Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1984)

Heft: 1

Artikel: Analyse des valeurs actuelles de rentes futures de survivants

Autor: Chuard, Marc

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555002

MARC CHUARD, Zollikerberg

Analyse des valeurs actuelles de rentes futures de survivants

1 Remarques préliminaires

Des rentes de retraite et des rentes d'invalide sont normalement prévues pour tous les affiliés, hommes et femmes, d'une caisse de pensions. Deux événements doivent alors être pris en considération pour les calculs actuariels: la mortalité et l'invalidité; l'un et l'autre sont quantifiés par des probabilités.
Dans le schéma que l'on adopte le plus communément pour établir les valeurs actuelles des prestations de la prévoyance professionnelle on distingue trois catégories d'assurés[1]:

- les actifs
- les invalides

} (jusqu'à l'âge normal de la retraite)

- les retraités (depuis l'âge normal de la retraite)

Pour les hommes affiliés à une caisse de pensions les rentes de retraite et celles d'invalide sont accompagnées de *rentes de survivants* pour veuves et pour orphelins. Avant que survienne l'événement qui en déclenche le paiement, ces rentes sont *futures*; ensuite elles sont *en cours*. Les valeurs actuelles de rentes futures de survivants doivent être établies dans le cadre du schéma à trois catégories, c'est-à-dire pour les six cas suivants:

rente	de veuve	d'orphelins
pour actif	aw	ak
invalide	iw	ik
retraité	w	k

(1)

Le symbole [2] servant à caractériser chacun des cas indique premièrement la catégorie d'assurés: actif (a), invalide (i), retraité (rien); secondement, le genre de rente de survie: veuve (w), orphelins (k).
D'une manière très générale la valeur actuelle d'une rente future de survivants, payée en m fractions, peut être exprimée, si l'on fait usage de la méthode

[1] C'est notamment le cas des tables EVK 1980; voir: bibliographie citée [1].
[2] Il correspond à l'indice supérieur droit des nombres de commutation et valeurs actuelles définis par les formules (77) à (96) de [1].

collective, par

$$\left.\begin{array}{rl} & \underline{\ddot{a}}_x^{\cdot(m)} = \dfrac{\bar{N}_x^{\cdot(m)}}{D_x^{\cdot}} \\ \text{où} & \bar{N}_x^{\cdot(m)} = \sum \bar{D}_x^{\cdot(m)} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Ces formules sont valables pour chacun des six cas (1) ci-dessus. On précise le cas en remplaçant le point (.) en indice (à droite, en haut) dans la valeur actuelle $\underline{\ddot{a}}$ et les nombres de commutation $\bar{D}$ et $\bar{N}$ par le symbole (l) complet, et celui du nombre de commutation D (au dénominateur de $\underline{\ddot{a}}$) par la seule indication de catégorie d'assurés (a, i ou rien).

Dans la technique actuarielle généralement utilisée les nombres de commutation $\bar{D}_x^{\cdot(m)}$ sont établis en adoptant pour époque de calcul l'âge $x+\frac{1}{2}$. Cela apparaît notamment par la présence du facteur d'escompte $v^{x+\frac{1}{2}}$. C'est pourquoi, compte tenu des règles de la notation actuarielle internationale, il convient de *surligner* les nombres de commutation $\bar{D}_x^{\cdot(m)}$ et $\bar{N}_x^{\cdot(m)}$; la valeur actuelle $\underline{\ddot{a}}_x^{\cdot(m)}$ qui en découle est *soulignée*.

