

Sur les marges de sécurité des primes "stop-loss"

Autor(en): **Amsler, Marc-Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisse = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): - **(1986)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967046>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MARC-HENRI AMSLER, Lausanne

Sur les marges de sécurité des primes “stop-loss”

1 Introduction

Parmi les thèmes revenant fréquemment dans les revues actuarielles ces dernières années, il y a lieu d'inscrire en bonne place celui de la détermination des primes stop-loss. L'une des raisons de cette place de choix est que le sujet permet toute une série d'approches mathématiques et même, pour ceux qui les apprécient, des développements sophistiqués. La plupart des travaux n'abordent néanmoins la question de la détermination des primes stop-loss que partiellement, à savoir se limitent à la question du partage des charges d'assurance moyennes entre la compagnie cédante et son réassureur. L'espérance mathématique des charges d'assurance incombant aux deux partenaires, si elle intervient nécessairement dans la fixation de la prime, n'est pas le seul élément à retenir, même peut-être pas l'élément prépondérant. Un second élément joue son rôle: la répartition entre les contractants de la marge de sécurité comprise dans les primes du portefeuille réassuré. C'est à cet aspect de la question que sont consacrées les lignes qui suivent.

Notons que pour obtenir une prime stop-loss réaliste, il y a lieu de prendre en compte encore l'imprécision des renseignements accessibles sur le portefeuille à réassurer et, évidemment, la charge des frais de gestion.

2 Caractéristiques techniques du portefeuille à réassurer

Les caractéristiques actuarielles du portefeuille à réassurer sont désignés par les symboles suivantes:

X = charges annuelles des sinistres (variable aléatoire) avec ses moments centrés μ_k

E = espérance mathématique de X

V = variance de X

Q = marge de sécurité comprise dans

$P = E + Q$ = prime du portefeuille.

Nous faisons abstraction ici des chargements devant couvrir les incertitudes et les frais de gestion, comme mentionné en introduction.

Les caractéristiques du portefeuille pour propre compte (de plein de conservation stop-loss α) sont désignées par les mêmes lettres, mais munies d'une croche: X' , E' , V' , Q' , et P' ; celles des cessions au réassureur sont munies de deux croches: X'' , E'' , V'' , Q'' , et P'' . P'' est donc la prime de réassurance. Nous supposerons connue la répartition des espérances mathématiques

$$E = E' + E''$$

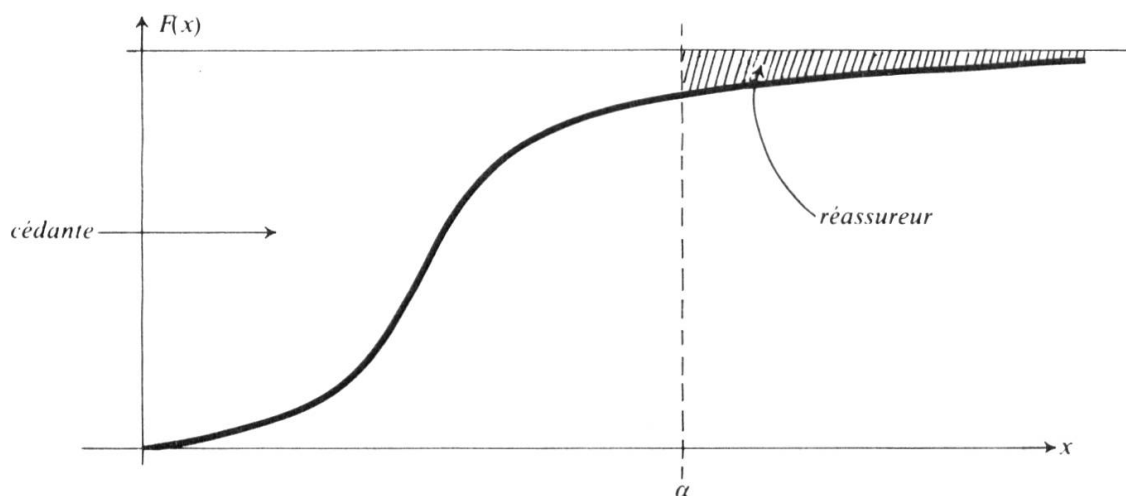
et aborderons la question du partage de la marge de sécurité

$$Q = Q' + Q''$$

entre compagnie cédante et réassureur.

