Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1991)

Heft: 1

Artikel: Réassurance du risque de ruine

Autor: Amsler, Marc-Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967276

Marc-Henri Amsler, Lausanne

Réassurance du risque de ruine

1. Objet de l'étude

Les besoins en réassurance des institutions d'assurances directes sont couverts par une large gamme de produits. Certaines formes de réassurance partagent les risques au niveau des sinistres individuels, d'autres au niveau des résultats financiers de périodes entières. Toutes se proposent entre autre de réduire les fluctuations dues à l'arrivée aléatoire des sinistres, de réduire la probabilité de ruine et de réduire les désagréments financiers éventuels consécutifs à des évolutions aléatoires défavorables. Rares, même très rares sont les formes de réassurance qui, tout en laissant à l'institution cédante ses risques, suppriment entièrement le risque de ruine. Sans prendre position sur la question de savoir si une réassurance dégageant entièrement l'institution réassurée du risque de ruine est économiquement et commercialement désirable, nous imaginons ci-après un type de contrat de réassurance qui est à même d'offrir une telle protection. Nous appellerons cette forme de contrat "réassurance du risque de ruine", ou tout simplement "contrat RRR". Il est évident que l'on pourrait imaginer d'autres formes de réassurance se proposant le même objectif.
Quant aux possibilités d'une application pratique de cette forme de réassurance, il semble qu'il faille penser plutôt au domaine des caisses de pensions qu'à celui des institutions d'assurance proprement dites.

2. Réassurance RRR

Voici le mécanisme de la réassurance RRR, mécanisme qui reste intuitif et élémentaire.
Considérons le processus aléatoire "classique" créé par l'arrivée des sinistres, l'encaisse de primes et la présence d'une provision de fluctuation initiale, tous termes définis comme suit:

X_t = charge annuelle des sinistres de l'année de rang t (t entier), X_1, $X_2, \dots, X_t$ indépendants et identiquement distribués (comme X),

P_t = volume des primes annuelles de l'année de rang t : $P_t = P$ = const.
Q = marge de sécurité comprise dans P : $Q = P - E(X) > 0$
R_0 = provision de fluctuation initiale (en $t = 0$): $R_0 \geq 0$

Entre ces grandeurs nous avons la relation classique:

$$R_t = R_0 + t \cdot P - \sum_{s=1}^{t} X_s$$

Du fait de la présence d'une marge de sécurité Q positive incluse dans la prime P, un réel risque de ruine n'est à craindre que dans le court ou le moyen terme; à long terme le risque de ruine est très faible, sans être nul toutefois. Une réassurance du risque de ruine aura donc économiquement de sens que sur le court ou le moyen terme (toujours sous l'hypothèse du modèle classique rappelé ci-dessus). De toute façon des contrats de réassurance à des conditions fixes ne peuvent se concevoir à long terme.
Considérons la situation d'un portefeuille tout d'abord *à la fin* d'un contrat de réassurance se proposant de le protéger contre le risque de ruine. Trois cas se présentent pour la provision de fluctuation R_n à l'époque $t = n$:

- Si $R_n < 0$ le portefeuille est en situation de ruine. Bien que le contrat arrive à terme, le réassureur ne peut guère l'abandonner dans cette situation; de plus un renouvellement du contrat de réassurance est difficile à entrevoir. Le réassureur devrait pour le moins "remettre la provision de fluctuation à zéro", même à un niveau supérieur pour permettre au portefeuille de poursuivre son activité.
- Si $0 < R_n < R_0$, le portefeuille est dans une situation financière moins bonne qu'au début du contrat; le réassureur pourrait prévoir, parmi les services offerts, de remettre la provision p. ex. au niveau initial R_0.
- Si $R_n > R_0$, le portefeuille n'a pas besoin d'aide à proprement parler à la fin du contrat pour poursuivre son activité. De plus, le contrat de réassurance peut être renouvelé sans difficulté.

Comment imaginer maintenant une couverture adéquate du risque de ruine *pendant* la durée du contrat?
Si une ruine intervient, il ne semble pas indispensable de prévoir de la part du réassureur, pour rétablir la situation, un versement à fonds perdu; un simple prêt du montant de la provision de fluctuation devenue négative pourrait suffire: le bilan technique serait rééquilibré. Le montant de ce prêt devrait

par la suite être adapté année après année au montant du découvert de la provision de fluctuation, un remboursement complet du prêt intervenant automatiquement dès que ladite provision redeviendrait positive.