Pour la rente ordinaire de survie on établit que[3]

$$\underline{\ddot{a}}_{x|y}^{(m)} \text{ calculé à partir de } \bar{D}_{x|y}^{(m)} = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x\, l_{y+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}_{y+\frac{1}{2}}^{(m)}$$

et

$$\ddot{a}_{x|y}^{(m)} \text{ calculé à partir de } D_{x|y}^{(m)} = v^{x+1}\, d_x\, l_{y+1}\, \ddot{a}_{y+1}$$

sont liés par

$$\underline{\ddot{a}}_{x|y}^{(m)} = \ddot{a}_{x|y}^{(m)} + \frac{1}{2m}\, \bar{A}_{xy}^{1} \tag{3}$$

où la valeur actuelle du capital de survie

$$\bar{A}_{xy}^{1} \text{ est calculée à partir de } \bar{C}_{xy}^{1} = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x\, l_{y+\frac{1}{2}}.$$

La formule (3) permet d'*analyser* la valeur actuelle $\underline{\ddot{a}}_{x|y}^{(m)}$ en constatant qu'elle comprend

- celle $\ddot{a}_{x|y}^{(m)}$ de la rente de survie proprement dite,
- et celle $\dfrac{1}{2m}\bar{A}_{xy}^{1}$ d'un terme partiel de rente payé au moment du décès de (x), calculé au prorata du temps restant à courir jusqu'à l'échéance du prochain terme.

Pour pouvoir analyser de même façon les valeurs actuelles de rentes futures de survivants (veuves et orphelins) utilisées dans la technique actuarielle des caisses

[3] Voir [2], paragraphe 333, pages 95 et suivantes.

de pensions, et définies par (2), il faut établir la relation

$$\underline{\ddot{a}}_x^{\cdot(m)} = \ddot{a}_x^{\cdot(m)} + \frac{1}{2m}\,\bar{A}_x^{\cdot} \tag{4}$$

où

$$\left.\begin{aligned} \ddot{a}_x^{\cdot(m)} &= \frac{N_x^{\cdot(m)}}{D_x^{\cdot}} \\ \text{avec} \quad N_x^{\cdot(m)} &= \sum D_x^{\cdot(m)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_x^{\cdot} &= \frac{\bar{M}_x^{\cdot}}{D_x^{\cdot}} \\ \text{avec} \quad \bar{M}_x^{\cdot} &= \sum \bar{C}_x^{\cdot} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dans ces formules on précise celui des six cas (1) auquel elles se rapportent en remplaçant le point (.) en indice (à droite, en haut) par le symbole approprié: *aw*, *iw*, *w*, *ak*, *ik*, *k* partout sauf dans le nombre de commutation $D_x^{\cdot}$ au dénominateur des valeurs actuelles; là, seule la catégorie d'assurés doit être indiquée: actif (a), invalide (i), retraité (rien).
L'analyse basée sur les formules (4) à (6) se heurte, en particulier, à la complexité du nombre de commutation $D_x^{\cdot(m)}$ de (5). A notre connaissance elle n'avait pas été faite. C'est pourquoi nous lui avons consacré une étude publiée dans un Cahier de l'Institut de sciences actuarielles de l'Université de Lausanne[4]. Nous en présentons ci-après les plus importants éléments et les conclusions.

2 Rente future de veuve

Les nombres de commutation $\bar{D}_x^{\cdot(m)}$, $D_x^{\cdot(m)}$ et $\bar{C}_x^{\cdot}$ des relations (2), (5) et (6) sont le point de départ de l'analyse envisagée. Précisons que les formules de $\bar{D}_x^{\cdot(m)}$ sont indiquées et utilisées dans les tables EVK 1980[5]. Par contre celles de $D_x^{\cdot(m)}$ sont, sauf erreur, originales; il en va de même pour $\bar{C}_x^{\cdot}$. Nous indiquons ci-après ces formules, exprimées avec les symboles de probabilités, de nombres de personnes et de valeurs actuelles utilisés dans l'ouvrage cité [2]. D'autre part, pour simplifier, nous ne tenons pas compte du capital payé en cas de remariage de la veuve; mais il est facile d'introduire cet élément dans les formules et les calculs.

[4] Bibliographie citée [3].
[5] [1], formules (77), (81), (84).