3 Partage de la marge de sécurité

Le mode de partage de la composante E de la prime P du portefeuille complet n'est l'objet d'aucune contestation: les charges moyennes E' et E'' sont proportionnelles aux aires des surfaces délimitées par la fonction de répartition de X , selon figure ci-après



En utilisant la seconde fonction de répartition $F_2(x)$ définie par

$$F_2(x) = \frac{\text{aire partielle jusqu'à } x}{\text{aire totale jusqu'à l'infini}}$$

on a pour la répartition de E entre compagnie cédante et réassureur:

$$\begin{cases} E' = F_2(\alpha) \cdot E \\ E'' = (1 - F_2(\alpha)) \cdot E \end{cases} \quad F_2(\alpha) \leq 1 \quad (1)$$

Le facteur $F_2(\alpha)$ joue le rôle, pour la compagnie cédante, d'un "facteur de réduction" des charges moyennes d'assurances par suite de la réassurance stop-loss.

Qu'en est-il du partage de la marge de sécurité Q ? Le partage doit conduire, par analogie avec (1), à

$$\begin{cases} Q' = G(X) \cdot Q \\ Q'' = (1 - G(X)) \cdot Q \end{cases} \quad G(X) \leq 1 \quad (2)$$

Comment déterminer le "facteur de réduction" $G(X)$ de la marge de sécurité Q ?

Pour répondre à cette question, il y a lieu de préciser le rôle de cette marge et les raisons de son apparition dans la prime P du portefeuille.

Pour le moins trois interprétations de la marge Q doivent être retenues.

1^e interprétation: la marge Q – du moins en partie – est l'élément financier permettant le développement du portefeuille; il s'agit dans ce cas d'une marge bénéficiaire, trouvant sa justification dans les règles économiques usuelles.

2^e interprétation: la charge annuelle des sinistres étant une variable aléatoire, la notion d'utilité, dans son acception économique, pose qu'un écart donné vers les grandes valeurs des charges d'assurance présente une utilité plus faible qu'un écart de même importance vers les petites valeurs, les écarts étant déterminés par rapport à la moyenne E . Cette différence dans les utilités, pour des écarts d'égale importance

numérique, conduit à une prime P supérieure à l'espérance mathématique, donc à une marge de sécurité Q positive. La marge Q – du moins en partie – représente ainsi la contre-valeur du risque de fluctuation des charges d'assurance.

3^e interprétation: la théorie de la ruine des portefeuilles d'assurance conclut qu'un portefeuille (stationnaire) sans marge de sécurité ($Q = 0$) se trouvera forcément en situation de ruine (provision de fluctuation négative) au cours de l'évolution aléatoire ultérieure, et qu'une marge Q positive donne au portefeuille des chances de ne pas se ruiner dans le futur. La marge Q – du moins une partie de cette marge – joue donc le rôle de protection contre le risque potentiel de déséquilibre, et partant, le risque potentiel de ruine. La dite marge est donc directement liée à la présence des fluctuations des charges annuelles d'assurance X .

La dépendance entre la marge Q et la fluctuation de X est donc essentielle. Elle ne peut être supprimée que dans le cas où la charge X est constante, la marge Q prenant alors exclusivement le caractère de marge bénéficiaire (interprétation 1 ci-dessus). Cette hypothèse ne peut être retenue dans le cas d'un portefeuille réel d'assurance.

Une bonne mesure des fluctuations sont les moments centrés, en premier lieu les moments centrés d'ordre pair, et en tout premier lieu la variance resp. l'écart-type. Le moment du premier ordre, soit l'espérance mathématique, ne devrait pas intervenir; on rencontre malheureusement souvent cette dépendance dans l'expression d'une prime:

$$P = (1 + \lambda) \cdot E$$

Ainsi, dans la recherche de principes permettant de répartir la marge Q entre compagnie cédante et réassureur, selon (2), le "facteur de réduction" $G(X)$ de la marge de sécurité par suite de la réassurance stop-loss peut être défini comme étant une fonction des moments centrés avec et sans réassurance:

$$G(\mu'_2 \mu'_3 \dots; \mu_2 \mu_3 \dots)$$

Quelle fonction G choisir?

4 Choix du facteur de réduction G

Trois principes de calcul des primes fournissent des exemples de facteur G .
Le principe de l'écart-type

$$\begin{array}{ll} \text{sans réassurance} & P = E + c \cdot \sigma \quad \text{c. à. d.} \quad Q = c \cdot \sigma \\ \text{avec réassurance} & P' = E' + c \cdot \sigma' \quad \text{c. à. d.} \quad Q' = c \cdot \sigma' \end{array}$$

livre

$$Q' = \frac{\sigma'}{\sigma} Q \quad \text{c. à. d.} \quad G = \frac{\sigma'}{\sigma} \quad (3)$$

Le principe de la variance

$$P = E + b \cdot \sigma^2 \quad \text{c. à. d.} \quad Q = b \cdot \sigma^2$$

conduit à

$$Q' = \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} Q \quad \text{c. à. d.} \quad G = \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \quad (4)$$

Le principe d'utilité constante (appelé souvent principe d'utilité nulle) basé sur une fonction d'utilité exponentielle

$$P = \frac{1}{a} \cdot \ln E(e^{aX})$$

donne

$$Q = P - E \quad \text{resp.} \quad Q' = P' - E'$$

c. à. d.

