleichen Versicherungssummen ( $c = \infty$ ) auf 16–17%, bei sehr schiefer Summenverteilung ( $c = 0,25$ ) auf rund 10% der Prämie ab, was die effektiven Kosten für den Versicherer bereits nicht mehr decken dürfte.

Völlig ungenügend wird die Ertragssituation für den Versicherer bei kleinen Portefeuilles. Für  $Z = 1$  (also z. B. bei einem Unfallversicherungs-Bestand von rund 2000 Risiken) wird die Gewinnerwartung bei schiefer Summenverteilung negativ. Auf kleinen Portefeuilles 50% GA zu gewähren, führt deshalb in die



roten Zahlen, es sei denn, die Bruttomarge auf den Prämien sei so hoch, dass sie kommerziell gar nicht mehr durchgesetzt werden kann.

Bei einem oder zwei erwarteten Schäden ist die Gewinnerwartung nach GA für die Gammaverteilung mit  $c = 0,25$  um rund 10% der Bruttoprämie kleiner als für lauter gleiche Versicherungssummen. Für grössere oder kleinere Portefeuilles nimmt diese Differenz rasch ab. Gefühlsmässig hätte man wohl einen grösseren Einfluss von  $c$  auf das Ergebnis erwartet.

Von überraschend geringer Bedeutung scheint der Einfluss schwankender Grundwahrscheinlichkeiten zu sein. Bei kleinen Portefeuilles ist er vernachlässigbar, und er fällt auch bei mittleren und grossen Beständen wenig ins Gewicht. Erst bei der wohl unrealistischen Annahme, dass  $q$  zwischen Null und dem doppelten Mittelwert gleichverteilt ist, beeinflusst er das Ergebnis spürbar.

3.3 Beispiel 2 zeigt die Abhängigkeit des Restgewinnes nach GA von der zur Verfügung stehenden Bruttomarge. Dass bei ungenügender Bruttomarge Verluste nach GA mit Sicherheit eintreten, ist bekannt. Dass aber auch bei einer Bruttomarge von 25% der Prämie ( $\beta = 0,75$ ) schon für mittlere und grosse Portefeuilles nach GA kaum mehr ein kostendeckender Gewinn verbleibt, und dass für kleine Portefeuilles zum vornherein mit einem Verlust gerechnet werden muss, dürfte doch eher überraschen. Selbst bei 50% Bruttomarge ( $\beta = 0,5$ ) ist der Restgewinn bei kleinen Portefeuilles ungenügend.

Im übrigen zeigt Beispiel 2 die Notwendigkeit auf, bei jeder Prämiensenkung und damit Verminderung der Bruttomarge die Gewinnanteils Klausel den neuen Verhältnissen anzupassen. Der Gewinn nach GA nimmt mit sinkender Bruttomarge überproportional ab und kann bei falscher Einschätzung der effektiven Sterblichkeit rasch in einen Verlust umschlagen.

Diesem Problem kann durch die Ansetzung einer realistischeren VK-Marge mindestens teilweise begegnet werden, wie man aus Beispiel 3 ersieht. Die relativ starke Erhöhung des Restgewinnes, die nach dem deterministischen Modell zu erwarten ist, wird bei den üblichen Portefeuillegrössen durch das Spiel der Zufallsschwankungen jedoch erheblich reduziert.

3.4 Der Restgewinn nach GA hängt linear vom GA-Satz ab (soweit dieser fest und nicht gestaffelt ist). Dies erlaubt es, durch lineare Interpolation zwischen dem Restgewinn für  $GA = 0$  und  $GA = 100\%$  zu bestimmen, welcher GA-Satz gewährt werden kann, wenn ein vorgegebenes Resultat erzielt werden soll. Wie aus Beispiel 4 hervorgeht, kann bei kleinen Portefeuilles und üblichen Gewinnmargen auf den Prämien höchstens ein bescheidener GA bezahlt wer-

den, wenn die Marge vor Kosten nicht unter 15% der Bruttoprämie absinken soll. Selbst für mittlere und grosse Portefeuilles ist ein GA von 50% sehr oft viel zu hoch, während bei sehr grossen Portefeuilles GA-Sätze von 60–75% technisch vertretbar sein können.

3.5 Im Beispiel 5 wird gezeigt, wie die Gewinnerwartung eines Portefeuilles bei *gestaffeltem* GA auf Grund der für konstante GA berechneten Werte auf einfache Weise ermittelt werden kann. Auch Überlegungen über Gewinnstaffelungen können keinesfalls nur anhand des deterministischen Modells gemacht werden. Dieses letztere ergibt (für  $Z = \infty$ ) bei einer Staffelung des GA von 25%/50%/75% einen Restgewinn von 23,7% der Prämie  $\pi$ , was einem konstanten GA-Satz von 31,5% entspricht. Im Bereich der grossen und mittelgrossen Portefeuilles fällt der Restgewinn bereits auf 18,9 bzw. 14,0% der Prämie entsprechend einem konstanten GA-Satz von 44 bzw. 50%. Bei kleinem Portefeuille wird die Gewinnerwartung negativ und der Gewinnanteil, der ausbezahlt wird, ist gleich hoch wie bei einem konstanten GA-Satz von 59%.

