

# Zu den Formeln von Black und Scholes für die Preisbestimmung von Optionen

Autor(en): **Müller, Thomas**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): - **(1993)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-550949>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

THOMAS MÜLLER, Basel

## Zu den Formeln von Black und Scholes für die Preisbestimmung von Optionen

### 1 Einleitung

*F. Black* und *M. Scholes* veröffentlichten im Jahr 1973 in ihrer Arbeit «The Pricing of Options and Corporate Liabilities» [B-S] die nun nach ihnen benannte Formel zur Preisbestimmung von europäischen Optionen. Europäische Call-Optionen auf eine Aktie geben das Recht, die Aktie beim Verfall der Option zu einem gegebenen Preis, dem Ausübungspreis, zu kaufen. Die Herleitung von Black und Scholes zur Preisbestimmung einer Call-Option beruht auf folgender Überlegung:

Beim Verfall der Optionen ist der Aktienkurs bekannt, und der Optionenpreis ist dadurch bestimmt. Dies gibt eine Randbedingung für den Optionenpreis. Für einen Zeitpunkt vor dem Verfall kann die Aktie kurzfristig mit einer bestimmten Kombination der risikoreicheren Call-Option und risikolosen Anlagen simuliert werden. Das Verhältnis von Call-Optionen und risikolosen Anlagen muss allerdings dauernd geändert und der Entwicklung des Aktienkurses angepasst werden (bei dem im folgenden beschriebenen diskreten Modell der Aktienkursentwicklung müsste nach jedem Zeitschritt die Kombination angepasst werden). Aus der Möglichkeit, die Aktie mit Call-Option und risikolosen Anlagen zu simulieren, wird in [B-S] geschlossen, dass der Optionenpreis einer bestimmten partiellen Differentialgleichung genügen muss. Die Optionenpreise ergeben sich dann als Lösung der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingung.

Die Herleitung von [B-S] ist nicht nur mathematisch sehr anspruchsvoll. Schon die zugrundeliegenden Modellannahmen unterscheiden sich wesentlich von denjenigen der Versicherungsmathematik. Mit der anschaulichen Erklärung, der Preis der Optionen sei so bestimmt, dass keine risikolosen Gewinne möglich sind, können die Überlegungen von [B-S] zwar stark vereinfacht zusammengefasst werden. Einem einzelnen Kapitalanleger, beispielsweise einer Pensionskasse, welche mit einem Teil ihres Vermögens Call-Optionen kaufen möchte, wird dies als Rechtfertigung des Optionenpreises aber nicht genügen.

Der einzelne Anleger stellt sich die Frage, warum *er* diesen Preis für eine Call-Option zahlen soll, mit welchem durchschnittlichen Ertrag zu rechnen ist, welches

Risiko mit der Anlage verbunden ist und wie sich dies im Ertrag niederschlägt. Den Anleger interessiert, wieviel er von der (aufgrund des Risikos) höher erwarteten Rendite seines Aktienportefeuilles für deren Absicherung mit PUT-Optionen abgeben muss.

In dieser Arbeit wird versucht, eine Antwort auf diese Fragen zu geben. Man sollte sich aber immer bewusst sein, dass alle Überlegungen auf Modellannahmen beruhen, welche die Wirklichkeit nur unvollständig beschreiben können. Die wichtigste und damit problematischste Annahme besteht in der Modellierung der Dynamik des Aktienkurses als geometrische Brownsche Bewegung.

Der Autor möchte sich herzlich bei *Jean Jacques Knutti* (ETH Zürich) bedanken, der mit seinen wertvollen Anregungen zu dieser Arbeit beigetragen hat.

## 2 Preisbestimmung im diskreten Modell

Zuerst wenden wir uns einem einfachen Modell zu. Eine Aktie habe zur Zeit  $t = 0$  den Wert  $X_0$ . Zur Zeit  $t = 1$  seien zwei Kurse, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  möglich:

$$X_1 = \begin{cases} (1 + \tau + \mu + \sigma)X_0 \\ (1 + \tau + \mu - \sigma)X_0 \end{cases} \quad (1)$$