Rente future de veuve, pour retraité

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{D}_x^{w(m)} = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x\, w_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}}\\
&D_x^{w(m)} = v^{x+1}\, d_x\, w_{x+\frac{1}{2}}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y_{x+\frac{1}{2}}} \left(\ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{2m}\right)\\
&\bar{C}_x^{w} = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x\, w_{x+\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Rente future de veuve, pour invalide

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{D}_x^{iw(m)} = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x^{i}\, w^{i}_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}}\\
&D_x^{iw(m)} = v^{x+1}\, d_x^{i}\, w^{i}_{x+\frac{1}{2}}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y_{x+\frac{1}{2}}} \left(\ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{2m}\right)\\
&\bar{C}_x^{iw} = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x^{i}\, w^{i}_{x+\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Rente future de veuve, pour actif

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{D}_x^{aw(m)} = v^{x+\frac{1}{2}} \left(d_x^{aa}\, w^{a}_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}} + b_x\, \ddot{\underline{a}}^{iw(m)}_{x+\frac{1}{2}}\right)\\
&D_x^{aw(m)} = v^{x+1} \Bigg[\left(d_x^{aa}\, w^{a}_{x+\frac{1}{2}} + d_x^{ai}\, w^{i}_{x+\frac{1}{2}}\right) {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y_{x+\frac{1}{2}}}\\
&\qquad \cdot \left(\ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{2m}\right) + l^{ai}_{x+1}\, \ddot{a}^{iw(m)}_{x+1}\Bigg]\\
&\bar{C}_x^{aw} = v^{x+\frac{1}{2}} \left(d_x^{aa}\, w^{a}_{x+\frac{1}{2}} + d_x^{ai}\, w^{i}_{x+\frac{1}{2}}\right) + v^{x+1}\, l^{ai}_{x+1}\, \bar{A}^{iw}_{x+1}
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Avec les formules ci-dessus (7), (8) et (9) la relation (4) est vérifiée dans chaque cas envisagé. Sans entrer dans le détail des démonstrations[6], nous indiquons seulement qu'elles font appel notamment aux relations

$$\ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2m} + v^{\frac{1}{2}}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y_{x+\frac{1}{2}}}\, \ddot{a}^{w}_{y_{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

$$\ddot{\underline{a}}^{iw(m)}_{x+\frac{1}{2}} = {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+\frac{1}{2}}\, w^{i}_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}^{w(m)}_{y_{x+\frac{1}{2}}} + v^{\frac{1}{2}}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{\underline{a}}^{iw(m)}_{x+1} \qquad (11)$$

[6] développées dans [3], paragraphe 3, pages 6 à 13.

Deux remarques importantes découlent des développements qui précèdent. Premièrement il apparaît que toute valeur actuelle $\underline{\ddot{a}}_{x}^{\cdot(m)}$ calculée à partir des nombres de commutation $\bar{D}_{x}^{\cdot(m)}$ comprend

- la valeur actuelle $\ddot{a}_{x}^{\cdot(m)}$ de la *rente proprement dite*,
- la valeur actuelle $\frac{1}{2m}\,\bar{A}_{x}^{\cdot}$ d'un *terme partiel* de rente payé au moment du décès de l'homme assuré, et calculé au *prorata* du temps restant à courir jusqu'à l'échéance du prochain terme.

Secondement on constate que, dans tous les cas envisagés, la *valeur actuelle* $\ddot{a}_{x}^{\cdot(m)}$ est *indépendante du fractionnement m*. En effet les nombres de commutation $D_{x}^{w(m)}$ et $D_{x}^{iw(m)}$, indiqués en (7) et (8), sont visiblement indépendants de m. Il en va alors de même pour $\ddot{a}_{x}^{w(m)}$, $\ddot{a}_{x}^{iw(m)}$, $D_{x}^{aw(m)}$ et $\ddot{a}_{x}^{aw(m)}$

Cette dernière remarque s'explique intuitivement. En effet si l'on considère la rente future proprement dite, dont la valeur actuelle est $\ddot{a}_{x}^{\cdot(m)}$, le début de son paiement est déclenché par le décès de l'homme assuré et peut avoir lieu à n'importe quel moment de l'année. Il y a donc incertitude quant au nombre de termes $\frac{1}{m}$ qui seront payés dans l'année du décès de l'homme. La fin de la rente a lieu au moment du décès de la veuve, soit à n'importe quel moment de l'année. Il y a, là aussi, incertitude. L'une compense l'autre. Une constatation du même genre peut être faite à propos de la rente future d'invalide[7].