#### 4 Der Einfluss von Verlustvortragsklauseln

4.0 In den bisherigen Ausführungen haben wir, um das Problem nicht zu komplizieren, bewusst davon abgesehen, den Einfluss von Verlustvortragsklauseln auf den erwarteten Gewinn eines Portefeuilles zu berücksichtigen. Dieses Problem im allgemeinsten Fall formelmässig lösen zu wollen, dürfte ein schwieriges Unterfangen sein. Sobald man es aber auf einfachere Verhältnisse reduziert, ist es lösbar, und wir erhalten so für die Praxis genügend genaue Abschätzungen über die finanziellen Auswirkungen von Verlustvortragsklauseln.

4.1 Wird unter einem Vertrag erstmals ein GA gewährt, so wird der Erwartungswert des gewinnanteilpflichtigen Gewinns wie in Abschnitt 2.3 gleich

$$G_1 = \int_0^{P_1} w_1(x_1) (P_1 - x_1) dx_1$$

In der 2. GA-Periode wird ein GA nur ausbezahlt, wenn  $P_2 - x_2 > 0$  und zudem grösser als ein allfälliger Verlustvortrag  $V_1$  aus der ersten GA-Periode ist. Ein GA ist also für  $x_2 < P_2$  immer dann fällig, wenn  $x_1 \leq P_1$  war oder zumindest

neben  $x_2 < P_2$  auch  $x_1 + x_2 < P_1 + P_2$  erfüllt ist. Mit der Abkürzung  $P_1 + P_2 = P$  berechnet sich somit der Erwartungswert der zweiten GA-Periode

$$G_{1,2} = \int_{x_2=0}^{P_2} \int_{x_1=0}^{P_1} w_1(x_1) w_2(x_2) (P_2 - x_2) dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{x_2=0}^{P_2} \int_{x_1=P_1}^{P-x_2} w_1(x_1) w_2(x_2) (P - x_1 - x_2) dx_1 dx_2$$

4.2 Wir betrachten nun ein Portefeuille, das genau dieselben Merkmale aufweist wie das eben betrachtete, bei dem aber die erste und die zweite GA-Periode vertauscht sind. Durch Vertauschung der Indices erhält man die Gewinnerwartung  $G_{2,1}$ . Addieren wir  $G_{1,2}$  und  $G_{2,1}$ , so ergibt sich, wie man leicht zeigt,

$$G = \iint_{(0 \leq x_1 + x_2 \leq P)} w_1(x_1) w_2(x_2) (P - x_1 - x_2) dx_1 dx_2$$

Dies ist aber nichts anderes als der erwartete Gewinnanteil des Portefeuilles unter der Voraussetzung, dass der GA nur über das Gesamtergebnis beider GA-Perioden zusammen ermittelt wird. Dies drückt im übrigen die Tatsache aus, dass der totale GA über eine Abrechnungsperiode auf beliebige 2 Teilperioden aufgeteilt werden kann, sofern nur ein allfälliger Verlust einer jeden Teilperiode als Verlustvortrag bei der Gewinnbestimmung der andern mitberücksichtigt wird.

4.3 Wir treffen nun die Annahme, dass unser Portefeuille vollständig homogen sei in dem Sinne, dass für alle  $x$  stets  $w_1(x) = w_2(x)$  gilt. Ist dazu noch  $P_1 = P_2$ , also die beiden GA-Perioden gleich gross, so bezeichnen wir ein solches Portefeuille als stabil. Für ein solches wird  $G_{1,2} = G_{2,1}$  und somit sind beide gleich  $G/2$ .

Mit anderen Worten: In einem stabilen Portefeuille ist der Erwartungswert des GA in der 2. GA-Periode (aber selbstverständlich nicht in der ersten) bei Vorliegen einer Verlustvortragsklausel im Verhältnis zur Prämie genau gleich gross, wie wenn nur über die Erfahrung der beiden GA-Perioden zusammen ein GA bezahlt würde.

Der GA kostet also in der zweiten GA-Periode unter Berücksichtigung des Verlustvortrages  $V_1$  in Prozenten der Prämie bzw. in ‰ der Versicherungssumme genau gleich viel wie für ein doppelt so grosses Portefeuille ohne Verlustvortrag.

