Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1989)

Heft: 2

Artikel: Poissonmodelle versus Pascalmodelle oder die unheimliche Vielfalt der negativen Binominalverteilung

Autor: Straub, Erwin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967220

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ERWIN STRAUB, Zürich

Poissonmodelle versus Pascalmodelle oder Die unheimliche Vielfalt der negativen Binomialverteilung

1. Vorbemerkung

Auf den ersten Blick möchte man gerne glauben, dass die Literatur der Nichtlebenmathematik praktisch ausschliesslich auf der Poissonannahme beruht. Aber ganz so einfach liegen die Dinge doch nicht, denn es sind, und zwar zum Teil schon sehr früh, bedeutende "Non-Poisson"-Arbeiten erschienen, die einen nachhaltigen Einfluss auf die spätere aktuarielle Wissenschaft hatten: Das Ansteckungsmodell von *Pólya/Eggenberger* [1], die schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten von *Hans Ammeter* [2] und *Fritz Bichsels* technische Grundlagen der Motorfahrzeughaftpflichtversicherung [3]. Alle diese drei Arbeiten haben bekanntlich mit der negativen Binomial- oder, wie sie, mindestens für ganzzahlige Parameter, manchmal auch genannt wird, der Pascalverteilung zu tun.

Die vorliegende Arbeit ist gedacht als eine Art Anstiftung zum vermehrten Gebrauch der Pascal- anstelle der Poissonverteilung, und um diese Anstiftung glaubwürdig zu machen, wurde versucht nachzuweisen, dass praktisch jeder guten Eigenschaft der Poissonverteilung eine ebenbürtige, wenn nicht bessere Eigenschaft der negativen Binomialverteilung entspricht. Aber wie zu erwarten, ist ein solcher Nachweis nicht vollständig zu erbringen, die Poissonverteilung hat eben – und dies ganz besonders in praktischer Hinsicht – zwei, drei unüberbietbare Qualitäten. Dafür kann die Pascalverteilung wieder andere Dinge ... die beiden sollen jedoch nicht gegeneinander ausgespielt, es soll vielmehr auf ihre Komplementarität und die Zusammenhänge zwischen den beiden hingewiesen werden.

Obwohl die folgenden Darlegungen keineswegs neuartig sind (siehe insbesondere [4]), wurden nur wenig Literaturangaben gemacht und einige bekannte Resultate wiedergegeben, damit das Ganze ohne zusätzliche Lektüre auch für solche Leser einigermassen nachvollziehbar bleibt, die sich nicht tagtäglich mit diesen Dingen befassen. Im übrigen verdanke ich meinen Kollegen A. Bloch, A. Dubey und H. U. Gerber manche wertvolle Anregung, die sie mir in mehreren "Fusionsgesprächen" gegeben haben.

2. Schlicht und einfach oder zu primitiv?

Für Poisson-verteiltes K gilt bekanntlich

$$E[K] = \mathrm{Var}[K] = \alpha_3[K] = \lambda \qquad \text{mit} \quad \alpha_3[K] := E[(K - E[K])^3]$$

Wer das nicht glaubt oder wieder einmal selber nachvollziehen möchte, der berechne die drei ersten Ableitungen von

$$\varphi_K(\tau) := \ln E[e^{\tau K}] = \ln \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\tau k} = \lambda(e^{\tau} - 1)$$

und betrachte dieselbigen an der Stelle $\tau = 0$. (PS: ": = " steht für "per definitionem gleich")
Nun ist diese Poissoneigenschaft, dass Erwartungswert und erste zwei Zentralmomente alle gleich sind, zum einen sehr handlich und zum anderen aber vielfach eine unrealistische Modellannahme. Insbesondere in der Rückversicherung kann die Stichprobenvarianz der Schadenanzahl wesentlich grösser ausfallen als das Stichprobenmittel, so dass sich die negative Binomialverteilung eher anbietet, denn für diese gilt

$$p_k = \mathrm{Prob}\,[K = k] := \binom{\alpha + k - 1}{k} (1 - p)^{\alpha} p^k$$

also

$$\varphi_K(\tau) = \alpha \ln \frac{1 - p}{1 - pe^{\tau}}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\varphi'(\tau) &= \alpha \frac{pe^{\tau}}{1 - pe^{\tau}} && \text{also} \quad E[K] = \alpha \frac{p}{1 - p}, \\
\varphi''(\tau) &= \alpha \frac{pe^{\tau}}{(1 - pe^{\tau})^2} && \text{also} \quad \mathrm{Var}[K] = \alpha \frac{p}{(1 - p)^2} \quad \text{und} \\
\varphi'''(\tau) &= \alpha \frac{pe^{\tau}(1 + pe^{\tau})}{(1 - pe^{\tau})^3} && \text{somit} \quad \alpha_3[K] = \alpha \frac{p(1 + p)}{(1 - p)^3}
\end{aligned}$$

das heisst $E[K] < \mathrm{Var}[K] < \alpha_3[K]$ wegen $0 < p < 1$.
Fazit: Wenn immer in der Praxis die statistische Varianz von K signifikant grösser ist als der Mittelwert, nehme man die Pascal- anstelle der Poissonverteilung – vorausgesetzt, die übrigen Umstände erlauben dies – was allerdings nicht immer der Fall ist, wie wir später noch sehen werden.