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{a^{-1} \ln E(e^{aX'}) - E'}{a^{-1} \ln E(e^{aX}) - E} \cdot Q \\ G &= \frac{a^{-1} \ln E(e^{aX'}) - E'}{a^{-1} \ln E(e^{aX}) - E} \end{aligned} \quad (5)$$

Les numérateurs concernent la charge X' pour propre compte et les dénominateurs la charge X du portefeuille entier.

Du fait de la réduction des fluctuations du portefeuille pour propre compte par toute réassurance stop-loss, on a

$$\frac{\sigma'}{\sigma} < 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} < \frac{\sigma'}{\sigma}$$

Ainsi le principe de la variance conserve à la compagnie cédante une plus petite marge de sécurité que le principe de l'écart-type.

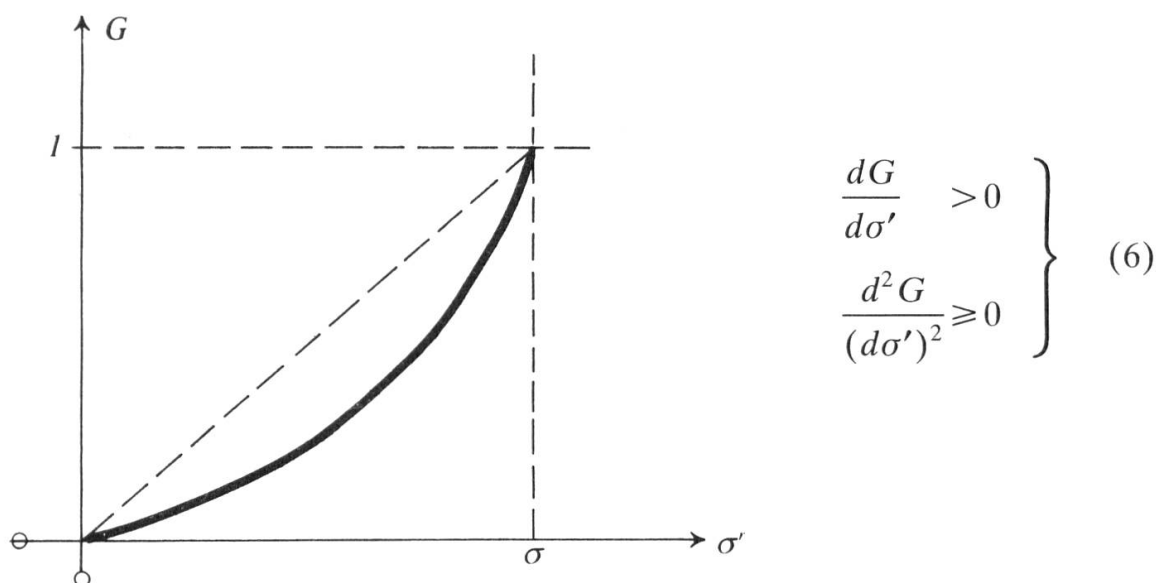
On peut se demander quelles sont les propriétés générales de la fonction G , facteur de réduction de la marge Q . Deux d'entre elles sont évidentes:

- si le portefeuille réassuré ne fluctue presque plus par suite de la réassurance, c. à. d. si σ' est presque nul, G devrait être également presque nul,
- si le plein de conservation est très grand, les moments avec et sans réassurance sont proches l'un de l'autre, et G doit être proche de 1.

Les limites $G = 0$ et $G = 1$ ne sont pas accessibles par une réassurance réaliste. Ces propriétés sont satisfaites dans le cas des trois principes de calcul de prime signalés ci-dessus.