3 Rente future d'orphelins

Les observations initiales faites au début du paragraphe 2 s'appliquent non seulement à la rente future de veuve, mais aussi à celle d'orphelins (à l'exclusion, bien sûr, du capital en cas de remariage de la veuve). Nous indiquons donc les formules des nombres de commutation.

Rente future d'orphelins, pour retraité

$$\left.\begin{aligned}
\bar{D}_{x}^{k(m)} &= v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x\, k_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}_{z_{x+\frac{1}{2}}}^{k(m)} \\
D_{x}^{k(m)} &= v^{x+1}\, d_x\, k_{x+\frac{1}{2}} \left(\ddot{a}_{z_{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}^{k(m)} + \frac{m-1}{2m}\right) \\
\bar{C}_{x}^{k} &= v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x\, k_{x+\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

[7] Bibliographie citée [2]; paragraphe 3233, formule (5).

Rente future d'orphelins, pour invalide

$$\left.\begin{aligned}
\bar{D}_x^{ik(m)} &= v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x^i\, k_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}_{z_{x+\frac{1}{2}}}^{k(m)} \\
D_x^{ik(m)} &= v^{x+1}\, d_x^i\, k_{x+\frac{1}{2}} \left(\ddot{a}_{z_{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}^{k(m)} + \frac{m-1}{2m}\right) \\
\bar{C}_x^{ik} &= v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x^i\, k_{x+\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Rente future d'orphelins, pour actif

$$\left.\begin{aligned}
\bar{D}_x^{ak(m)} &= v^{x+\frac{1}{2}} (d_x^{aa}\, k_{x+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}_{z_{x+\frac{1}{2}}}^{k(m)} + b_x\, \underline{\ddot{a}}_{x+\frac{1}{2}}^{ik(m)}) \\
D_x^{ak(m)} &= v^{x+1} \left[(d_x^{aa} + d_x^{ai}) k_{x+\frac{1}{2}} \left(\ddot{a}_{z_{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}^{k(m)} + \frac{m-1}{2m}\right) + l_{x+1}^{ai}\, \ddot{a}_{x+1}^{ik(m)}\right] \\
\bar{C}_x^{ak} &= v^{x+\frac{1}{2}} (d_x^{aa} + d_x^{ai}) k_{x+\frac{1}{2}} + v^{x+1}\, l_{x+1}^{ai}\, \bar{A}_{x+1}^{ik}
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

On démontre[8] qu'avec les formules (12), (13) et (14) ci-dessus la relation (4) est vérifiée; pour cela on fait usage notamment de formules analogues à (10) et (11). Comme c'est le cas pour la rente future de veuve, la valeur actuelle $\underline{\ddot{a}}_{\dot{x}}^{(m)}$ de la rente future d'orphelins comprend

- la valeur actuelle $\ddot{a}_{\dot{x}}^{(m)}$ de la *rente proprement dite*,
- la valeur actuelle $\frac{1}{2m}\,\bar{A}_{\dot{x}}$ d'un *terme partiel* calculé au prorata du temps restant à courir.

Par contre, pour la rente future d'orphelins, la valeur actuelle $\ddot{a}_{\dot{x}}^{(m)}$ n'est *pas indépendante du fractionnement m*. Cela est dû au fait que s'il y a incertitude quant au début du paiement de la rente, déclenché par le décès de l'homme assuré, il n'y en a pas pour la fin de la rente, qui a lieu au moment où l'orphelin atteint un âge fixé (20 ans, en général, dans les formules).

4 Conclusions

Les quelques exemples ci-dessous sont calculés, en principe, sur la base des données EVK 1980 (avec quelques adaptations dont, notamment, l'absence d'un

[8] [3], paragraphe 4, pages 13 à 19.

capital en cas de remariage) et le taux d'intérêt de 4%. Ils sont extraits de tableaux complets publiés dans l'étude citée [3].