3. Verteilung der Anzahl der Exzesschäden

Sei K die Anzahl der Bruttoschäden und $p_k = \text{Prob}[K = k]$ sowie $\check{K}$ die Anzahl derjenigen Schäden, deren Betrag eine vorgegebene Priorität r übersteigt, dann ist

$$\text{Prob}[\check{K} = h \mid K = k] = \binom{k}{h}(1 - V(r))^h V(r)^{k-h}$$

worin $V(x) = \text{Prob}[X \leq x]$ die Verteilung des Einzelschadenbetrages.
Somit

$$\text{Prob}[\check{K} = h] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \binom{k}{h}(1 - V(r))^h V(r)^{k-h}$$

und

$$\varphi_{\check{K}}(\tau) = \ln E[e^{\tau \check{K}}] = \ln \sum_k p_k \sum_{h=0}^{k} e^{\tau h} \binom{k}{h}(1 - V(r))^h V(r)^{k-h}$$

Also

$$\varphi_{\check{K}}(\tau) = \ln \sum_{k=0}^{\infty} p_k \Phi_B^k(\tau)$$

worin $\Phi_B(\tau)$ die Momentenerzeugende einer Bernoulli-Variablen B mit $\text{Prob}[B = 0] = V(r)$ und $\text{Prob}[B = 1] = 1 - V(r)$, so dass wegen $\ln \Phi_B(\tau) = \varphi_B(\tau)$ auch für die logmomentenerzeugende Funktion der Exzessschäden eine Ineinanderschachtelung gilt, nämlich

$$\varphi_{\check{K}}(\tau) = \varphi_K(\varphi_B(\tau))$$

wie sie uns vom Gesamtschaden her vertraut ist.
Ist nun die Anzahl K der Bruttoschäden Poisson-verteilt, so verifiziert man mit eben dieser Identität leicht, dass dasselbe auch für die Anzahl $\check{K}$ der Exzessschäden (über einer beliebigen Priorität r) gilt:
Ist nämlich K Poisson, also $\varphi_K(\tau) = \lambda(e^\tau - 1)$ und

$$\varphi_B(\tau) = \ln(1 + (1 - V(r)) \cdot (e^\tau - 1))$$

so folgt

$$\begin{aligned}\varphi_{\check{K}}(\tau) &= \lambda(1 + (1 - V(r)) \cdot (e^{\tau} - 1) - 1) \\ &= \lambda(1 - V(r)) \cdot (e^{\tau} - 1)\end{aligned}$$

was wieder einer Poissonverteilung entspricht, jetzt aber mit Parameter $\check{\lambda} = \lambda(1 - V(r))$.
Ist andererseits K negativ binomial verteilt, also

$$\varphi_K(\tau) = \alpha \ln \frac{1-p}{1-pe^{\tau}}$$

dann wird

$$\varphi_{\check{K}}(\tau) = \varphi_K(\varphi_B(\tau))$$

zu

$$\alpha \ln \frac{1-p}{1-p(1+(1-V(r)) \cdot (e^{\tau}-1))}$$

oder

$$\varphi_{\check{K}}(\tau) = \alpha \ln \frac{1-p}{1-pV(r)-p(1-V(r))e^{\tau}} = \alpha \ln \frac{1-\check{p}}{1-\check{p}e^{\tau}}$$

mit

$$\check{p} = p \cdot \frac{1-V(r)}{1-pV(r)}$$

also wieder eine negative Binomialverteilung.
Zugegeben ist die Interpretation des neuen Paramters bei Poisson einfacher als bei Pascal: Bei der ersten erhält man $\check{\lambda}$ durch Multiplikation des alten Parameters λ mit der Überschreitungswahrscheinlichkeit $1 - V(r)$. Das ist sofort einleuchtend. Aber wie soll man sich die Transformation

$$p \longrightarrow \check{p} = p\frac{1-V(r)}{1-pV(r)}$$

bei der negativen Binomialverteilung erklären? (Die mathematisch zwingende, aber nicht direkt einleuchtende Erklärung ist diese: aus

$$E[\check{K}] = E[K](1-V(r)) = \alpha\frac{p}{1-p}(1-V(r)) = \alpha\frac{\check{p}}{1-\check{p}}$$

folgt obiger Wert für $\check{p}$).

Im übrigen sind auch bei der gewöhnlichen Binomialverteilung die Exzessschäden wieder binomial verteilt: Sei

$$p_k = \binom{N}{k} q^{N-k} p^k, \qquad \varphi_K(\tau) = N \ln(q + pe^\tau),$$

$$\varphi'_K(\tau) = N \frac{pe^\tau}{q + pe^\tau},$$

$$\varphi''_K(\tau) = N \frac{pqe^\tau}{(q + pe^\tau)^2},$$

$$\varphi'''_K(\tau) = N \frac{pqe^\tau (q - pe^\tau)}{(q + pe^\tau)^e}$$

mit $q = 1 - p$ und $E[K] > \mathrm{Var}[K] > \alpha_3[K]$.
Dann ergibt sich

$$\varphi_{\check{K}}(\tau) = N \ln \Big(q + p(V(r) + (1 - V(r)\Big) e^\tau) = N \ln(\check{q} + \check{p}e^\tau)$$

mit $\check{p} = p(1 - V(r))$ und $\check{q} = 1 - \check{p}$.

4. Fusion zusammengesetzter Poisson- und Pascalverteilungen

Angenommen, zwei Versicherungsbestände lassen sich in der üblichen Art je durch einen zusammengesetzten Poissonprozess modellieren, also wenn die Zufallsvariablen

K_j	die Schadenzahl,	
$X^{(j)}$	den Einzelschadenbetrag und	des Portefeuilles no. j
Z_j	den Gesamtschaden	

für $j = 1, 2$ bezeichnen, dann sei

$$\mathrm{Prob}\,[K_j = k] = \frac{\lambda_j^k}{k!} e^{-\lambda_j} \quad \text{Poisson,}$$

$$\mathrm{Prob}\,[X^{(j)} \leq x] = V_j(x) \quad \text{beliebig}$$

und man erhält wegen $\varphi_Z(\tau) = \varphi_K(\varphi_X(\tau))$ und der obigen Poissonannahme

$$\varphi_{Z_j}(\tau) = \varphi_{K_j}(\varphi_{X^{(j)}}(\tau)) = \lambda_j \left(e^{\varphi_{X^{(j)}}(\tau)} - 1 \right) = \lambda_j (\phi_j(\tau) - 1)$$

worin $\phi_j(\tau) := E[e^{\tau X^{(j)}}]$ die Momentenerzeugende von $X^{(j)}$. Sind die beiden Portefeuilles unabhängig, so gilt für die Zusammenlegung $Z = Z_1 + Z_2$ einfach

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\tau) &= \varphi_{Z_1}(\tau) + \varphi_{Z_2}(\tau) = \lambda_1(\phi_1(\tau) - 1) + \lambda_2(\phi_2(\tau) - 1)\\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\phi_1(\tau) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\phi_2(\tau) - 1\right)\end{aligned}$$

was wieder die Logmomentenerzeugende einer zusammengesetzten Poissonverteilung ist, und zwar mit

- Poissonparameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
  = Summe der Poissonparameter der Teilportefeuilles
- Einzelschadenverteilung $V(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} V_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} V_2(x)$
  = Mischung der Verteilungen von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$.