L'octroi d'un prêt plutôt que d'une prestation à fonds perdu pendant la durée du contrat se justifie par le fait que, si l'on attend suffisamment longtemps, le portefeuille – de par le trend de son évolution – retrouvera tout naturellement sa santé financière: le réassureur pourra donc avec le temps "récupérer" le prêt accordé. L'octroi en cours de contrat d'un prêt en lieu et place d'une prestation à fonds perdu se justifie également vu l'aide financière prévue en fin de contrat (voir ci-dessus).

Pour l'institution réassurée, l'effet global d'une réassurance telle que décrite ci-dessus consiste à lui permettre de présenter chaque année un bilan technique équilibré – tout en lui conservant ses risques – et, en fin de contrat, à éviter que sa provision de fluctuation ne tombe à un niveau inférieur à celui qu'elle a connu en début de contrat. Les pertes cumulées sont ainsi limitées au pire à la somme des marges de sécurité perçues pendant le contrat.

Dans le cadre décrit ci-dessus, plusieurs variantes sont pensables.

Considérons la couverture suivante que nous appellerons *"réassurance RRR standard"*:

- pendant la durée du contrat, en cas de détection d'une situation de ruine ($R_t < 0$) à la fin de l'année de rang t, octroi par le réassureur pendant l'année suivante d'un prêt de montant $|R_t|$, ce prêt évoluant par la suite parallèlement au montant de la provision de fluctuation négative. Le réassureur sera "remboursé" si ladite provision redevient positive,
- à la fin du contrat, si la provision de fluctuation est inférieure à son montant initial ($R_n < R_0$), remise de la provision de fluctuation R_n au niveau initial R_0, à charge du réassureur et à fonds perdu.

3. Valeurs actuelles et coûts de réassurance

Pour les formes de réassurance RRR telles que décrites ci-dessus, la charge du réassureur se monte à la valeur actuelle des intérêts sur le prêt conditionnel accordé pendant le contrat, augmentée de la valeur actuelle du coût de la remise à flot éventuelle de la provision de fluctuation à la fin du contrat.

La valeur actuelle des prestations de réassurance comporte ainsi deux parties:

– la valeur actuelle en $t = 0$ des intérêts sur les prêts éventuels accordés, soit

$$_nA_x = i' \cdot \sum_{t=0}^{n-1} E(|R_t^-|) \cdot v^t$$

où

x = montant initial R_0 de la provision de fluctuation

i' = taux d'intérêt sur prêts (à risques), praenumerando

R_t^- = montant négatif de la provision en t

v^t = facteur d'escompte calculé au taux technique i

– la valeur actuelle en $t = 0$ de la prestation conditionnelle à la fin du contrat, soit

$$_nE_x = E[(x - R_n)^+] \cdot v^n$$

où $(x - R_n)^+$ = valeur de l'écart (assuré) entre $R_0 = x$ et R_n,

soit au total:

$$A_{x:n} = {_nA_x} + {_nE_x}\,.$$

La grande analogie de structure qui existe entre une couverture de la forme "réassurance du risque de ruine" et de la forme "assurance mixte vie-décès" de l'assurance sur la vie justifie la réutilisation des symboles classiques:

– $_nA_x$ = valeur actuelle des prestations durant le contrat,
– $_nE_x$ = valeur actuelle de la prestation à la fin du contrat et
– $A_{x:n}$ = valeur actuelle de l'assurance "mixte".

Si de plus on représente par $\ddot{a}_{x:n}$ la valeur de la rente annuelle praenumerando de montant unité liée à l'état "ne pas être en situation de ruine":

$$\ddot{a}_{x:n} = \sum_{t=0}^{n-1} \mathrm{prob}(R_t > 0) \cdot v^t$$

les coûts de réassurance les années sans ruine se montent à:

$$P_{x:n} = \frac{A_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

4. Exemples

Il est aisé de construire des exemples de réassurance de type RRR.
Si la distribution du montant annuel des sinistres et ses convolutions s'expriment analytiquement, la détermination numérique des probabilités d'être en situation de ruine en t et de l'espérance mathématique de la sévérité d'une ruine en t ne pose pas de grands problèmes. Les distributions de Gauss et gamma sont de ce type.
Les calculs avec une distribution gaussienne (une hypothèse pratique mais qui ne correspond pas trop bien aux situations réelles des portefeuilles, on le sait!) sont, à la limite, praticables "à la main". Notre premier exemple sera de type gaussien.
Si la distribution du montant annuel des sinistres est donnée numériquement (notre second exemple, qui correspond à un portefeuille réel), les calculs des convolutions, des probabilités et moments des exédents ne peuvent pratiquement être réalisés qu'en faisant appel à un ordinateur.