Wir nehmen an, ein Wertpapier  $W_s$  berechne zum Bezug des Betrages “1” zum Zeitpunkt  $t = 1$ , falls der Aktienkurs gestiegen ist und entsprechend berechne ein Wertpapier  $W_f$  bei einem gefallenem Kurs zum Bezug des Betrages “1”. Mit diesen beiden Wertpapieren kann die Aktie simuliert werden, d.h. das Portefeuille  $(1 + \tau + \mu + \sigma)X_0 \cdot W_s \& (1 + \tau + \mu - \sigma)X_0 \cdot W_f$  hat zum Zeitpunkt 1 den gleichen Wert wie die Aktie, unabhängig davon ob die Aktie gestiegen oder gesunken ist. Wir nehmen weiterhin an, die Rendite von risikolosen Anlage betrage  $\tau$ . Das Portefeuille  $(1 + \tau) \cdot W_s \& (1 + \tau) \cdot W_f$  hat unabhängig vom Aktienkurs zum Zeitpunkt 1 den Wert  $1 + \tau$ . Zum Zeitpunkt 0 muss der Preis des ersten Portefeuilles  $X_0$  und derjenige des zweiten Portefeuilles 1 sein. Ansonsten könnte ein Anleger mit einem Kauf dieses Portefeuilles und einem Verkauf Aktie bzw. der risikolosen Anlage oder umgekehrt einen sicheren Gewinn erzielen und wir nehmen in unserem Modell an, dass keine risikolose Arbitrage möglich ist. Die beiden Portefeuilles bestimmen die Preise  $P_s$  und  $P_f$  der beiden Wertpapiere  $W_s$  und  $W_f$  zum Zeitpunkt 0. Die Gleichungen

$$(1 + \tau + \mu + \sigma)P_s + (1 + \tau + \mu - \sigma)P_f = 1 \quad (2a)$$

und

$$(1 + \tau) \cdot (P_s + P_f) = 1 \quad (2b)$$

haben die Lösung

$$P_s = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right) v = \left(\frac{\sigma - \mu}{2\sigma}\right) v$$

$$P_f = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\right) v = \left(\frac{\sigma + \mu}{2\sigma}\right) v$$

mit dem Diskontierungsfaktor  $v = (1 + \tau)^{-1}$ . Gleichung (2b) kann z.B. durch Addition der jeweiligen beiden ersten Terme überprüft werden. Zum Nachweis von Beziehung (2a) verwenden wir

$$(1 + \tau + \mu + \sigma) \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right) + (1 + \tau + \mu - \sigma) \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\right) = 2(1 + \tau).$$

### 3 Rendite und Risiko

#### 3.1 Die Rendite von Kapitalanlagen

Im Capital Asset Pricing Model (CAPM) lässt sich die erwartete Rendite einer Kapitalanlage in eine Rendite für risikolose Anlagen und eine durchschnittliche Rendite aufgrund des Risikos zerlegen

$$E[R_i] = \tau + \beta_i \mu_M. \quad (3)$$

Dabei sei

$\tau$ : Rendite für risikolose Anlagen

$R_M$ : Rendite des Marktportefeuilles ( $R_M$  ist eine Zufallsvariable)

und

$E[R_M] = \tau + \mu_M$ : Erwartungswert der Rendite des Marktportefeuilles.

Die Renditen  $R_i$  von Kapitalanlagen werden als Zufallsvariablen aufgefasst. Der  $\beta$ -Faktor

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)}$$

misst die Korrelation der Rendite einer Anlage  $i$  mit derjenigen des Marktportefeuilles. Nehmen wir  $\mu_M > 0$  an, so kann das CAPM folgendermassen interpretiert werden: Das Risiko des Marktportefeuilles berechtigt offensichtlich zu einer um  $\mu_M$  erhöhten Rendite. Bei Anlagen mit grossem  $\beta$ -Faktor wird das Risiko des Marktportefeuilles verstärkt, weshalb die erwartete Rendite entsprechend höher als beim Marktportefeuille sein sollte. Anlagen mit negativem  $\beta$ -Faktor sind negativ korreliert mit dem Marktportefeuille. Mit diesen Anlagen kann das Risiko des Marktportefeuilles reduziert werden und deshalb muss sogar eine geringere erwartete Rendite als bei risikolosen Anlagen in Kauf genommen werden.

### 3.2 Rendite und Risiko im diskreten Modell

Der Renditen der Wertpapiere  $W_s$  und  $W_f$  sind Zufallsvariablen, welche wir als  $R_s$  resp.  $R_f$  bezeichnen. Die Renditen hängen davon ab, ob die Aktie zum Zeitpunkt 1 gestiegen oder gesunken ist. Die erwartete Rendite des Wertpapiers  $W_s$  beträgt

$$\begin{aligned} E[R_s] &= \frac{1/2}{P_s} - 1 \\ &= (1 + \tau) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right)^{-1} - 1 \\ &= \left(\tau + \frac{\mu}{\sigma}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right)^{-1} \\ &= \tau + \frac{\mu}{\sigma}(1 + \tau) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