Das ist natürlich eine sehr schöne und äusserst praktische – manchmal sogar die ausschlaggebende – Eigenschaft, und es steht zu befürchten, dass die Pascal- und die Binomialverteilung da nicht mehr mithalten können.
Trotzdem scheint die Fusion zweier unabhängiger zusammengesetzter Pascalprozesse (mit demselben Parameter p) mindestens prima vista wieder ein zusammengesetzter Pascalprozess zu sein.
Sei nämlich $\text{Prob}\,[K_j = k] = \binom{\alpha_j + k - 1}{k}(1-p)^{\alpha_j} p^k$ und $\text{Prob}\,[X^{(j)} \le x] = V_j(x)$ beliebig wie oben, also $\varphi_{K_j}(\tau) = \alpha_j \ln \frac{1-p}{1-pe^\tau}$, das heisst nun

$$\varphi_{Z_j(\tau)} = \varphi_{K_j}(\varphi_{X^{(j)}}(\tau)) = \alpha_j \ln \frac{1-p}{1-p\phi_j(\tau)}$$

so folgt für unabhängige Z_1, Z_2

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\tau) &= \alpha_1 \ln \frac{1-p}{1-p\phi_1(\tau)} + \alpha_2 \ln \frac{1-p}{1-p\phi_2(\tau)}\\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) \ln \frac{1-p}{1-p\phi(\tau)}\end{aligned}$$

mit

$$1 - p\phi(\tau) := (1 - p\phi_1(\tau))^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot (1 - p\phi_2(\tau))^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

Es ist also $1 - p\phi(\tau)$ per definitionem ein gewichtetes geometrisches Mittel der Funktionen $1 - p\phi_1(\tau)$ und $1 - p\phi_2(\tau)$ anstelle des obigen gewichteten

arithmetischen Mittels der Verteilungen $V_1(x)$ und $V_2(x)$ – wobei der exakte Beweis dafür, dass die so definierte Funktion $\phi(\tau)$ tatsächlich eine Momentenerzeugende ist, allerdings noch zu erbringen wäre.
Man befindet sich im übrigen hiermit unverhofft auf dem Gebiet der elementaren Mittelwerte, welches seinerzeit von den beiden "Altmeistern" *Jecklin* und *Eisenring* [5] beschrieben wurde!
Statt einen solchen Beweis anzutreten zu versuchen, kann man auch folgende Beobachtung machen:
Seien wieder K_j die Schadenanzahl und $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}, \ldots$ die Einzelschadenbeträge des Portefeuilles no. j, $j = 1, 2$, wobei

$$\text{Prob}\,[K_j = k] = p_k^{(j)}$$

und

$$X_k^{(j)} \quad \text{i.i.d. mit Prob}\,[X^{(j)} \leq x] = V_j(x)$$

und somit

$$\varphi_{Z_j}(\tau) = \varphi_{K_j}(\varphi_{X^{(j)}}(\tau)).$$

Für die Fusion der beiden als unabhängig vorausgesetzten Portefeuilles gilt

$$K = K_1 + K_2 \quad \text{und} \quad Z = Z_1 + Z_2$$

mit

$$Z = \sum_{k=1}^{K} X_k \quad \text{wobei} \quad X_k \quad \text{i.i.d.}$$

(also paarweise unabhängig und nach dem selben Gesetz verteilt) gemäss einer Verteilung $\text{Prob}\,[X \leq x] = V(x)$, die von Fall zu Fall (das heisst in Abhängigkeit der $p_k^{(j)}$) zu bestimmen ist. Allerdings wurde der Sachverhalt "X_k = i.i.d." bis anhin nur für den Poissenfall konkret nachgewiesen!
Offensichtlich ist allgemein $X = Z \mid K = 1$ also

$$V(x) = \frac{p_1^{(1)} p_0^{(2)} V_1(x) + p_0^{(1)} p_1^{(2)} V_2(x)}{p_1^{(1)} p_0^{(2)} + p_0^{(1)} p_1^{(2)}}$$

nach der Bayes'schen Regel und ebenso für die Momentenerzeugende $\phi = \phi_{Z \mid K=1}$

$$\phi(\tau) = \frac{p_1^{(1)} p_0^{(2)} \phi_1(\tau) + p_0^{(1)} p_1^{(2)} \phi_2(\tau)}{p_1^{(1)} p_0^{(2)} + p_0^{(1)} p_1^{(2)}}$$

Es interessieren uns die folgenden drei parametrischen Fälle:

A) *Poisson* i.e. $p_k^{(j)} = \frac{\lambda_j^k}{k!} e^{-\lambda_j}$

B) *Binomial** i.e. $p_k^{(j)} = \binom{N_j}{k} p_j^k (1 - p_j)^{N_j - k}$

insbesondere wenn $p_1 = p_2 = p$

C) *Pascal* i.e. $p_k^{(j)} = \binom{\alpha_j + k - 1}{k} (1 - p_j)^{\alpha_j} \cdot p_j^k$

insbesondere wenn $p_1 = p_2 = p$,

und man erhält ohne grosse Überraschung und für den Fall, dass $p_1 = p_2 = p$

A) *Poisson* $\phi(\tau) = \frac{\lambda_1}{\lambda} \phi_1(\tau) + \frac{\lambda_2}{\lambda} \phi_2(\tau)$ mit $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

B) *Binomial* $\phi(\tau) = \frac{N_1}{N} \phi_1(\tau) + \frac{N_2}{N} \phi_2(\tau)$ mit $N = N_1 + N_2$

C) *Pascal* $\phi(\tau) = \frac{\alpha_1}{\alpha} \phi_1(\tau) + \frac{\alpha_2}{\alpha} \phi_2(\tau)$ mit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

für beliebige ϕ_1 und ϕ_2.