Exemple No 1

Voici les caractéristiques du modèle:

- X gaussien, $E(X) = 10$, $\mathrm{Var}(X) = 1$
- Prime annuelle $P = 11$, marge de sécurité $Q = 1$
- Provision de fluctuation à choix $R_0 = x = 0, 1, 2, 3$ ou 4

Pour les 5 valeurs de R_0 retenues, les résultats sont reproduits dans les tableaux Ia à Ie de l'annexe.
La signification des symboles utilisés est la suivante:

Tableau supérieur:

- col. 1: l'écoulement du temps $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$
- col. 2: probabilité d'être non ruiné en t: Prob $(R_t \geq 0)$
- col. 3: – d'être en situation de ruine en t
- col. 4: esp. math. de la sévérité de la ruine si le portefeuille est en situation de ruine en t
- col. 5: esp. math. en $t = 0$ de la sévérité de la ruine
- col. 6: probabilité d'une prov. de fluctuation à l'époque t inférieure à la provision initiale $R_0 = x$
- col. 7: esp. math. en t de la perte cumulée, si $R_t \leq R_0 = x$
- col. 8: esp. math. en $t = 0$ de la perte cumulée,

avec les relations:

col. 5 = col. 3 × col. 4
col. 8 = col. 6 × col. 7

Tableau inférieur:

- col. 1: durée n du contrat
- col. 2: valeur actuelle (en $t = 0$) des intérêts sur un prêt éventuel pendant la durée du contrat
- col. 3: valeur actuelle (en $t = 0$) de la reconstitution éventuelle en fin de contrat de la provision de fluctuation à son niveau initial x
- col. 4: valeur actuelle des prestations de réassurance
- col. 5: valeur actuelle de la rente unité liée à état "non- ruiné"
- col. 6: coût annuel de réassurance, en cas de répartition uniforme des coûts sur les années "sans ruine" du contrat.

Le taux technique d'escompte a été choisi à 5 %, celui de l'intérêt sur les prêts éventuels à 10 %.
Sur chacun des tableaux, on constatera la réduction progressive des coûts de la réassurance (uniques et annuels) lorsque la durée du contrat augmente, phénomène qui correspond bien à l'intuition puisque la charge de la prestation de réassurance à la fin du contrat diminue vu le trend de l'évolution (dû à la présence d'une marge de sécurité positive dans les primes). Le phénomène de l'escompte intervient également, mais dans une plus faible mesure. Il ne semble pas réaliste d'imaginer des durées de contrat supérieures à 10 ans.
Lorsque l'on augmente la provision de fluctuation initiale $R_0 = x$ (voir la succession des tableaux Ia à Ie), les coûts de réassurance diminuent, ce qui est naturel; de plus la valeur actuelle de la rente liée à l'état "non-ruiné" augmente, ce qui correspond aussi à l'intuition. Pour de grandes provisions de fluctuation initiales ($x = 3$ ou 4), le coût de la réassurance provient essentiellement de la prestation en fin de contrat, aussi une constatation évidente.
Pour juger de l'importance du coût de la réassurance RRR, il y a lieu de mettre les coûts de réassurance (uniques $A_{x:n}$ et annuels $P_{x:n}$) en relation avec la prime du modèle $P = 11$. Le faible niveau des coûts de réassurance ne doit néanmoins pas faire illusion; il est dû essentiellement au fait que l'écart-type de la charge annuelle des sinistres est faible (10 %), de plus que le modèle est gaussien, donc pour un écart-type donné sous-estime les fortes fluctuations du portefeuille, enfin que les coûts sont "purs", ne comprennent aucune marge de sécurité.

