Parameterschätzung im hierarchischen Credibility-Modell nach B. Sundt

KLAUS-PETER MANGOLD, München

Parameterschätzung im hierarchischen Credibility-Modell nach B. Sundt[1]

Im zweistufigen hierarchischen Modell geht es darum, die Grössen M, F, G, H, die im dreistufigen Modell von *Bühlmann/Jewell* [1] noch vom Parameter ψ_l abhängen und $M(\psi_l)$, $F(\psi_l)$, $G(\psi_l)$, $H(\psi_l)$ heissen, zu schätzen.
Für die Darstellung hier erscheint mir eine etwas ausführlichere Bezeichnungsweise nützlich.
Es liegen s Kohorten vor. Zu jeder Kohorte k gehören N_k Risiken und für jedes Risiko j der Kohorte k wurden n_{jk} Beobachtungen X_{ijk} gemacht, die jeweils mit einer Gewichtung p_{ijk} versehen sind. Summationen über einen bestimmten Index werden durch einen an entsprechender Stelle stehenden Punkt gekennzeichnet, also z.B.

$$p_{\cdot jk} := \sum_{i=1}^{n_{jk}} p_{ijk} \qquad (=: V_{jk}^{(1)})$$

Es bezeichnet

$$Y_{jk} := \frac{1}{p_{\cdot jk}} \sum_{i=1}^{n_{jk}} p_{ijk} X_{ijk} \qquad \text{das Risikomittel}$$

$$Y_k := \frac{1}{p_{\cdot\cdot k}} \sum_{j=1}^{N_k} p_{\cdot jk} Y_{jk} \qquad \text{das Kohortenmittel}$$

$z_{jk}^{(1)}$: = den Credibility-Faktor von Risiko j in Kohorte k,

$z_k^{(2)}$: = den Credibility-Faktor der Kohorte k,

$$B(\varphi_k) := \frac{1}{z_{\cdot k}^{(1)}} \sum_{j=1}^{N_k} z_{jk}^{(1)} Y_{jk} \qquad \text{das Credibility-gewichtete Kohortenmittel}$$

[1] *B. Sundt*, Some Credibility Regression Models for the Classification of Individual Passenger Car Models, Kap. 4.3, S. 39 ff., ASTIN-Kolloquium, Tel Aviv, 1986.

und

$$B(\varphi) := \frac{1}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} \sum_{k=1}^{s} z_{\cdot k}^{(1)} B(\varphi_k).$$

Man sollte nun zwei Fälle unterscheiden:
Neben den üblichen Voraussetzungen der bedingten Unabhängigkeit und (in oberen Niveaus) auch Gleichverteiltheit gelte

$$\text{I)} \quad \operatorname{Var}(X_{ijk} | \vartheta_{jk}) = \frac{\sigma^2(\vartheta_{jk})}{p_{ijk}}$$

oder

$$\text{II)} \quad \operatorname{Var}(X_{ijk} | \vartheta_{jk}) = \sigma^2(\vartheta_{jk})$$

Für $p_{ijk} = 1$ decken sich beide Fälle. Dann ist $n_{jk} = p_{\cdot jk}$. *Sundt* setzt Fall I voraus und gibt folgende Schätzer an:

$$F^* = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{1}{n_{jk} - 1} \sum_{i=1}^{n_{jk}} p_{ijk} (X_{ijk} - Y_{jk})^2 \right)$$

$$G^* = \frac{1}{p_{\cdots}} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{N_k} p_{\cdot jk}^2 \Big/ p_{\cdot\cdot k}^2} \left(\sum_{j=1}^{N_k} p_{\cdot jk} (Y_{jk} - Y_k)^2 - (N_k - 1) F^* \right) \right)$$

$$H^* = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{s} (z_{\cdot k}^{(1)})^2 \Big/ (z_{\cdot\cdot}^{(1)})^2} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{z_{\cdot k}^{(1)}}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} (B(\varphi_k) - B(\varphi))^2 - (s-1) \frac{G^*}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} \right)$$

$$M^* = \frac{1}{z_{\cdot}^{(2)}} \sum_{k=1}^{s} z_k^{(2)} B(\varphi_k)$$

Auf den Fall mit $n_{ijk} := p_{ijk} = 1$ aus [1] umgeschrieben:

$$F^* = \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{1}{1 - n_{jk}/n_{jk}^2} \left(\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{1}{n_{jk}} (X_{ijk} - Y_{jk})^2 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{1}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n_{jk}} n_{ijk}^2 \Big/ n_{jk}^2} \left(\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{n_{ijk}}{n_{jk}} (X_{ijk} - Y_{jk})^2 \right) \right)$$

$$G^* = \sum_{k=1}^{s} \frac{n_{\cdot k}}{n_{\cdot\cdot}} \left(\frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{N_k} n_{jk}^2 \Big/ n_{\cdot k}^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{N_k} \frac{n_{jk}}{n_{\cdot k}} (Y_{jk} - Y_k)^2 - (N_k - 1) \frac{F^*}{n_{\cdot k}} \right)$$

$$H^* = \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{s} (z_{\cdot k}^{(1)})^2 \Big/ (z_{\cdot\cdot}^{(1)})^2} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{z_{\cdot k}^{(1)}}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} (B(\varphi_k) - B(\varphi))^2 - (s-1) \frac{G^*}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} \right)$$

und M^* wie oben.