Die Überraschung kommt erst, wenn man die Summe zweier Einzelschäden aus dem Fusionsportefeuille betrachtet. Es ist allgemein wieder nach Bayes:

$$\phi_{Z \mid K=2} = \frac{p_2^{(1)} p_0^{(2)} \phi_1^2 + p_1^{(1)} p_1^{(2)} \phi_1 \phi_2 + p_0^{(1)} p_2^{(2)} \phi_2^2}{p_2^{(1)} p_0^{(2)} + p_1^{(1)} p_1^{(2)} + p_0^{(1)} p_2^{(2)}}$$

und somit für A), B) und C) letztere wenn $p_1 = p_2 = p$:

* Im folgenden sind für den Fall B) die Resultate jeweils ohne Beweis angegeben.

A) *Poisson*

$$\phi_{X_1+X_2}(\tau) = \frac{\frac{\lambda_1^2}{2}\phi_1^2 + \lambda_1\lambda_2\phi_1\phi_2 + \frac{\lambda_2^2}{2}\phi_2^2}{\frac{\lambda_1^2}{2} + \lambda_1\lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{2}} = \phi^2(\tau)$$

wie nicht anders erwartet.
B) *Binomial*

$$\phi_{X_1+X_2}(\tau) = \phi^2 - \frac{N_1N_2}{N^2(N-1)}(\phi_1 - \phi_2)^2 \qquad \text{mit} \quad N = N_1 + N_2$$

C) *Pascal*

$$\begin{aligned}
\phi_{X_1+X_2}(\tau) &= \frac{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}\phi_1^2 + \alpha_1\alpha_2\phi_1\phi_2 + \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}\phi_2^2}{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} + \alpha_1\alpha_2 + \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}} \\
&= \frac{(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2)^2 + \alpha_1\phi_1^2 + \alpha_2\phi_2^2}{\alpha(\alpha+1)} \\
&= \phi^2 + \frac{\alpha\alpha_1\phi_1^2 + \alpha\alpha_2\phi_2^2 - \alpha_1^2\phi_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\phi_1\phi_2 - \alpha_2^2\phi_2^2}{\alpha^2(\alpha+1)} \\
&= \phi^2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha^2(\alpha+1)}(\phi_1 - \phi_2)^2 \qquad \text{mit} \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2
\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, dass in den Fällen B) und C) die Einzelschäden des fusionierten Portefeuilles im allgemeinen nicht mehr i.i.d. sind, denn sonst müsste ja

$$\phi_{X_1+X_2} = \phi_{Z\,|\,K=2} = \phi^2 = \phi^2_{Z\,|\,K=1}$$

gelten, was offensichtlich nicht stimmt sobald $\phi_1 \neq \phi_2$.
Als einfachstes Illustrationsbeispiel zur Aufklärung dieser "Überraschung" nehme man die Fusion zweier zusammengesetzter Bernoulli-Variablen, lies zweier Einzelrisiken mit verschieden verteiltem Schadenbetrag, also

$$\begin{aligned}
\phi_{Z_1} &= q + p\phi_1, \qquad \phi_{Z_2} = q + p\phi_2 \\
\phi_Z &= (q + p\phi_1)(q + p\phi_2) = q^2 + p(\phi_1 + \phi_2) + p^2\phi_1\phi_2 \\
&= p_0 + p_1\phi + p_2\left(\phi^2 - \frac{1}{4}(\phi_1 - \phi_2)^2\right)
\end{aligned}$$

mit

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

Ist hierin z. B. $X^{(1)}$ degeneriert verteilt bei x und $X^{(2)}$ bei y, so tritt die – in diesem Fall sogar totale – Abhängigkeit zweier Schäden X_1 und X_2 des fusionierten Portefeuilles sofort zutage: Ist nämlich $X_1 = x$ dann muss notgedrungen $X_2 = y$ sein und umgekehrt.
A propos mehr zur Abhängigkeit der Einzelschäden im fusionierten Portefeuille siehe Abschnitt 7.

5. Pascal = zusammengesetzt Poisson und/oder Gamma u. a. m.

Natürlich ist die Poissonverteilung in einem engeren Sinne stets selbst eine zusammengesetzte Poissonverteilung, man nehme nur als Einzelschaden X die bei $x = 1$ degenerierte oder eine Bernoullivariable. Die Pascalverteilung ist ihrerseits, je nachdem wie man es anschaut, zugleich auch eine in einem weiteren Sinne zusammengesetzte Poisson- und zudem eine zusammengesetzte Gammaverteilung. Obwohl auch dies in der Literatur verschiedentlich beschrieben wurde – für zusammengesetzt Poisson siehe z. B. *Kupper* [4], für zusammengesetzt Gamma *Bichsel* [3] –, hier eine kurze Skizze dieser Zusammenhänge:
Sei K Poisson- und X logarithmisch verteilt, also

$$\text{Prob}\,[X = n] = -\frac{1}{\ln(1-p)} \cdot \frac{p^n}{n} \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

bzw.

$$\varphi_X(\tau) = \ln \frac{\ln(1 - pe^\tau)}{\ln(1-p)}$$

so dass für den Gesamtschaden Z resultiert

$$\begin{aligned} \varphi_Z(\tau) = \varphi_K(\varphi_X(\tau)) &= \lambda\left(\frac{\ln(1-pe^\tau)}{\ln(1-p)} - 1\right) \\ &= \frac{\lambda}{-\ln(1-p)} \cdot (\ln(1-p) - \ln(1-pe^\tau)) \end{aligned}$$

also eine negative Binomialverteilung mit $\alpha = -\frac{\lambda}{\ln(1-p)}$ und demselben p.