Exemple No 2

(d'après E. Kuhn, Bulletin de l'Association suisse des actuaires, vol. 1986/2). Le portefeuille considéré est celui d'une caisse de pensions comprenant 236 assurés actifs, d'âge moyen 36,48. Les sommes sous le risque – calculées pour chaque assuré (décès et invalidité) – varient entre $-50\,000$ et $+680\,000$ francs suisses. Le nombre moyen annuel des "sinistres" est 0.917. La charge annuelle des sinistres est une variable de Poisson composée, les montants des sinistres individuels étant donnés numériquement.
Pour les calculs numériques, on a choisi les paramètres comme suit:

– unité monétaire			1	=	20 000 francs
– charge annuelle des sinistres:	$E(X)$	=	6,36	=	127 000 francs
	$\sigma(X)$	=	10,2	=	204 000 francs
– prime de risque annuelle	P	=	8	=	160 000 francs
– marge de sécurité	Q	=	1,64	=	25,8 % $E(X)$

– provision de fluctuation initiale $R_0 = x$, à choix:
$x = 0, 10, 20$ et 30 unités

Les résultats des calculs sont reproduits, pour les diverses valeurs x de la provision de fluctuation initiale, dans les tableaux IIa à IId ci-après. On remarquera immédiatement que les coûts de réassurance sont d'un tout autre ordre de grandeur que dans le premier exemple. Cela est dû pour l'essentiel au fait que les fluctuations sont beaucoup plus importantes (écart-type de l'ordre de grandeur d'une prime) et que les provisions de fluctuation initiales sont relativement faibles par rapport à l'écart-type, tout en étant fortes en valeur: 200 000, 400 000 et 600 000 francs.
Sans provision de fluctuation initiale, p.ex., la valeur actuelle de la rente liée à l'état "non-ruiné" d'un contrat de 10 ans est pratiquement de 6 (exactement 5.99240, tableau inférieur IIa, dernier chiffre de la colonne 5), alors que la valeur actuelle de la rente certaine est 8.1. Selon d'autres calculs, non reproduits ici, la probabilité de tomber en situation de ruine (1ère ruine) durant les 10 années considérées est, pour ce cas concret, de 60 % (de 26 % en 1ère année!). Le portefeuille ne peut pas exister sans réassurance.

Marc-Henri Amsler
Ecole des H.E.C.
Université de Lausanne
1015 Lausanne

Annexe

Tableau Ia

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 0$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
1	.84134	.15866	.52514	.08332	.15866	.52514	.08332
2	.92135	.07865	.63897	.05025	.07865	.63897	.05025
3	.95837	.04163	.70339	.02928	.04163	.70339	.02928
4	.97725	.02275	.74643	.01698	.02275	.74643	.01698
5	.98733	.01267	.77772	.00986	.01267	.77772	.00986
6	.99285	.00715	.80170	.00573	.00715	.80170	.00573
7	.99592	.00408	.82076	.00334	.00408	.82076	.00334
8	.99766	.00234	.83632	.00196	.00234	.83632	.00196
9	.99865	.00135	.84929	.00115	.00135	.84929	.00115
10	.99922	.00078	.86030	.00067	.00078	.86030	.00067
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 0$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	.07935	.07935	1.00000	.07935
2	.00793	.04558	.05352	1.80128	.02971
3	.01249	.02530	.03779	2.63697	.01433
4	.01502	.01397	.02899	3.46485	.00837
5	.01642	.00772	.02414	4.26883	.00566
6	.01719	.00428	.02147	5.04243	.00426
7	.01762	.00238	.02000	5.78331	.00346
8	.01786	.00132	.01918	6.49109	.00296
9	.01799	.00074	.01873	7.16635	.00261
10	.01806	.00041	.01848	7.81009	.00237
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Tableau Ib

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 1$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
1	.97725	.02275	.37321	.00849	.15866	.52514	.08332
2	.98305	.01695	.50880	.00862	.07865	.63897	.05025
3	.98954	.01046	.58979	.00617	.04163	.70339	.02928
4	.99379	.00621	.64549	.00401	.02275	.74643	.01698
5	.99635	.00365	.68676	.00250	.01267	.77772	.00986
6	.99787	.00213	.71884	.00153	.00715	.80170	.00573
7	.99875	.00125	.74460	.00093	.00408	.82076	.00334
8	.99927	.00073	.76582	.00056	.00234	.83632	.00196
9	.99957	.00043	.78365	.00034	.00135	.84929	.00115
10	.99975	.00025	.79885	.00020	.00078	.86030	.00067