Quel est le comportement de G entre les deux extrêmes $G = 0$ et $G = 1$? Pour des raisons assez semblables à celles que l'on invoque lorsque l'on cherche à connaître les propriétés d'une fonction d'utilité, il semble que l'on peut avancer la propriété suivante liant le facteur de réduction G et l'écart-type:

- si, partant d'un plein α , une première augmentation du plein entraîne une certaine augmentation de l'écart-type du portefeuille pour propre compte et si une seconde augmentation du plein entraîne une seconde augmentation de même importance de l'écart-type que la première fois, la seconde augmentation est, pour la compagnie cédante, plus dangereuse que la première; la seconde augmentation doit donc être "honorée" plus fortement que la première. Ainsi la fonction G devrait être, relativement à l'écart-type, croissante et de concavité positive:



Les fonctions G découlant des principes de l'écart-type et de la variance satisfont à ces exigences; la première, linéaire, correspond au signe d'égalité de la seconde exigence (6); elle est un cas limite.

5 Taux de la marge de sécurité

L'importance des marges de sécurité introduites dans les primes stop-loss crée étonnements chez certains: pourquoi ne pas s'en tenir aux marges "usuelles" de 10 à 20%? La réponse est simple: la réassurance stop-loss réduit les charges moyennes et les fluctuations annuelles selon des règles d'essence différente. Il faut donc respecter ces essences différentes.

Le taux de la marge du portefeuille pour propre compte (voir (1) et (2))

$$\frac{Q'}{E'} = \frac{G \cdot Q}{F_2(\alpha) \cdot E} = \frac{G}{F_2} \cdot \frac{Q}{E} \quad (7)$$

s'obtient à partir du taux $Q : E$ du portefeuille complet par multiplication par le facteur $G : F_2$, qui, ordinairement, est inférieur à l'unité. Le taux de la marge de la prime de réassurance

$$\frac{Q''}{E''} = \frac{(1 - G) \cdot Q}{(1 - F_2) \cdot E} = \frac{1 - G}{1 - F_2} \cdot \frac{Q}{E} \quad (8)$$

sera ainsi ordinairement supérieur à celui de la prime du portefeuille complet. Il n'y a pas là place à l'étonnement. Tout dépend de la valeur du rapport

$$\frac{1 - G}{1 - F_2}$$

Des exemples numériques suivent.

Une forme de réassurance stop-loss particulière montre que le facteur

$$\frac{1 - G}{1 - F_2}$$

peut devenir infiniment grand. Imaginons une couverture stop-loss absorbant non seulement les excédents des charges d'assurance, mais également les excédents des bénéfices (réassurance bi-stop-loss). Il est possible de fixer les pleins supérieur et inférieur de façon à ce que l'espérance mathématique de la charge du réassureur soit nulle. Dans ce cas

$$E'' = 0$$

la fluctuation σ'' n'étant pas nulle, la prime se réduit à

$$P'' = Q''$$

Cette situation, non pratiquée il est vrai, fournit un taux de marge infini.

Les considérations menées ci-dessus dans le cas d'une réassurance stop-loss s'étendent évidemment aux autres formes de réassurance non-proportionnelles qui, ordinairement, réduisent plus fortement les fluctuations que les charges moyennes du portefeuille de la cédante. La réduction différenciée des charges annuelles moyennes et des fluctuations entraîne, et cela de façon particulièrement prononcée dans le cas d'une réassurance stop-loss, un taux de marge de sécurité de la prime de réassurance augmenté et un taux de marge de sécurité de la prime du portefeuille pour propre compte réduit par rapport au taux de la marge de sécurité de la prime du portefeuille complet sans réassurance.

Le taux élevé de la marge de sécurité comprise dans la prime stop-loss ne réduit d'ailleurs que peu le taux de la marge du portefeuille pour propre compte de la cédante (voir les exemples ci-après).

Nous rappelons ici que la marge de sécurité dont il est question dans cette étude est celle qui doit indemniser les assureurs et réassureurs du risque de fluctuation et de déséquilibre. Les marges de sécurité ayant d'autres buts (bénéfice commercial ou couverture des frais de gestion) se répartissent évidemment selon d'autres critères entre compagnie cédante et réassureur.

6 Exemple numérique

Un exemple simple permet de se faire une idée de l'importance numérique des marges des primes stop-loss, telles que définies ci-dessus.

Le portefeuille a les caractéristiques suivantes:

X = variable de type gamma	(pour les charges annuelles)
$E = 100$	(moyenne des charges annuelles)
$V = 100$	(écart-type = 10% de E)
$Q = 5$	(marge de sécurité)
$P = E + Q = 105$	(prime du portefeuille).