Ist andererseits zur Abwechslung einmal K kontinuierlich und X diskret, und zwar

$$K \sim \text{Gamma} \qquad \text{also} \quad \varphi_K(\tau) = \gamma \ln \frac{1}{1-\mu\tau}$$

und

$$X \sim \text{Poisson} \quad \text{mit} \quad \lambda = 1 \qquad \text{also} \quad \varphi_X(\tau) = e^\tau - 1$$

und somit

$$\varphi_Z(\tau) = \gamma \ln \frac{1}{1-\mu(e^\tau - 1)} = \gamma \ln \frac{1 - \frac{\mu}{1+\mu}}{1 - \frac{\mu}{1+\mu} e^\tau}$$

also auch wieder Pascal.
Es ist eben dies die erstaunliche Vielseitigkeit der negativen Binomialverteilung, dass man mit ihrer Hilfe gleichzeitig Schadenansteckung (auf die hier allerdings nicht näher eingegangen wird), variierende Grundwahrscheinlichkeiten und Kollektivschadensituationen modellieren kann. (Viel mehr darüber findet man in [4].)
Als Faltungspotenz der geometrischen Verteilung kann man die negative Binomialverteilung überdies auch als das diskrete Pendant der Gammaverteilung auffassen.
Und schliesslich ist noch zu bemerken, dass alle drei Binomial-, Poisson- und Pascalverteilungen einer Rekursion der Form

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

genügen, was bekanntlich für die numerische Berechnung der Gesamtschadenverteilung nützlich ist.

6. Ruinwahrscheinlichkeiten

Nach *Dufresne/Gerber* [8] gehorcht die Ruinwahrscheinlichkeit für zusammengesetzt Poisson verteilte Schadenlasten einer zusammengesetzten geometrischen Verteilung, was eine spezielle zusammengesetzte Pascalverteilung ist. Dieses sehr schöne Resultat, das sich gemäss [8] schon 1974 bei *Beekman* und noch viel früher, nämlich bereits 1952 bei *Dubourdieu*, findet, dürfte auch heute noch viel zuwenig bekannt sein und noch viel weniger zur Lösung praktischer Aufgaben angewendet werden.

Was, wenn man hier die Poissonannahme fallen lässt?
Diese Frage wurde vom Jubilar selbst für den Fall negativ binomial statt Poisson verteilter Anzahl beantwortet [9]: Die zu den reinen Poissonverteilungen gehörenden Ruinwahrscheinlichkeiten sind einfach mit der Strukturfunktion – im interessierenden Fall einer Gammaverteilung – zu gewichten, um die zur gemischten Poisson (= Pascal) verteilten Anzahl gehörende Ruinwahrscheinlichkeit zu erhalten.

7. Durch Fusion induzierte Abhängigkeit der Einzelschäden

Nach Abschnitt 4 ist

$$\phi_{X_1+X_2 \mid K=2}(\tau) = \phi^2(\tau) + \gamma(\phi_1(\tau) - \phi_2(\tau))^2$$

wobei

$$\phi(\tau) = \frac{\varrho_1}{\varrho}\phi_1(\tau) + \frac{\varrho_2}{\varrho}\phi_2(\tau) = \phi_{Z \mid K=1}(\tau)$$

mit $\varrho = \lambda$ wenn Poisson, $\varrho = N$ wenn Binomial, $\varrho = \alpha$ wenn Pascal

$$\text{und } \gamma = \begin{cases} -\dfrac{N_1 N_2}{N^2(N-1)} \\ 0 \\ +\dfrac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha^2(\alpha+1)} \end{cases} \quad \text{wenn} \quad \begin{cases} \text{Binomial} \\ \text{Poisson} \\ \text{Pascal} \end{cases}$$

Damit lässt sich die Abhängigkeit zweier Schäden beschreiben unter der Bedingung, dass auf dem fusionierten Portefeuille genau zwei Schäden passieren: $|K = 2$. Die zweite Ableitung nach τ an der Stelle $\tau = 0$ enthüllt, dass

$$\operatorname{Cov}[X_1, X_2 \mid K = 2] = \gamma\left(E[X^{(1)}] - E[X^{(2)}]\right)^2$$

wobei γ = negativ wenn die Schadenanzahlen (positiv) binomial und γ = positiv wenn sie negativ binomial verteilt sind!
Eine damit entfernt verwandte Formel findet sich in [10] auf Seite 321, Beispiel 12: Eine Urne enthalte N_1 weisse und N_2 schwarze Kugeln, und es werden

sukzessive Kugeln entnommen, und zwar, ohne diese zurück in die Urne zu legen. Definiere

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{falls der } i\text{-te Zug eine weisse Kugel} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\operatorname{Cov}[X_i, X_j] = -\frac{N_1 N_2}{N^2(N-1)} \qquad \text{mit} \quad N = N_1 + N_2.$$

Wir interessieren uns im folgenden auch ein Stück weit für die Abhängigkeit zwischen zwei Schäden, gegeben dass deren mehr als zwei auf dem fusionierten Portefeuille auftreten sowie für die unbedingte gemeinsame Verteilung.
In Abschnitt 4 war wie gesagt

$$\phi(\tau)_{Z \mid K=1} = \frac{\varrho_1}{\varrho}\phi_1(\tau) + \frac{\varrho_2}{\varrho}\phi_2(\tau) \qquad \text{mit} \quad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2$$

und $\varrho_j = \lambda_j$, N_j bzw. α_j falls $k_j \sim$ Poisson, Binomial bzw. Pascal.
Betrachten wir als nächstes die gemeinsame Momentenerzeugende von X_1 und X_2 gegeben dass $K = 2$, also

$$\begin{aligned}
\phi_{(X_1,X_2) \mid K=2}(\tau_1, \tau_2) &:= E\left[e^{\tau_1 X_1 + \tau_2 X_2} \mid K = 2\right] \\
&= \frac{1}{p_2}\Big[p_2^{(1)} p_0^{(2)} \phi_1(\tau_1)\phi_1(\tau_2) \\
&\qquad + p_1^{(1)} p_1^{(2)} \frac{1}{2}\Big(\phi_1(\tau_1)\phi_2(\tau_2) + \phi_2(\tau_1)\phi_1(\tau_2)\Big) \\
&\qquad + p_0^{(1)} p_2^{(2)} \phi_2(\tau_1)\phi_2(\tau_2)\Big]
\end{aligned}$$