In diesem einfachen diskreten Modell ist das CAPM auch gültig, wobei naheliegenderweise die Aktie  $X$  als Marktportefeuille aufgefasst wird. Die Rendite der Aktie ist dann die Zufallsvariable

$$\frac{\Delta X}{X} = \tau + \mu \pm \sigma.$$

Durch Ausrechnen findet man

$$\text{Cov}\left(R_s, \frac{\Delta X}{X}\right) = \sigma(1 + \tau) \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right)^{-1},$$

womit die Gültigkeit der CAPM-Beziehung (3) für das Wertpapier  $W_s$  bestätigt wird. Für das Wertpapier  $W_f$  ergibt sich entsprechend

$$E[R_f] = \tau - \frac{\mu}{\sigma}(1 + \tau) \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\right)^{-1}$$

und

$$\text{Cov}\left(R_t, \frac{\Delta X}{X}\right) = -\sigma(1 + \tau) \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\right)^{-1}.$$

#### 4 Das diskrete Modell mit mehreren Zeitschritten

Wir bereiten nun den Übergang zum kontinuierlichen Modell vor. Zum Zeitpunkt  $t$  sei der Aktienkurs  $X_t$ . Zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  sei der Aktienkurs

$$X_t \cdot (1 + (\tau + \mu)\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}) \quad (5)$$

jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  für ein Steigen oder Sinken. Wir stellen uns vor, ein zum Zeitpunkt 0 erworbenes Wertpapier  $W = W(X_t)$  berechtige zum Bezug des Betrages "1", wenn die Aktie nach mehreren Zeitschritten zu einem vorgegebenen Zeitpunkt einen bestimmten Kurs  $X_t$  annimmt, wobei der Aktienverlauf längs eines fest vorgegebenen Weges erfolgen soll (siehe Graphik). Dieses Papier kann dann mit den Wertpapieren  $W_s$  und  $W_f$  nachgebildet werden. Im folgenden bezeichnen wir eins plus die erwartete Rendite als das erwartete Wachstum einer Kapitalanlage. Das Wachstum ist die geeignete Grösse für den Übergang auf mehrere Zeitschritte. Das (erwartete) Wachstum des Wertpapiers  $W$  ist das Produkt des (erwarteten) Wachstums der  $a$  Wertpapiere  $W_s$  und der  $b$  Wertpapiere  $W_f$  mit denen es nachgebildet werden kann:

$$\begin{aligned} 1 + E[R_w] &= \prod_1^a (1 + E[R_s]) \cdot \prod_1^b (1 + E[R_f]) \\ &= \prod_1^a \left(1 + \tau\Delta t + \frac{\mu}{\sigma^2} \text{Cov}\left(R_s, \frac{\Delta X}{X}\right)\right) \\ &\quad \times \prod_1^b \left(1 + \tau\Delta t + \frac{\mu}{\sigma^2} \text{Cov}\left(R_f, \frac{\Delta X}{X}\right)\right) \end{aligned} \quad (6a)$$

Das erwartete Wachstum ist somit nicht vom vorgegebenen Weg und nur vom Aktienkurs  $X_t$  abhängig.

Bezeichnen wir mit  $o(\Delta t)$  Terme mit  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(R_s, \frac{\Delta X}{X}\right) &= \sigma\sqrt{\Delta t}(1 + \tau\Delta t) \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)^{-1} \\ &= \sigma\sqrt{\Delta t} + \mu\Delta t + o(\Delta t) \\ &= \frac{\Delta X}{X} - \tau\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

mit  $\frac{\Delta X}{X} = \sigma\sqrt{\Delta t} + (\tau + \mu)\Delta t$  bei einem steigendem Kurs und

$$\begin{aligned}\text{Cov}\left(R_t, \frac{\Delta X}{X}\right) &= -\sigma\sqrt{\Delta t}(1 + \tau\Delta t) \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)^{-1} \\ &= -\sigma\sqrt{\Delta t} + \mu\Delta t + o(\Delta t) \\ &= \frac{\Delta X}{X} - \tau\Delta t + o(\Delta t)\end{aligned}$$

mit  $\frac{\Delta X}{X} = -\sigma\sqrt{\Delta t} + (\tau + \mu)\Delta t$  bei einem fallendem Kurs.

Diese beiden Beziehungen ergeben in (6a) eingesetzt

$$\begin{aligned}1 + E[R_w] &= \prod_1^{a+b} (1 + \tau\Delta t) \cdot \prod_{j=0 \cdot \Delta t}^{(a+b-1)\Delta t} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma^2} \left(\frac{\Delta X_j}{X_j} - \tau\Delta t\right)\right) + o(\Delta t) \\ &= \prod_1^{a+b} (1 + \tau\Delta t) \cdot F_t(X_t) + o(\Delta t) \\ &= e^{\tau t} \cdot F_t(X_t) + o(\Delta t),\end{aligned}\tag{6b}$$

mit  $\Delta X_j = X_{j+1} - X_j$ .