La marge de 5 (5% de la charge annuelle moyenne) couvre exclusivement le risque de fluctuation. Il s'agit d'une marge plutôt faible. La prime P de 105 s'obtient selon les 3 principes de calcul des primes retenus par les formules:

principe de l'écart-type	$P = E + 0,5 \cdot \sigma$
principe de la variance	$P = E + 0,05 \cdot \sigma^2$
principe de l'utilité exponentielle constante	$P = \frac{1}{9,37} \ln E(e^{9,37 \cdot X})$

Le partage des charges annuelles moyennes

$$E = E' + E''$$

et des marges de sécurité

$$Q = Q' + Q''$$

ainsi que les taux des marges de sécurité des primes stop-loss

$$\frac{Q''}{E''}$$

sont indiqués, pour divers pleins de conservation α , dans le tableau ci-après.

Plein de conservation α	Partage de la charge annuelle moyenne	Partage de la marge de sécurité	Taux de la marge de sécurité	
	(formule 1) $E' + E'' = 100$	$Q' + Q'' = 5$	Q'/E'	Q''/E''
<u>Principe de l'écart-type</u>		(formule 3)		
100	$96,01 + 3,99 = 100$	$2,80 + 2,20 = 5$	2,92%	55%
110	$99,09 + 0,91 = 100$	$4,23 + 0,77 = 5$	4,27%	85%
120	$99,88 + 0,12 = 100$	$4,85 + 0,15 = 5$	4,86%	125%
<u>Principe de la variance</u>		(formule 4)		
100	$96,01 + 3,99 = 100$	$1,57 + 3,43 = 5$	1,64%	86%
110	$99,09 + 0,91 = 100$	$3,59 + 1,41 = 5$	3,62%	155%
120	$99,88 + 0,12 = 100$	$4,70 + 0,30 = 5$	4,71%	250%
<u>Principe de l'utilité exponentielle</u>		(formule 5)		
100	$96,01 + 3,99 = 100$	$1,15 + 3,85 = 5$	1,20%	96%
110	$99,09 + 0,91 = 100$	$2,90 + 2,10 = 5$	2,93%	230%
120	$99,88 + 0,12 = 100$	$4,30 + 0,70 = 5$	4,31%	580%

Considérons par exemple le principe de la variance et un plein de 110 (1 écart-type au-dessus de la moyenne 100).

La charge moyenne du réassureur $E'' = 0,91$ n'atteint juste pas 1% de la charge totale, la marge revenant au réassureur $Q'' = 1,41$ se monte à 28% de la marge totale. Le taux de la marge de sécurité du réassureur est de 155%, laissant tout de même une marge de 3,62 à la compagnie cédante. Un plein de 2 écarts-type au-dessus de la moyenne (soit de 120) conduit à un taux de marge de 250%.

Comme il fallait s'y attendre, le principe de l'écart-type (partie supérieure du tableau) laisse des marges plus fortes à la compagnie cédante que le principe de la variance. Le principe de l'utilité exponentielle (partie inférieure du tableau) favorise le réassureur: un plein de 2 écarts-type au-dessus de la moyenne conduit à une prime de réassurance comprenant une marge de sécurité de 580%. Il laisse tout de même une marge à la compagnie cédante de 4,31%.

Un taux de marge de sécurité supérieur à 5% (dans la prime du portefeuille complet) aurait conduit à des taux de marge pour le réassureur encore supérieurs.

Professeur Marc-Henri Amsler
Université/Ecole des H.E.C.
CH-1015 Lausanne

Résumé

L'étude cherche à expliquer pourquoi les primes stop-loss comportent ordinairement de fortes marges de sécurité. Une raison réside dans le fait que la réassurance stop-loss n'absorbe la charge annuelle des sinistres que très faiblement en moyenne, mais considérablement en ce qui concerne les fluctuations. Les fluctuations étant honorées par la marge de sécurité, le réassureur peut prétendre à en acquérir une grande part. Des exemples numériques montrent l'ampleur des marges comprises dans certaines primes de réassurance stop-loss.

Zusammenfassung

In der Arbeit wird gezeigt, weshalb Stop-Loss-Prämien gewöhnlich einen hohen Sicherheitszuschlag enthalten. Ein Grund dafür liegt in der Tatsache, daß die Stop-Loss-Rückversicherung viel empfindlicher auf Schadenschwankungen reagiert als auf die durchschnittliche Schadenbelastung. Demnach soll die Rückversicherung auch einen entsprechend hohen Anteil am Sicherheitszuschlag tragen. Numerische Beispiele zeigen den Umfang dieser Margen für gewisse Stop-Loss-Prämien.

Summary

The article attempts to explain why stop loss premiums usually contain heavy security loadings. One reason for this is that the stop loss reinsurance absorbs very little of the annual loss burden in terms of the mean, but very much in terms of the variance. As the fluctuations are compensated precisely by the security loading, the reinsurer has the right to claim a major part of it. Some numerical examples demonstrate the size order of loadings contained in certain stop loss premiums.