mit $p_2 = p_2^{(1)} p_0^{(2)} + p_1^{(1)} p_1^{(2)} + p_0^{(1)} p_2^{(2)}$. Oder wenn wir $\tau_2 = 0$ setzen

$$\begin{aligned}
p_2 \phi_{X_1 \mid K=2}(\tau_1) &= p_2^{(1)} p_0^{(2)} \phi_1(\tau_1) \\
&\qquad + p_1^{(1)} p_1^{(2)} \frac{1}{2}\Big(\phi_1(\tau_1) + \phi_2(\tau_1)\Big) + p_0^{(1)} p_2^{(2)} \phi_2(\tau_1)
\end{aligned}$$

bzw. wenn wir $\tau_1 = 0$ setzen

$$\begin{aligned}
p_2 \phi_{X_2 \mid K=2}(\tau_2) &= p_2^{(1)} p_0^{(2)} \phi_1(\tau_2) \\
&\qquad + p_1^{(1)} p_1^{(2)} \frac{1}{2}\Big(\phi_2(\tau_2) + \phi_1(\tau_2)\Big) + p_0^{(1)} p_2^{(2)} \phi_2(\tau_2)
\end{aligned}$$

was natürlich dieselbe Funktion jetzt von τ_2 ist wie vorher von τ_1, kurz, wir können für einen beliebigen Schaden X von insgesamt deren zwei im fusionierten Portefeuille schreiben

$$\phi_{X \mid K=2}(\tau) = \pi_1 \phi_1(\tau) + \pi_2 \phi_2(\tau)$$

mit

$$\pi_1 = \frac{p_2^{(1)} p_0^{(2)} + \frac{1}{2} p_1^{(1)} p_1^{(2)}}{p_2}$$

und

$$\pi_2 = \frac{\frac{1}{2} p_1^{(1)} p_1^{(2)} + p_0^{(1)} p_2^{(2)}}{p_2}$$

und man verifiziert in allen drei Fällen, dass

$$\pi_j = \frac{\varrho_j}{\varrho}$$

das heisst, dass

$$\phi_{X \mid K=1}(\tau) = \phi_{X \mid K=2}(\tau).$$

Wenn wir noch den Fall $K = 3$ ansehen, dann ist für die gemeinsame bedingte Verteilung oder vielmehr Momentenerzeugende von $(X_1, X_2, X_3) \mid K = 3$

$$\begin{aligned} p_3 \phi_{(X_1, X_2, X_3) \mid K=3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &:= E\left[e^{\tau_1 X_1 + \tau_2 X_2 + \tau_3 X_3} \middle| K = 3\right] \\ &= p_3^{(1)} p_0^{(2)} \phi_1 \phi_1 \phi_1 \\ &\quad + p_2^{(1)} p_1^{(2)} \frac{1}{3} (\phi_1 \phi_1 \phi_2 + \phi_1 \phi_2 \phi_1 + \phi_2 \phi_1 \phi_1) \\ &\quad + p_1^{(1)} p_2^{(2)} \frac{1}{3} (\phi_1 \phi_2 \phi_2 + \phi_2 \phi_1 \phi_2 + \phi_2 \phi_2 \phi_1) \\ &\quad + p_0^{(1)} p_3^{(2)} \phi_2 \phi_2 \phi_2 \end{aligned}$$

mit der Konvention, dass die Argumente τ_1, τ_2, τ_3 stets in der natürlichen Reihenfolge auftreten; es bedeute also $\phi_i \phi_j \phi_k$ dasselbe wie $\phi_i(\tau_1) \phi_j(\tau_2) \phi_k(\tau_3)$.

Man findet dann für einen beliebigen Schaden X von den gegebenen drei X_1, X_2 und X_3 durch Nullsetzen von zweien der drei τ-Argumente, dass

$$\phi_{X \mid K=3}(\tau) = \pi_1 \phi_1(\tau) + \pi_2 \phi_2(\tau)$$

jetzt mit

$$\pi_1 = \frac{p_3^{(1)} p_0^{(2)} + \frac{2}{3} p_2^{(1)} p_1^{(2)} + \frac{1}{3} p_1^{(1)} p_2^{(2)}}{p_3}$$

und

$$\pi_2 = 1 - \pi_1$$

und das bedeutet für Binomial

$$\pi_1 = \frac{\frac{N_1(N_1-1)(N_1-2)}{6} + \frac{2}{3}\frac{N_1(N_1-1)}{2} N_2 + \frac{1}{3} N_1 \frac{N_2(N_2-1)}{2}}{\frac{N(N-1)(N-2)}{6}} = \frac{N_1}{N}$$

bzw. für negativ Binomial

$$\pi_1 = \frac{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{6} + \frac{2}{3}\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} \alpha_2 + \frac{1}{3} \alpha_1 \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}}{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}} = \frac{\alpha_1}{\alpha}$$

und für Poisson wissen wir schon zum voraus, dass $\pi_1 = \lambda_1/\lambda$ herauskommen muss.

Betrachten wir auch noch die gemeinsame Verteilung zweier beliebiger Einzelschäden (z. B. von X_1 und X_2) gegeben $K = 3$, so findet man leicht, dass

$$\begin{aligned}
\phi_{(X_1,X_2) \mid K=3}(\tau_1, \tau_2) = \phi_1 \phi_1 \frac{1}{p_3}\left(p_3^{(1)} p_0^{(2)} + \frac{1}{3} p_2^{(1)} p_1^{(2)}\right) &= \phi_1 \phi_1 \frac{p_2^{(1)} p_0^{(2)}}{p_2} \\
+ \phi_1 \phi_2 \frac{1}{p_3}\left(\frac{1}{3} p_2^{(1)} p_1^{(2)} + \frac{1}{3} p_1^{(1)} p_2^{(2)}\right) &\quad + \phi_1 \phi_2 \frac{1}{2} \frac{p_1^{(1)} p_2^{(2)}}{p_2} \\
+ \phi_2 \phi_1 \frac{1}{p_3}\left(\frac{1}{3} p_2^{(1)} p_1^{(2)} + \frac{1}{3} p_1^{(1)} p_2^{(2)}\right) &\quad + \phi_2 \phi_1 \frac{1}{2} \frac{p_1^{(1)} p_1^{(2)}}{p_2} \\
+ \phi_2 \phi_2 \frac{1}{p_3}\left(\frac{1}{3} p_1^{(1)} p_2^{(2)} + p_0^{(1)} p_3^{(2)}\right) &\quad + \phi_2 \phi_2 \frac{p_0^{(1)} p_2^{(2)}}{p_2}
\end{aligned}$$