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 1$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	.07935	.07935	1.00000	.07935
2	.00081	.04558	.04639	1.93071	.02403
3	.00159	.02530	.02689	2.82237	.00953
4	.00212	.01397	.01609	3.67717	.00438
5	.00245	.00772	.01018	4.49477	.00226
6	.00265	.00428	.00693	5.27544	.00131
7	.00276	.00238	.00514	6.02006	.00085
8	.00283	.00132	.00415	6.72985	.00062
9	.00287	.00074	.00361	7.40620	.00049
10	.00289	.00041	.00330	8.05053	.00041

Tableau Ic

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 2$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
1	.99865	.00135	.28306	.00038	.15866	.52514	.08332
2	.99766	.00234	.41815	.00098	.07865	.63897	.05025
3	.99805	.00195	.50453	.00098	.04163	.70339	.02928
4	.99865	.00135	.56619	.00076	.02275	.74643	.01698
5	.99913	.00087	.61302	.00053	.01267	.77772	.00986
6	.99945	.00055	.65006	.00035	.00715	.80170	.00573
7	.99967	.00033	.68023	.00023	.00408	.82076	.00334
8	.99980	.00020	.70535	.00014	.00234	.83632	.00196
9	.99988	.00012	.72664	.00009	.00135	.84929	.00115
10	.99993	.00007	.74494	.00006	.00078	.86030	.00067

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 2$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	.07935	.07935	1.00000	.07935
2	.00004	.04558	.04562	1.95110	.02338
3	.00013	.02530	.02542	2.85600	.00890
4	.00021	.01397	.01418	3.71816	.00381
5	.00027	.00772	.00800	4.53975	.00176
6	.00031	.00428	.00459	5.32259	.00086
7	.00034	.00238	.00272	6.06840	.00045
8	.00036	.00132	.00168	6.77885	.00025
9	.00037	.00074	.00111	7.45555	.00015
10	.00037	.00041	.00079	8.10008	.00010

Tableau Id

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 3$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \vert R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \vert R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
1	.99997	.00003	.22428	.00001	.15866	.52514	.08332
2	.99980	.00020	.35261	.00007	.07865	.63897	.05025
3	.99973	.00027	.43896	.00012	.04163	.70339	.02928
4	.99977	.00023	.50276	.00012	.02275	.74643	.01698
5	.99983	.00017	.55237	.00010	.01267	.77772	.00986
6	.99988	.00012	.59230	.00007	.00715	.80170	.00573
7	.99992	.00008	.62528	.00005	.00408	.82076	.00334
8	.99995	.00005	.65304	.00003	.00234	.83632	.00196
9	.99997	.00003	.67677	.00002	.00135	.84929	.00115
10	.99998	.00002	.69733	.00001	.00078	.86030	.00067

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 3$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	.07935	.07935	1.00000	.07935
2	.00000	.04558	.04558	1.95235	.02335
3	.00001	.02530	.02530	2.85920	.00885
4	.00002	.01397	.01399	3.72280	.00376
5	.00003	.00772	.00775	4.54531	.00171
6	.00003	.00428	.00431	5.32870	.00081
7	.00004	.00238	.00242	6.07483	.00040
8	.00004	.00132	.00137	6.78546	.00020
9	.00005	.00074	.00078	7.46226	.00011
10	.00005	.00041	.00046	8.10685	.00006

Tableau Ie

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 4$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
1	1.00000	.00000	.04130	.00000	.15866	.52514	.08332
2	.99999	.00001	.30242	.00000	.07865	.63897	.05025
3	.99997	.00003	.38714	.00001	.04163	.70339	.02928
4	.99997	.00003	.45105	.00001	.02275	.74643	.01698
5	.99997	.00003	.50175	.00001	.01267	.77772	.00986
6	.99998	.00002	.54321	.00001	.00715	.80170	.00573
7	.99998	.00002	.57787	.00001	.00408	.82076	.00334
8	.99999	.00001	.60734	.00001	.00234	.83632	.00196
9	.99999	.00001	.63275	.00000	.00135	.84929	.00115
10	1.00000	.00000	.65489	.00000	.00078	.86030	.00067

Réassurance du risque de ruine – portefeuille Gauss 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 4$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	.07935	.07935	1.00000	.07935
2	.00000	.04558	.04558	1.95238	.02335
3	.00000	.02530	.02530	2.85940	.00895
4	.00000	.01397	.01397	3.72321	.00375
5	.00000	.00772	.00773	4.54589	.00170
6	.00000	.00428	.00428	5.32940	.00080
7	.00000	.00238	.00238	6.07559	.00039
8	.00001	.00132	.00133	6.78626	.00020
9	.00001	.00074	.00074	7.46310	.00010
10	.00001	.00041	.00042	8.10770	.00005