.	aw	iw	w
x	30	30	70
$\ddot{a}_x^{:(m)}$	1,577	4,245	3,787
$\bar{A}_x^{:}$	0,128	0,260	0,411

.	ak	ik	k
x	30	30	70
$\ddot{a}_x^{:}$	0,269	3,411	0,002
$\ddot{a}_x^{:(12)}$	0,283	3,529	0,004
$\bar{A}_x^{:}$	0,041	0,395	0,003

Plusieurs conclusions peuvent être tirées des développements qui précèdent.

1. La valeur actuelle de la rente future de survivants $\underline{\ddot{a}}_x^{:(m)}$ calculée à partir de nombres de commutation $\bar{D}_x^{:(m)}$ contient la valeur actuelle de la rente proprement dite et celle d'un terme partiel de rente (prorata). C'est en particulier le cas des $\underline{\ddot{a}}_x^{:(12)}$ indiqués dans les tables usuelles. Or, pour le fractionnement 12, qui conduit à des rentes mensuelles, un prorata de rente ne correspond pas à la réalité. Mieux vaudrait donc utiliser $\ddot{a}_x^{:(m)}$ calculé à partir de $D_x^{:(m)}$.
2. Le calcul de $\ddot{a}_x^{:(m)}$ par des nombres de commutation $D_x^{:(m)}$ est possible. Le fait que ces nombres soient parfois plus compliqués que les $\bar{D}_x^{:(m)}$ n'est pas un handicap lorsque les calculs se font par ordinateur. Par contre la particularité des $\ddot{a}_x^{aw}$, $\ddot{a}_x^{iw}$, $\ddot{a}_x^{w}$ d'être indépendants du fractionnement m (contrairement aux $\underline{\ddot{a}}_x^{aw(m)}$, $\underline{\ddot{a}}_x^{iw(m)}$, $\underline{\ddot{a}}_x^{w(m)}$) élargit le champ d'application de ces valeurs.
3. Si, pour simplifier la présentation d'une table de valeurs numériques, on ne désire présenter qu'une seule série de valeurs actuelles $\ddot{a}_x^{:(m)}$ pour rentes futures d'orphelins (sans prorata), il faut choisir les $\ddot{a}_x^{:(12)}$. L'éventuelle utilisation de ces valeurs pour tout fractionnement n'introduit que des erreurs minimes (voir tableau ci-dessus) et qui vont dans le sens de la sécurité.
4. Dans une table de valeurs numériques contenant les valeurs actuelles pour rentes futures de survivants $\ddot{a}_x^{:(m)}$ sans prorata, il conviendrait d'indiquer les

valeurs actuelles

$$\bar{A}_x^{aw},\ \bar{A}_x^{iw},\ \bar{A}_x^{w},\ \bar{A}_x^{ak},\ \bar{A}_x^{ik},\ \bar{A}_x^{k}$$

permettant de calculer la valeur actuelle d'un prorata, si c'est nécessaire.

Marc Chuard
Neuackerstrasse 32
8125 Zollikerberg

Bibliographie

[1] Technische Grundlagen der Eidgenössischen Versicherungskasse (EVK 1980): Text, Bern, 1980.
[2] *Philippe Chuard*: Mathématiques actuarielles des caisses de pensions; Institut de sciences actuarielles de l'Université de Lausanne, 1981.
[3] *Marc Chuard*: Valeurs actuelles de rentes pour assurances de pensions (avec ou sans prorata); Cahier N° 8 de l'Institut de sciences actuarielles de l'Université de Lausanne, 1984.

Résumé

Les formules communément utilisées pour les valeurs actuelles de rentes futures de survivants tiennent compte d'un prorata. Il est possible et, dans certains cas, préférable d'utiliser d'autres formules.

Zusammenfassung

Die üblichen Formeln für die Barwerte von Ueberlebensrenten enthalten ein Korrekturglied für ratenweise Rentenzahlungen. Es ist möglich – und in gewissen Fällen vorteilhaft – andere Formeln zu verwenden.

Summary

The formulae commonly used for the calculation of present values of survivor annuities contain a corrective prorata term. It is possible and sometimes preferable to use some other formulae.