also

$$\phi_{(X_1,X_2)\mid K=3}(\tau_1,\tau_2) = \phi_{(X_1,X_2)\mid K=2}(\tau_1,\tau_2)$$

wie erhofft.
Als nächstes verifiziert man, dass

$$\begin{aligned}
&\phi_{(X_1,X_2,X_3,X_4)\mid K=4}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,0)\\
&= \frac{p_4^{(1)}p_0^{(2)} + \frac{1}{4}p_3^{(1)}p_1^{(2)}}{p_4}\phi_1\phi_1\phi_1\\
&\quad + \frac{\frac{1}{4}p_3^{(1)}p_1^{(2)} + \frac{1}{6}p_2^{(1)}p_2^{(2)}}{p_4}(\phi_2\phi_1\phi_1 + \phi_1\phi_2\phi_1 + \phi_1\phi_1\phi_2)\\
&\quad + \frac{\frac{1}{6}p_2^{(1)}p_2^{(2)} + \frac{1}{4}p_1^{(1)}p_3^{(2)}}{p_4}(\phi_1\phi_2\phi_2 + \phi_2\phi_1\phi_2 + \phi_2\phi_2\phi_1)\\
&\quad + \frac{\frac{1}{4}p_1^{(1)}p_3^{(2)} + p_0^{(1)}p_4^{(2)}}{p_4}\phi_2\phi_2\phi_2
\end{aligned}$$

und damit falls $K_j \sim$ Poisson

$$\frac{p_4^{(1)}p_0^{(2)} + \frac{1}{4}p_3^{(1)}p_1^{(2)}}{p_4} = \frac{\frac{\lambda_1^4}{24} + \frac{1}{4}\frac{\lambda_1^3}{6}\lambda 2}{\frac{\lambda^4}{24}} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda^3} = \frac{p_3^{(1)}}{p_3}p_0^{(2)}$$

$$\frac{\frac{1}{4}p_3^{(1)}p_1^{(2)} + \frac{1}{6}p_2^{(1)}p_2^{(2)}}{p_4} = \frac{\frac{1}{4}\frac{\lambda_1^3}{6}\lambda_2 + \frac{1}{6}\frac{\lambda_1^2}{2}\frac{\lambda_2^2}{2}}{\frac{\lambda^4}{24}} = \frac{\lambda_1^2\lambda_2}{\lambda^3} = \frac{1}{3}\frac{p_2^{(1)}p_1^{(2)}}{p_3}$$

bzw. falls $K_j \sim$ Pascal

$$\begin{aligned}
\frac{p_4^{(1)}p_0^{(2)} + \frac{1}{4}p_3^{(1)}p_1^{(2)}}{p_4} &= \frac{\frac{1}{24}\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_1+3) + \frac{1}{4}\frac{1}{6}\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)\alpha_2}{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{24}}\\
&= \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} = \frac{p_3^{(1)}p_0^{(2)}}{p_3}\\
\frac{\frac{1}{4}p_3^{(1)}p_1^{(2)} + \frac{1}{6}p_2^{(1)}p_2^{(2)}}{p_4} &= \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{6}\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)\alpha_2 + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1+1)\frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2+1)}{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{24}}\\
&= \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} = \frac{1}{3}\frac{p_2^{(1)}p_1^{(2)}}{p_3}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\phi_{(X_1,X_2,X_3,X_4)\mid K=4}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,0) = \phi_{(X_1,X_2,X_3)\mid K=3}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$$

und somit insbesondere auch

$$\phi_{X\mid K=4}(\tau) = \phi_{X\mid K=3}(\tau) = \phi_{X\mid K=2}(\tau) = \phi_{X\mid K=1}(\tau) := \phi(\tau)$$

unabhängig von der Anzahl K der Schäden auf dem fusionierten Portefeuille. Entsprechend ist auch die gemeinsame Verteilung von zwei oder mehreren Schäden, also z. B.

$$\begin{aligned}\phi_{(X_1,X_2)}(\tau_1\tau_2) &= \frac{p_2^{(1)}p_0^{(2)}}{p_2}\phi_1\phi_1 + \frac{p_1^{(1)}p_1^{(2)}}{2p_2}(\phi_1\phi_2+\phi_2\phi_1) + \frac{p_0^{(1)}p_2^{(2)}}{p_2}\phi_2\phi_2\\ &= \phi(\tau_1)\phi(\tau_2) + \gamma\Big(\phi_1(\tau_1)-\phi_2(\tau_1)\Big)\Big(\phi_1(\tau_2)-\phi_2(\tau_2)\Big)\end{aligned}$$

jetzt, wie gesagt, unabhängig von der Anzahl K im Gegensatz zu Abschnitt 4, wo $K = 2$ Bedingung war.
Anstelle dieser etwas aufwendigen Nachrechnungen für $k = 1, 2, 3, \ldots$ (wobei der Vollständigkeit halber auch noch ein Induktionsbeweis zu führen wäre) kann man für binomial und mit demselben p verteilte K_1 und K_2 direkt kombinatorisch überlegen, dass

$$\phi(\tau) = \phi_{X\mid K=k}(\tau) = \frac{N_1}{N}\phi_1(\tau) + \frac{N_2}{N}\phi_2(\tau) \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

indem man sich unter X den ersten Schaden vorstellt, der auf dem fusionierten Portefeuille passiert und unter N_1 bzw. N_2 die Anzahl der günstigen und unter N die Anzahl der möglichen Fälle. Analog für die zwei ersten Schäden:

$$\begin{aligned}\phi_{(X_1,X_2)\mid K=k}(\tau_1,\tau_2) &= \frac{N_1(N_1-1)}{N(N-1)}\phi_1(\tau_1)\phi_1(\tau_2) + \frac{N_1N_2}{N(N-1)}\phi_1(\tau_1)\phi_2(\tau_2)\\ &\quad + \frac{N_1N_2}{N(N-1)}\phi_2(\tau_1)\phi_1(\tau_2) + \frac{N_2(N_2-1)}{N(N-1)}\phi_2(\tau_2)\phi_2(\tau_2)\\ &= \phi(\tau_1)\phi(\tau_2)\\ &\quad - \frac{N_1N_2}{N^2(N-1)}\Big(\phi_1(\tau_1)-\phi_2(\tau_1)\Big)\Big(\phi_1(\tau_2)-\phi_2(\tau_2)\Big)\end{aligned}$$