4.4 Auf analoge Weise kann die Gewinnerwartung der 3. Abrechnungsperiode für ein stabiles Portefeuille ermittelt werden. Setzen wir der Einfachheit halber  $w(x_1)w(x_2)w(x_3) = w$  und  $dx_1 dx_2 dx_3 = dx$ , so berechnet sie sich als Summe von 5 Integralen  $I_k$ , die wie folgt gebildet werden:

a)  $0 \leq x_1 \leq P, 0 \leq x_2 \leq P, 0 \leq x_3 \leq P$  ergibt den Beitrag

$$I_1 = \int_{x_3=0}^P \int_{x_2=0}^P \int_{x_1=0}^P w(P-x_3) dx$$

b)  $0 \leq x_1 \leq P, P \leq x_2 \leq 2P, 0 \leq x_3 \leq 2P - x_2$  ergibt den Beitrag

$$I_2 = \int_{x_3=0}^{2P-x_2} \int_{x_2=P}^{2P} \int_{x_1=0}^P w(2P-x_2-x_3) dx$$

c)  $P \leq x_1 \leq 2P, 0 \leq x_2 \leq 2P - x_1, 0 \leq x_3 \leq P$  ergibt den Beitrag

$$I_3 = \int_{x_3=0}^P \int_{x_2=0}^{2P-x_1} \int_{x_1=P}^{2P} w(P-x_3) dx$$

d)  $P \leq x_1 \leq 2P, 2P - x_1 \leq x_2 \leq 3P - x_1, 0 \leq x_3 \leq 3P - x_1 - x_2$

ergibt den Beitrag

$$I_4 = \int_{x_3=0}^{3P-x_1-x_2} \int_{x_2=2P-x_1}^{3P-x_1} \int_{x_1=P}^{2P} w(3P-x_1-x_2-x_3) dx$$

e)  $2P \leq x_1 \leq 3P, 0 \leq x_2 \leq 3P - x_1, 0 \leq x_3 \leq 3P - x_1 - x_2$

ergibt den Beitrag

$$I_5 = \int_{x_3=0}^{3P-x_1-x_2} \int_{x_2=0}^{3P-x_1} \int_{x_1=2P}^{3P} w(3P-x_1-x_2-x_3) dx$$

Vertauschen wir in diesen Integralen die Indices zyklisch und zählen dann alles zusammen, so erhalten wir dreimal den Erwartungswert  $G_3$  der dritten GA-Periode.

Die Auswertung ergibt, dass diese Summe gerade gleich

$$3 G_3 = \iiint_{(0 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 3P)} w(3P - x_1 - x_2 - x_3) dx$$

wird, also gleich dem Erwartungswert des Gewinns über eine GA-Periode der Länge  $3P$  ohne Verlustvortrag.

4.5 Da mathematische Aussagen der vorliegenden Art, die für  $k = 1, 2$  und  $3$  gelten, auch für beliebig grosse  $k$  richtig zu sein pflegen, erspare ich mir den Beweis für beliebige  $k$ . Für  $k \leq 3$  ist jedenfalls bewiesen:

Für stabile Portefeuilles (gleiche Schadenerwartung und Schadenverteilung in jeder Abrechnungsperiode) ist der erwartete Gewinn nach GA bei unbeschränktem Verlustvortrag in der  $k$ -ten Periode im Verhältnis zur Prämie genau gleich gross, wie wenn nur eine Gewinnabrechnung über alle  $k$  Perioden zusammen erstellt wird.

Damit brauchen wir bei mehrjährigem Verlustvortrag für die Bestimmung des Gewinnes eines stabilen Portefeuilles in der  $k$ -ten GA-Periode nur den Gewinnprozentsatz eines  $k$  mal grösseren Portefeuilles zu berechnen, bei dem kein Verlustvortrag berücksichtigt wird.

Bei einem stabilen Portefeuille wird demnach gemäss Tabelle von Beispiel 1 für  $Z = 1$  (ein erwarteter Schaden pro Jahr) schwankendes  $q$  und  $c = 0,5$  im ersten Jahr ein Gewinn von 1,8% von  $\pi$  erwartet. Im zweiten Jahr steigt er unter Berücksichtigung des Verlustvortrages auf 6,9% und erreicht bei unbeschränktem Verlustvortrag im fünften Jahr 12,3% der Prämie.

4.6 Bei einem wachsenden Portefeuille (jährliche Zunahme des Erwartungswertes  $Z$ ) wird der GA bei Vorliegen einer Verlustvortragsklausel im  $k$ -ten Jahr zwischen den Werten einer einjährigen GA-Periode und einer  $k$ -jährigen Periode liegen. Heben sich Zugang und Abgang auf, wird der für stabile Portefeuilles berechnete Wert erreicht, und es ist anzunehmen, dass für abnehmende Portefeuilles die Gewinnerwartung höher als für stabile Portefeuilles von gleichem Umfang ausfallen wird. Der Restgewinn wird aber wegen der kleineren Policenzahl kleiner werden müssen. Wie aus Überlegungen analog zu denen

von Abschnitt 4.2 folgt, wird der Gewinn in Prozenten von  $\pi$  für  $k$  Perioden mit Verlustvortrag nie grösser sein, als wenn nur ein Gewinnanteil über das Gesamtergebnis aller Perioden bezahlt würde.