Tableau IIa

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 0$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	1.00000	.00000	.00000	1.00000	.00000
1	.74235	.25765	12.87440	3.31709	.25765	12.87440	3.31709
2	.68633	.31367	14.57930	4.57309	.31367	14.57930	4.57309
3	.68024	.31976	16.33062	5.22188	.31976	16.33062	5.22188
4	.68551	.31449	18.06976	5.68276	.31449	18.06976	5.68276
5	.69331	.30669	19.69503	6.04027	.30669	19.69503	6.04027
6	.69930	.30070	21.01041	6.31783	.30070	21.01041	6.31783
7	.70550	.29450	22.18278	6.53283	.29450	22.18278	6.53283
8	.71193	.28807	23.26396	6.70165	.28807	23.26396	6.70165
9	.71824	.28176	24.25731	6.83474	.28176	24.25731	6.83474
10	.72437	.27563	25.17502	6.93899	.27563	25.17502	6.93899

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 0$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	3.15913	3.15913	1.00000	3.15913
2	.31591	4.14793	4.46384	1.70700	2.61502
3	.73071	4.51086	5.24157	2.32952	2.25006
4	1.18179	4.67522	5.85701	2.91714	2.00779
5	1.64931	4.73271	6.38202	3.48111	1.83333
6	2.12258	4.71446	6.83705	4.02434	1.69893
7	2.59403	4.64276	7.23679	4.54616	1.59185
8	3.05831	4.53594	7.59425	5.04755	1.50454
9	3.51190	4.40573	7.91764	5.52941	1.43191
10	3.95247	4.25994	8.21241	5.99240	1.37047

Tableau IIb

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 10$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	1.00000	.00000	.00000	1.00000	.00000
1	.86963	.13037	10.68237	1.39266	.25765	12.87440	3.31709
2	.83407	.16593	12.88435	2.13790	.31367	14.57930	4.57309
3	.82084	.17916	15.04895	2.69617	.31976	16.33062	5.22188
4	.81201	.18799	16.77057	3.15270	.31449	18.06976	5.68276
5	.80647	.19353	18.15998	3.51450	.30669	19.69503	6.04027
6	.80394	.19606	19.41982	3.80745	.30070	21.01041	6.31783
7	.80315	.19685	20.57404	4.05000	.29450	22.18278	6.53283
8	.80337	.19663	21.62722	4.25256	.28807	23.26396	6.70165
9	.80430	.19570	22.59785	4.42240	.28176	24.25731	6.83474
10	.80575	.19425	23.50147	4.56516	.27563	25.17502	6.93899

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 10$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	3.15913	3.15913	1.00000	3.15913
2	.13263	4.14793	4.28056	1.82822	2.34138
3	.32655	4.51086	4.83740	2.58475	1.87152
4	.55945	4.67522	5.23467	3.29382	1.58924
5	.81883	4.73271	5.55154	3.96186	1.40124
6	1.09420	4.71446	5.80866	4.59375	1.26447
7	1.37831	4.64276	6.02108	5.19366	1.15931
8	1.66614	4.53594	6.20208	5.76445	1.07592
9	1.95397	4.40573	6.35971	6.30820	1.00816
10	2.23904	4.25994	6.49898	6.82666	.95200

Tableau IIc

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 20$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	1.00000	.00000	.00000	1.00000	.00000
1	.94733	.05267	9.17069	.48302	.25765	12.87440	3.31709
2	.92566	.07434	12.47310	.92725	.31367	14.57930	4.57309
3	.90587	.09413	14.13418	1.33045	.31976	16.33062	5.22188
4	.89300	.10700	15.59150	1.66829	.31449	18.06976	5.68276
5	.88452	.11548	16.94224	1.95649	.30669	19.69503	6.04027
6	.87855	.12145	18.16229	2.20581	.30070	21.01041	6.31783
7	.87428	.12572	19.26607	2.42213	.29450	22.18278	6.53283
8	.87128	.12872	20.27836	2.61023	.28807	23.26396	6.70165
9	.86926	.13074	21.22013	2.77432	.28176	24.25731	6.83474
10	.86797	.13203	22.09930	2.91777	.27563	25.17502	6.93899