Die entsprechenden Resultate für Poisson-verteiltes K sollten sich dann durch den üblichen Grenzübergang ergeben, währenddem man für Pascal-verteilte

Anzahlen N_1, N_2 und N durch $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ und $-\alpha$ ersetzen muss. Eine saubere Herleitung von

$$\phi_{(X \mid K=k}(\tau) \qquad \text{und} \qquad \phi_{(X_1,X_2) \mid K=k}(\tau_1, \tau_2)$$

bedingt, dass man die allgemeinen kombinatorischen Formeln

$$\phi_{X \mid K=k}(\tau) = \sum_{i=0}^{k} \text{Prob}\,[K_1 = i \mid K = k]\left\{ \frac{i}{k}\phi_1(\tau) + \frac{k-i}{k}\phi_2(\tau) \right\}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\phi_{(X_1,X_2) \mid K=k}(\tau_1, \tau_2) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \text{Prob}\,[K_1 = i \mid K = k]\left\{ \frac{i(i-1)}{k(k-1)}\phi_1(\tau_1)\phi_1(\tau_2) \right. \\
&\qquad + \frac{i(k-i)}{k(k-1)}\phi_1(\tau_1)\phi_2(\tau_2) \\
&\qquad + \frac{i(k-i)}{k(k-1)}\phi_2(\tau_1)\phi_1(\tau_2) \\
&\qquad \left. + \frac{(k-i)(k-i-1)}{k(k-1)}\phi_2(\tau_1)\phi_2(\tau_2) \right\}
\end{aligned}$$

je für Binomial-, Poisson- und Pascal-verteilte Anzahlen explizit durchrechnet.

8. Schlussbemerkungen

Die beabsichtigte Anstiftung zum vermehrten Gebrauch von zusammengesetzten Non-Poisson-Modellen ist also nur teilweise geglückt, indem sich unser Interesse mehr und mehr von der ursprünglich praxisorientierten Frage nach realistischeren Modellen abgewendet und sich auf das eher akademische Phänomen der durch Fusion "induzierten" Abhängigkeit gerichtet hat.
Für ein besseres Verständnis dieser so entstandenen Abhängigkeit – die intuitiv nach wie vor unbegreiflich erscheint – wäre allerdings unter anderem noch konkret nachzuweisen, dass z. B. eine durch

$$1 - p\phi(\tau) := (1 - p\phi_1(\tau))^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot (1 - p\phi_2(\tau))^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

definierte Funktion $\phi(\tau)$ niemals eine Momentenerzeugende, das heisst, die Laplace-Transformierte einer Verteilungsfunktion sein kann, ausser im trivialen Fall, wo $\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau)$.
Meines Wissens ist dieser Abhängigkeit der Einzelschäden in einem fusionierten Portefeuille – und als eine Fusion verschiedener Portefeuilles kann man schliesslich jedes Portefeuille auffassen – in der aktuariellen Literatur nur wenig bis keine Aufmerksamkeit geschenkt worden, es sei denn, der Jubilar habe diese Zusammenhänge schon in [11] mindestens indirekt als Charakterisierung der Poissenverteilung aufgezeigt.

Erwin Straub
Schweizer Rück
Postfach
8022 Zürich

Literatur

[1] *Eggenberger, F./Pólya, G.* (1923): Über die Statistik verketteter Vorgänge, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.

[2] *Ammeter, H.* (1948): A Generalization of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic-Probabilities. Skandinavisk Aktuarietidskrift.

[3] *Bichsel, F.* (1964): Erfahrungstarifierung in der Motorfahrzeughaftpflichtversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

[4] *Kupper, J.* (1962): Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.

[5] *Jecklin, H./Eisenring, M.* (1947): Die elementaren Mittelwerte. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

[6] *Straub, E.* (1988): Non-Life Mathematics, Springer-Verlag.

[7] *Gerber, H. U.* (1979): An Introduction to Mathematical Risk Theory, Huebner Foundation.

[8] *Dufresne, F./Gerber, H. U.* (1989): Three Methods to Calculate the Probability of Ruin. ASTIN-Bulletin.

[9] *Bühlmann, H.* (1972): Ruinwahrscheinlichkeit bei erfahrungstarifiertem Portefeuille. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

[10] *Meyer, Dwass* (1970): Probability Theory and Applications. W. A. Benjamin, New York.

[11] *Bühlmann, H.* (1988): Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Zusammenfassung

Es werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede der zusammengesetzten Poisson- und der zusammengesetzten negativen Binomialverteilung diskutiert. Für den Theoretiker von Interesse ist die durch Fusion zweier Portefeuilles induzierte Abhängigkeit der Einzelschadenbeträge, wenn die Schadenanzahl nicht Poisson-verteilt ist.

Résumé

L'auteur relève certaines ressemblances et dissemblances entre les distributions de Poisson et binomiale négative composées. Le théoricien trouvera un intérêt dans l'étude du type de dépendance entre les montants des sinistres lors d'uns fusion de deux portefeuilles, lorsque le nombre des sinistres n'est pas distribué selon une loi de Poisson.

Summary

The compound Poisson and the compound negative binomial distributions are compared with one another within different contexts. Of a certain theoretical interest is a stochastic dependency among individual claim amounts due to the merger of two portfolios with a non-Poisson-distributed number of claims.