4.7 Damit dürfte der mögliche Bereich des erwartungsmässigen Gewinnes bei Verlustvortragsklauseln in einer für die Praxis durchaus genügenden Weise abgegrenzt sein. Über die zukünftige Entwicklung eines Portefeuilles können ja kaum je einigermaßen sichere Annahmen getroffen werden, die auch bei Vorliegen exakter Formeln zuverlässigere Resultate als die vorliegenden Abschätzungen geben würden.

## 5 Vergleich mit den Ergebnissen von H.J. Bolnick

5.0 In seinem bereits in der Einleitung zitierten Artikel untersucht Bolnick die Auswirkungen von GA-Klauseln in der Gruppenversicherung mit Monte-Carlo-Methoden. Als Muster-Portefeuille wählt er eine Gruppe von 1050 Risiken, die sich in bezug auf Alter und Versicherungssummen wie folgt zusammensetzt:

Altersgruppe	Versicherungssumme			
	5000	10 000	20 000	40 000
15–19	50	–	–	–
20–29	200	50	25	–
30–39	200	100	75	–
40–49	100	50	50	–
50–70	25	50	50	25
Total Anzahl	575	250	200	25

Die totale Versicherungssumme beträgt 10 375 000, die Durchschnittssumme pro Risiko 9881. Da die häufigste Summe 5000 ist, also halb so gross wie der Durchschnittswert, drängt sich zum Vergleich mit unserem GA-Modell die Gammafunktion mit  $c = 2$ , also  $4xe^{-2x}$  als Summenverteilung auf.

Die Nettoprämie 2. Ordnung des Portefeuilles beträgt nach Bolnick 63 617,48 oder 6,132% der Versicherungssumme. Daraus berechnet sich approximativ 6,438 als Zahl der erwarteten Schäden. Um eine gute Übereinstimmung der Er-

gebnisse zu erhalten, lassen wir die Werte  $q$  im GA-Modell etwas stärker schwanken als in den bisherigen Beispielen, nämlich von 43% bis 157% des Mittelwertes.

5.1 Als erstes gibt Bolnick die für sein Musterportefeuille berechneten SL-Prämien für eine grosse Zahl von SL-Punkten. Für die Verteilung der Schadenzahl geht er dabei wie im GA-Modell von einer Poisson-Verteilung aus, während er für die Summenverteilung die genauen Werte berücksichtigt, die dem Portefeuille entsprechen.

Trotzdem diese letztere für die verschiedenen Altersgruppen sehr unterschiedlich ist, sind die resultierenden SL-Prämien praktisch identisch mit denen unseres GA-Modells.

SL-Punkte		SL-Prämie in Promillen der Versicherungssumme	
Absolut	Prozent der erwarteten Schäden	Bolnick	GA-Modell
0	0	6,132	6,132
30 000	47,2	3,47	3,46
50 000	78,6	2,11	2,11
65 000	102,2	1,37	1,37
95 000	149,3	0,50	0,49
130 000	204,3	0,12	0,12
190 000	298,7	0,007	0,006
320 000	503,0	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$

5.2 Wie sich die Gewinnerwartung für die Versicherungsgesellschaft bei 100% GA und unbeschränktem Verlustvortrag entwickelt, kann in der unter Situation I und V bei Bolnick mit Monte-Carlo-Methode durchgespielten Fällen unmittelbar mit unserem Modell aufgrund der Erkenntnisse von Abschnitt 4 verglichen werden. Es handelt sich dabei um folgende Beispiele:

Situation I: Prämie  $\pi = 65\,000 = 6,265\%$  der Versicherungssumme, erwartete Sterblichkeit = 97,873% von  $\pi$ .

Situation V: Prämie  $\pi = 85\,000 = 8,193\%$  der Versicherungssumme, erwartete Sterblichkeit = 74,844% von  $\pi$ .

In beiden Fällen ist zur Berechnung des GA kein VK-Abzug vorgesehen, und es werden beide Male dieselben Zufallszahlen generiert, d. h. genau dieselben To-

desfälle berücksichtigt. Die beiden Ergebnisse sind darum nicht unabhängig voneinander und zeigen auch einen grundsätzlich gleichen Gewinnverlauf, wie aus der Tabelle von Beispiel 6 hervorgeht.