Dass bei *Sundt* der Schätzer F^* im Aufbau etwas "aus der Reihe tanzt", liegt an der speziellen Voraussetzung I). Liegt Fall II) vor, so kann man leicht einen gleichartigen Aufbau der einzelnen Schätzer erkennen. Sofern ich die von *Sundt* nicht explizit motivierte Herleitung richtig nachvollzogen habe, beruhen die Schätzer auf folgendem "Bildungsgesetz":
Man geht jeweils von den beobachteten Varianzen auf den einzelnen Niveaus aus. Also

für F: $\sum\limits_{i=1}^{n_{jk}} \frac{p_{ijk}}{p_{\cdot jk}} (X_{ijk} - Y_{jk})^2$ für $k = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, N_k$

für G: $\sum\limits_{j=1}^{N_k} \frac{p_{\cdot jk}}{p_{\cdot\cdot k}} (Y_{jk} - Y_k)^2$ für $k = 1, \ldots, s$

für H: $\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{z_{\cdot k}^{(1)}}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} (B(\varphi_k) - B(\varphi))^2$

Von diesen Grössen errechnet man den Erwartungswert und formt dann so um, dass man erwartungstreue Statistiken erhält. Die so erhaltenen Werte werden über alle darüber liegenden Niveaus gemittelt.
Allerdings ist mir nicht einleuchtend, wieso *Sundt* einmal (bei F^*) gewöhnlich mittelt, während er das andere Mal (bei G^*) gewichtet gemittelt hat. (Also einmal mit Gewicht $1/N_k$, das andere Mal mit $p_{..k}/p_{...}$.) Wie üblich begegnet man der Möglichkeit, dass $G^* < 0$ und/oder $H^* < 0$, indem man $\max(G^*, 0)$ bzw. $\max(H^*, 0)$ ansetzt.
Entsprechend dieser Vorgehensweise ergäbe sich demnach für das dreistufige Modell aus [1] mit c Gesellschaften l (der Index l bezeichnet die jeweilige Gesellschaft):
Oben aufgeführte Schätzer $F^*{}_l$, $G^*{}_l$, $H^*{}_l$ werden über ein weiteres Niveau (gewichtet oder ungewichtet?) gemittelt. Zur Schätzung von I setzt man an:

$$T := \sum_{l=1}^{c} \frac{z_{\cdot l}^{(2)}}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} (B(\psi_l) - B(\psi))^2$$

$$B(\psi_l) := \frac{1}{z_{\cdot l}^{(2)}} \sum_{k=1}^{s_l} z_{kl}^{(2)} B(\varphi_{kl})$$

$$B(\psi) := \frac{1}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} \sum_{l=1}^{c} z_{\cdot l}^{(2)} B(\psi_l)$$

Daraus leitet sich ab:

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} \left(\sum_{l=1}^{c} z_{\cdot l}^{(2)} \operatorname{Var}(B(\psi_l)) - z_{\cdot\cdot}^{(2)} \operatorname{Var}(B(\psi)) \right) \\ &= \frac{1}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{c} z_{\cdot l}^{(2)} \left(\frac{H}{z_{\cdot l}^{(2)}} + I \right) - z_{\cdot\cdot}^{(2)} \left(\frac{H}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} + \frac{\sum_{l=1}^{c} (z_{\cdot l}^{(2)})^2}{(z_{\cdot\cdot}^{(2)})^2} I \right) \right) \\ &= \frac{1}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} (c-1) \cdot H + \left(1 - \frac{\sum_{l=1}^{c} (z_{\cdot l}^{(2)})^2}{(z_{\cdot\cdot}^{(2)})^2} \right) \cdot I \end{aligned}$$

Man erhält also

$$I^* = \frac{1}{1 - \sum\limits_{l=1}^{c} (z_{\cdot l}^{(2)})^2 \Big/ (z_{\cdot\cdot}^{(2)})^2} \left(\sum_{l=1}^{c} \frac{z_{\cdot l}^{(2)}}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} (B(\psi_l) - B(\psi))^2 - (c-1) \frac{H^*}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} \right)$$

und wohl

$$M^* = \frac{1}{z_{\cdot}^{(3)}} \cdot \sum_{l=1}^{c} z_l^{(3)} B(\psi_l)$$

Der Berechnungsablauf bei einem dreistufigen hierarchischen Modell sieht demnach folgendermassen aus:

1. Errechne F^*
2. Errechne G^*
3. Errechne $z_{jkl}^{(1)}$ für $l = 1, \ldots, c;\ k = 1, \ldots, s_l;\ j = 1, \ldots, N_{kl}$
4. Errechne H^*
5. Errechne $z_{kl}^{(2)}$ für $l = 1, \ldots, c;\ k = 1, \ldots, s_l$
6. Errechne I^*
7. Errechne $z_l^{(3)}$ für $l = 1, \ldots, c$
8. Errechne M^*
9. Errechne $\widehat{M(\psi_l)}$ für $l = 1, \ldots, c$
10. Errechne $\widehat{M(\varphi_{kl})}$ für $l = 1, \ldots, c;\ k = 1, \ldots, s_l$
11. Errechne $\widehat{\mu(\vartheta_{jkl})}$ für $l = 1, \ldots, c;\ k = 1, \ldots, s_l;\ j = 1, \ldots, N_{kl}$

Klaus-Peter Mangold
Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft
Königinstrasse 107
Postfach 40 13 20
D-8000 München 40

Literatur

[1] *Bühlmann, H./Jewell, W.S.*, Hierarchical Credibility Revisited, MVSVM, Heft 1, 1987.