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 20$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	3.15913	3.15913	1.00000	3.15913
2	.04600	4.14793	4.19393	1.90222	2.20476
3	.13011	4.51086	4.64096	2.74182	1.69266
4	.24504	4.67522	4.92026	3.52434	1.39608
5	.38229	4.73271	5.11500	4.25902	1.20098
6	.53558	4.71446	5.25004	4.95206	1.06017
7	.70018	4.64276	5.34294	5.60765	.95280
8	.87232	4.53594	5.40826	6.22898	.86824
9	1.04899	4.40573	5.45472	6.81870	.79997
10	1.22783	4.25994	5.48776	7.37903	.74370

Tableau IId

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Probabilités et espérances mathématiques
Provision de fluctuation initiale $x = 30$

	probabilités		esp. mathématiques		prob.	esp. mathématiques	
t	$R_t \geq 0$	$R_t < 0$	$R_t \mid R_t < 0$	$R_t < 0$	$R_t < x$	$R_t \mid R_t < x$	$R_t < x$
0	1.00000	.00000	1.00000	.00000	.00000	1.00000	.00000
1	.98413	.01587	9.88847	.15693	.25765	12.87440	3.31709
2	.96647	.03353	11.66716	.39120	.31367	14.57930	4.57309
3	.95284	.04716	13.22243	.62357	.31976	16.33062	5.22188
4	.94261	.05739	14.69333	.84325	.31449	18.06976	5.68276
5	.93452	.06548	15.98366	1.04661	.30669	19.69503	6.04027
6	.92807	.07193	17.13027	1.23218	.30070	21.01041	6.31783
7	.92297	.07703	18.17941	1.40036	.29450	22.18278	6.53283
8	.91894	.08106	19.15236	1.55249	.28807	23.26396	6.70165
9	.91576	.08424	20.06078	1.68992	.28176	24.25731	6.83474
10	.91325	.08675	20.91066	1.81400	.27563	25.17502	6.93899

Réassurance du risque de ruine – portefeuille alpha 1
Valeurs actuelles
Provision de fluctuation initiale : $x = 30$
Taux d'actualisation: $i = .0500$
– d'intérêt sur prêts: $i' = .1000$

n	${}_nA_x$	${}_nE_x$	$A_{x:n}$	$\ddot{a}_{x:n}$	$P_{x:n}$
1	.00000	3.15913	3.15913	1.00000	3.15913
2	.01495	4.14793	4.16287	1.93727	2.14884
3	.05043	4.51086	4.56128	2.81388	1.62099
4	.10430	4.67522	4.77952	3.63698	1.31414
5	.17367	4.73271	4.90638	4.41247	1.11193
6	.25567	4.71446	4.97014	5.14469	.96607
7	.34762	4.64276	4.99038	5.83723	.85492
8	.44714	4.53594	4.98308	6.49317	.76743
9	.55222	4.40573	4.95796	7.11514	.69682
10	.66115	4.25994	4.92109	7.70545	.63865

Résumé

L'article propose une forme de réassurance par laquelle le réassureur couvre exclusivement le risque de ruine de la compagnie réassurée: pendant la durée du contrat le réassureur accorde en cas de situation de ruine un prêt du montant du découvert de la provision de fluctuation, prêt qui par la suite s'adapte à l'évolution de ce découvert: A la fin du contrat, le réassureur reconstitue par un paiement la provision de fluctuation à sa valeur initiale si cette provision devait tomber au-dessous de sa valeur initiale.

Zusammenfassung

Der Artikel stellt einen Rückversicherungsvertrag zur Diskussion, bei dem das Ruinrisiko abgedeckt wird: Falls die freien Reserven negativ werden, gewährt der Rückversicherer ein entsprechendes Darlehen, das dann in den folgenden Jahren dem Risikoverlauf angepasst wird. Zudem macht der Rückversicherer am Ende der Vertragsdauer eine Zahlung (falls nötig), welche die freien Reserven auf das anfängliche Niveau bringen.

Summary

The paper proposes a reinsurance treaty, under which the reinsurer covers exclusively the risk of ruin of the insured. During the contractual period the reinsurer lends the necessary amount in the case of ruin. In the following this loan is adjusted dynamically to cover the deficit, and at the end of the period the reinsurer makes a payment (if necessary), so that the contingency reserve raises to its initial level.