5.3 Während für die ersten 4 Jahre erwartete Werte und Zufallswerte gut übereinstimmen, ist dies für die Jahre 5–10 nicht der Fall: die Verluste nach Zufallsmodell sind hier wesentlich kleiner als die erwarteten und geben ein erheblich zu günstiges Bild der tatsächlichen Situation. Erst im 11. Jahr steigt der Schaden wieder auf das erwartete Niveau. Mit andern Worten heisst das, dass in Wirklichkeit mit grösseren zufallsmässigen Abweichungen vom theoretischen Verlauf zu rechnen ist. Wie immer in solchen Situationen ist darum auch bei GA-Klauseln mit ausreichenden Sicherheitsmargen zu operieren.

5.4 Unter Situation II und VI untersucht Bolnick die Auswirkungen einer Beschränkung des Verlustvortrages in der Gewinnabrechnung. Beträgt der Verlust eines Rechnungsjahres im Beispiel von Situation I mehr als 100 000 (= Situation II) bzw. bei Situation V mehr als 85 000 (= Situation VI), so wird der übersteigende Teil nicht mehr in die nächste Gewinnabrechnung vorgetragen. Dies bedeutet, dass der GA ab diesen Limiten durch eine SL-Deckung geschützt ist.

Die Tarifierung einer solchen SL-Deckung zum Schutze des GA ist einfach. Soll in Situation II ein allfälliger Verlustvortrag auf 100 000 beschränkt werden (d. h. auf ca. 157% des erwarteten Schadens), so ist zur Nettoprämie von 6,265% die Prämie für eine SL-Deckung ab 100 000 in Höhe von 0,408% dazuzuzählen, so dass die Bruttoprämie 6,673% beträgt. Die 0,408% müssen dem Versicherer verbleiben, indem in der Gewinnabrechnung ein VK-Abzug in dieser Höhe (also 6,1% der Prämie) berücksichtigt wird. Für die ersten 5 Jahre ergeben sich dann nach GA-Modell bei vollständigem Verlustvortrag die Gewinnerwartungen von  $-0,96\%$ ,  $-0,70\%$ ,  $-0,61\%$ ,  $-0,55\%$  und  $-0,52\%$ . Da der VV bei Bolnick auf 100 000 limitiert ist, was in unserem Modell nicht berücksichtigt ist, liegen die erwarteten Verluste in Wirklichkeit etwas höher (aber unter  $0,96\%$ ). Dem stehen nach Monte-Carlo-Methode bei Bolnick Werte von  $-0,96\%$ ,  $-0,63\%$ ,  $-0,28\%$ ,  $-0,58\%$  und  $+0,09\%$  gegenüber.

Bei Situation VI – Prämie 85 000, SL-Deckung ab 85 000 – beträgt die SL-Prämie 0,709%, die Nettoprämie 8,193% und damit die Gesamtpremie 8,902%, von der 7,96% als Verwaltungskosten in der Gewinnabrechnung zu berücksichtigen sind. Selbstverständlich ist hier die Gewinnerwartung des Versicherers in jedem Versicherungsjahr gleich 0.



**6 Schlussbemerkungen**

Gerade die letzten Beispiele zeigen, dass mit dem dargestellten GA-Modell auf sehr einfache Weise Tarifierungen von Verträgen mit GA-Klauseln vorgenommen werden können. Ich glaube auch gezeigt zu haben, dass es durchaus brauchbare Abschätzungen für die Gewinnsituation bei Verträgen mit GA-Klauseln liefert. Es kann selbstverständlich noch in verschiedener Hinsicht ausgebaut werden (z. B. Berücksichtigung der maximalen Versicherungssumme pro Leben usw.). In der vorliegenden einfachen Form können jedoch sämtliche Resultate für die Portefeuilles, wie sie hier betrachtet wurden, auf einem modernen Taschenrechner mühelos erhalten werden.

P. Strickler  
Schweizerische  
Rückversicherungs-Gesellschaft  
Mythenquai 60  
Postfach  
8022 Zürich

## Anhang

## Beispiel 1

Gewinn nach GA in Prozenten der Bruttoprämie  $\pi$  in Abhängigkeit von der Zahl  $Z$  der erwarteten Schäden und der Summenverteilung

Effektive Sterblichkeit  $Z = 70\%$  von  $\pi$ , VK-Abzug = 10% von  $\pi$ , GA = 50%

Sterblichkeit	$q = \bar{q}$ konstant					$\frac{1}{2} \bar{q} \leq q \leq \frac{3}{2} \bar{q}$ schwankend				
	$c = \infty$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 0,5$	$c = 0,25$	$c = \infty$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 0,5$	$c = 0,25$
$Z = 0,2$	-6,8	-7,1	-7,7	-8,8	-10,2	-6,9	-7,2	-7,8	-8,9	-10,3
0,5	2,7	0,6	-1,1	-3,3	-5,9	2,4	0,4	-1,2	-3,4	-6,0
1	9,8	6,9	4,8	2,0	-1,3	9,2	6,5	4,5	1,8	-1,5
2	13,8	11,7	10,0	7,4	3,9	13,0	11,1	9,4	6,9	3,6
5	17,3	16,0	14,8	13,0	10,2	16,1	15,0	14,0	12,3	9,6
10	18,8	17,9	17,2	15,9	13,9	17,5	16,8	16,1	15,0	13,1
20	19,6	19,1	18,7	17,9	16,5	18,2	17,8	17,4	16,7	15,5
50	19,9	19,8	19,7	19,4	18,7	18,8	18,6	18,4	18,1	17,4
$\infty$	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0

## Beispiel 2

Gewinn nach GA in % der Bruttoprämie  $\pi$  in Abhängigkeit von der effektiven Sterblichkeit. VK-Abzug = 10% von  $\pi$ ,  $q$  schwankend  $\left(\frac{1}{2} \bar{q} \leq q \leq \frac{3}{2} \bar{q}\right)$ , GA = 50%

$\Gamma$ -Verteilung	$c = \infty$			$c = 1$			$c = 0,25$		
	0,5	0,75	1	0,5	0,75	1	0,5	0,75	1
$\beta = Z/\pi$	0,5	0,75	1	0,5	0,75	1	0,5	0,75	1
$\pi = 0,3$	11,2	-11,0	-33,5	10,5	-12,0	-34,7	8,6	-14,7	-38,1
0,75	18,9	-1,0	-21,8	15,7	-5,0	-26,3	11,9	-10,1	-32,3
1,5	24,3	5,5	-14,8	20,3	0,9	-19,6	15,4	-5,3	-26,6
3	27,1	9,5	-10,3	24,3	5,9	-14,0	19,5	-0,1	-20,5
7,5	29,1	12,7	-6,9	27,7	10,5	-9,1	24,3	6,1	-13,7
15	29,7	14,1	-5,5	29,0	12,7	-6,8	27,0	9,7	-10,0
30	29,9	14,9	-4,7	29,6	14,1	-5,5	28,6	12,1	-7,4
75	30,0	15,4	-4,3	29,9	15,0	-4,6	29,6	14,1	-5,5
$\infty$	30,0	17,5	0,0	30,0	17,5	0,0	30,0	17,5	0,0

## Beispiel 3

Gewinn nach GA in % der Bruttoprämie  $\pi$  in Abhängigkeit von Verwaltungs-kostenabzug und der Zahl  $Z$  der erwarteten Schäden.

Sterblichkeit = 70% von  $\pi$ ,  $q$  schwankend  $\left(\frac{1}{2} \bar{q} \leq q \leq \frac{3}{2} \bar{q}\right)$ , GA = 50%

Gamma-Verteilung	$c = \infty$			$c = 1$			$c = 0,25$		
	VK-Abzug % $\pi$	0%	10%	20%	0%	10%	20%	0%	10%
$Z = 0,2$	-11,0	- 6,9	- 2,8	-12,1	- 7,8	- 3,5	-14,8	-10,3	- 5,7
0,5	- 0,6	2,4	5,5	- 5,1	- 1,2	2,6	-10,2	- 6,0	- 1,7
1	5,6	9,2	12,9	0,9	4,5	8,0	- 5,4	- 1,5	2,5
2	9,6	13,0	16,4	5,9	9,4	12,8	- 0,2	3,6	7,2
5	12,4	16,1	19,6	10,3	14,0	17,4	6,0	9,6	13,1
10	13,5	17,5	21,0	12,3	16,1	19,6	9,4	13,1	16,5
20	14,1	18,2	21,8	13,5	17,4	21,0	11,7	15,5	19,0
50	14,5	18,8	22,4	14,2	18,4	22,0	13,4	17,4	21,0
$\infty$	15,0	20,0	25,0	15,0	20,0	25,0	15,0	20,0	25,0

## Beispiel 4

Restgewinn nach GA in % der Bruttoprämie  $\pi$  in Abhängigkeit vom GA-Satz  
Sterblichkeit = 70% von  $\pi$ , VK-Abzug = 10% von  $\pi$ ,  $q$  schwankend

$\left(\frac{1}{2} \bar{q} \leq q \leq \frac{3}{2} \bar{q}\right)$  Gammaverteilung  $c = 1$

GA-Satz	0%	25%	50%	75%	100%	GA-Satz für Restgewinn 15%
$Z = 0,2$	30,0	11,1	-7,8	-26,7	-45,5	19,9%
0,5	30,0	14,4	-1,2	-16,8	-32,5	24,0%
1	30,0	17,2	4,5	- 8,3	-21,0	29,4%
2	30,0	19,7	9,4	- 0,8	-11,1	36,5%
5	30,0	22,0	14,0	6,0	- 2,0	46,9%
10	30,0	23,1	16,1	9,2	2,3	54,1%
20	30,0	23,7	17,4	11,2	4,9	59,7%
50	30,0	24,2	18,4	12,6	6,8	64,6%
$\infty$	30,0	25,0	20,0	15,0	10,0	75,0%

### Beispiel 5

Berechnung des Restgewinnes in % der Bruttoprämie  $\pi$  bei gestaffeltem Gewinnanteil

Sterblichkeit = 70% von  $\pi$ ,  $q$  schwankend  $\left(\frac{1}{2} \bar{q} \leq q \leq \frac{3}{2} \bar{q}\right)$

Gammaverteilung  $c = 1$

GA-Bedingungen: 10% von  $\pi$  als VK-Abzug

25% GA auf Gewinn-Tranche von 10–25% von  $\pi$

50% GA auf Gewinn-Tranche von 25–50% von  $\pi$

75% GA auf übersteigendem Gewinn

Erwartete Schäden	VK	Gewinn bei GA			Beitrag zum Gewinn	Entspricht $\emptyset - GA$
		25%	50%	75%		
$Z = 0,5$	10%	14,4			14,4	
	25%	17,2	4,4		- 12,8	
	50%		13,5	5,2	- 8,3	
	10%	GA = 25%/50%/75%			- 6,7	58,8%
$Z = 5$	10%	22,0			22,0	
	25%	24,5	18,9		- 5,6	
	50%		25,3	22,9	- 2,4	
	10%	GA = 25%/50%/75%			14,0	50,0%
$Z = 20$	10%	23,7			23,7	
	25%	26,3	22,5		- 3,8	
	50%		28,0	27,0	- 1,0	
	10%	GA = 25%/50%/75%			18,9	44,2%
$Z = \infty$	10%	25,0			25,0	
	25%	28,8	27,5		- 1,3	
	50%		-	-	-	
	10%	GA = 25%/50%/75%			23,7	31,5%

*Beispiel 6*

*Vergleich von Monte-Carlo-Methode und GA-Modell  
(Musterportefeuille von Bolnick)*

Gewinn nach GA in Promillen der Versicherungssumme bei unbeschränktem Verlustvortrag

VK = 0%, GA = 100%, Verteilung  $4xe^{-2x}$  für GA-Modell,  $q$  schwankend  
( $0,43 \bar{q} \leq q \leq 1,57 \bar{q}$ )

Jahr	Situation I		Situation V	
	Bolnick	GA-Modell	Bolnick	GA-Modell
1	-1,30	-1,37	-0,59	-0,71
2	-1,02	-1,11	-0,47	-0,47
3	-0,82	-1,01	-0,37	-0,37
4	-1,07	-0,96	-0,24	-0,32
5	-0,16	-0,93	-0,00	-0,29
6	-0,64	-0,91	-0,01	-0,27
7	-0,36	-0,90*	+0,04	-0,25
8	-0,68	-0,89*	+0,12	-0,24*
9	-0,62	-0,88*	-0,09	-0,23*
10	-0,28	-0,87	-0,06	-0,22
11	-0,90	-0,87*	-0,34	-0,22*
12	-0,43	-0,86	-0,02	-0,21

\* Linear interpolierte Werte

## Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie sich in der Gruppenversicherung bzw. in der Rückversicherung die Beteiligung des Versicherungsnehmers am Risikogewinn jeder einzelnen Gruppe bzw. jedes einzelnen Rückversicherungsportefeuilles auf die Gewinnerwartung des Risikoträgers auswirkt.

Ein Gewinnanteil GA wird für einen Bestand an jährlich erneuerbaren temporären Todesfallversicherungen dann gewährt, wenn der Saldo aus verdienter Prämie  $\pi$  abzüglich Verwaltungs-kostenabzug VK abzüglich Schadenlast  $X$  und abzüglich allfälliger Verlustvortrag  $V$  positiv ist.  $V$  entspricht dabei dem Saldo der vorangehenden Periode, sofern dieser negativ ist.

Im benützten Modell ist die Zahl der erwarteten Schäden  $Z$  nach Poisson verteilt, wobei die Grundwahrscheinlichkeiten fest ( $q = \text{konstant}$ ) oder schwankend ( $q = \text{schwankend}$ ) im Sinne Ammeters sein können. Die Versicherungssummen  $x$  sind nach Gammafunktionen mit Parameter  $c$  verteilt. Der Restgewinn nach GA, den der Versicherer erwarten kann, ist jeweils in Prozenten von  $\pi$  ausgedrückt.

Von ausschlaggebender Bedeutung für die technische Zulässigkeit von GA-Klauseln ist (eine genügende Prämie  $\pi$  vorausgesetzt) die Portefeuillegrösse, für die  $Z$  als Mass dient (vgl. Beispiel 1). Der Einfluss des Faktors  $c$  ist überraschend klein, und noch viel geringer derjenige schwankender  $q$ . Bei kleinen und mittelgrossen Portefeuilles führen GA-Klauseln fast immer zu ungenügenden Margen oder – bei knapp bemessenen  $\pi$  – zu Verlusten (Beispiel 2). Auch durch hoch angesetzte VK-Abzüge kann die Situation für den Versicherer bei kleineren Portefeuilles kaum grundlegend verbessert werden (Beispiel 3). Gewinnanteile über 20% lassen sich bei letzteren selbst bei guten Margen kaum je technisch begründen (Beispiel 4), und auch Verlustvortragsklauseln helfen in diesem Fall meist nicht allzuviel weiter.

Abschliessend werden die Ergebnisse des benützten Modells mit denen verglichen, die H.J. Bolnick auf Grund von Monte-Carlo-Methoden ermittelt und in TSA 1974 publiziert hat.

## Résumé

L'auteur analyse l'effet sur les gains potentiels de l'assureur – ou du réassureur – de l'attribution d'une participation aux bénéfices techniques réalisés, isolément, sur chaque groupe ou sur chaque portefeuille réassuré.

Partant d'un portefeuille d'assurances temporaires d'un an renouvelables, la participation aux bénéfices GA (= Gewinnanteil) est accordée à condition que le solde des primes acquises  $\pi$ , après déduction des frais de gestion VK (= Verwaltungskosten), de la charge de sinistres  $X$  et d'un éventuel report de perte  $V$  (= Verlustvortrag), soit positif.  $V$  est égal au solde de l'exercice antérieur, s'il est négatif.

Le modèle utilisé suppose que les sinistres attendus  $Z$  se répartissent selon une distribution de Poisson, compte tenu de probabilités de base fixes ( $q = \text{konstant}$ ) ou variables ( $q = \text{schwankend}$ ), au sens donné par Ammeter. Les montants assurés  $x$  se répartissent suivant des fonctions gamma de paramètre  $c$ .

Le bénéfice qui reste à l'assureur, après avoir versé la participation GA, est exprimé en pour-cent de  $\pi$ .

Il est essentiel, pour qu'une clause de participation aux bénéfices soit techniquement admissible (dans l'hypothèse d'une prime  $\pi$  suffisante) de tenir compte des dimensions du portefeuille considéré, ces dimensions étant définies par  $Z$  (voir exemple n° 1). Le facteur  $c$ , par contre, joue un rôle d'une étonnante modestie. Celui des  $q$  variables est encore plus petit.

Appliquées à des portefeuilles petits ou moyens, les clauses de participation aux bénéfices ne laissent que des marges insuffisantes ou même – si  $\pi$  est calculé au plus juste – des pertes (exemple

n° 2). L'introduction de déductions pour frais (VK) élevées n'améliore pas sensiblement la situation de l'assureur quand le portefeuille est restreint (exemple n° 3). Il n'est guère possible, dans ce cas, de justifier valablement des taux de participation supérieurs à 20%, même si, par ailleurs, les marges techniques sont bonnes. Les clauses de report de perte ne parviennent pas non plus à corriger notablement la situation.

Finalement, l'auteur compare les résultats de son modèle avec ceux que H.J. Bolnick a obtenus à partir de la méthode de Monte-Carlo et qu'il a publiés dans les TSA de 1974.

## Summary

The article demonstrates how participation by the insured in the profits of an individual group (resp. reinsurance portfolio) affects the profit expectation of the risk carrier in group insurance (resp. reinsurance).

A profit commission (Gewinnanteil) GA is granted for a portfolio of yearly renewable term insurances if the balance of earned premiums (Verdiente Prämie)  $\pi$  less the management expense deduction (Verwaltungskostenabzug) VK, less the claims charged (Schadenlast)  $X$  and less any loss carry-forward (Verlustvortrag)  $V$  is positive.  $V$  represents the negative balance, if any, from the preceding period.

In the model employed the number of expected claims  $Z$  is Poisson-distributed, where the basic probabilities can be either fixed ( $q$  konstant) or fluctuating ( $q$  schwankend) in Ammeter's terminology. The sums insured  $x$  are distributed according to gamma functions with parameter  $c$ . The remaining profit after profit commission which the insurer can expect is expressed in each case as a percentage of  $\pi$ .

The size of the portfolio – as measured by  $Z$  – is of decisive importance for the reliability of profit participation clauses, assuming that the premium  $\pi$  is sufficient in the first place (see example 1). The influence of the factor  $c$  is surprisingly small and that of fluctuating  $q$ 's even less significant. For small and medium-sized portfolios profit participation clauses almost always lead to inadequate margins or – in the case of barely sufficient  $\pi$  – to losses (example 2). Nor can the insurer's situation in the case of smaller portfolios be improved fundamentally by setting the management expense deduction at a high level (example 3). Profit commission of over 20% in this case can hardly ever be justified technically, even with good premium margins (example 4) and loss carry-forward clauses are usually not helpful either.

Finally the results of the model are compared with those obtained by H.J. Bolnick on the basis of Monte-Carlo methods and published in 1974 in TSA.