$F_t$  hängt wie das erwartete Wachstum nicht vom vorgegebenen Weg und nur vom Aktienkurs  $X_t$  ab.

Der Faktor  $e^{\tau t}$  stellt das risikounabhängige Wachstum dar und  $F_t = F_t(X_t)$  kann als *Wachstum* des Wertpapiers  $W = W(X_t)$  *aufgrund des Risikos* interpretiert werden. Die additive Zerlegung der erwarteten Renditen (im CAPM ebenso wie) im diskreten Modell mit einem Zeitschritt führt beim Übergang auf mehrere Zeitschritte zu einer multiplikativen Zerlegung des erwarteten Wachstums (unter Vernachlässigung des Fehlerterms  $o(\Delta t)$ ).

Beim Übergang vom CAPM mit einem festen Planungshorizont zum Intertemporal CAPM ist dies ähnlich: Das Intertemporal CAPM ergibt eine additive Beziehung der erwarteten Wachstumsintensitäten. Das erwartete Wachstum einer Kapitalanlage in einem Zeitintervall ergibt sich somit als Produkt des Wachstums für risikolose Anlagen und eines im Risiko dieser Kapitalanlage begründeten (anlagespezifischen) Wachstums (vgl. [I], Kap. 13). Die Formeln von *Black* und *Scholes* lassen sich auch aus dem Intertemporal CAPM, auch als die continuous-time Version des CAPM bezeichnet, herleiten [I], Kap. 14).

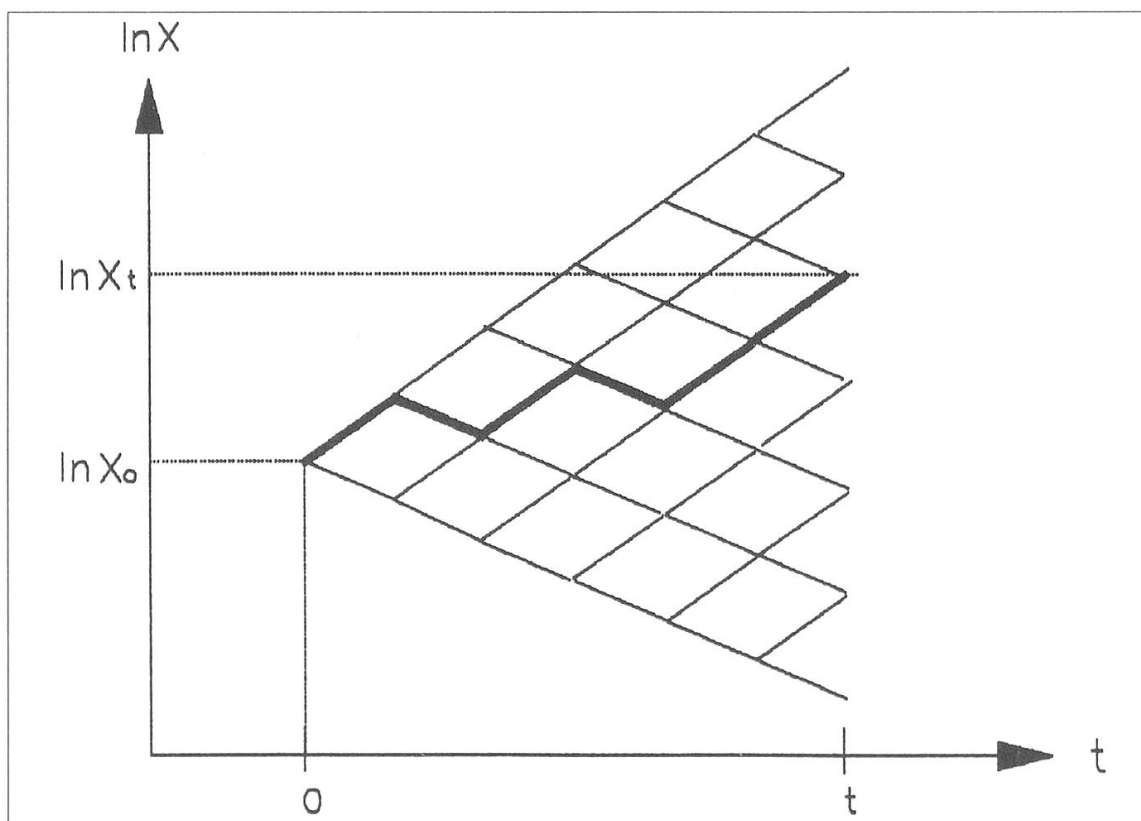
Für das Wachstum aufgrund des Risikos

$$F_k = \prod_{j=0 \cdot \Delta t}^{(k-1) \cdot \Delta t} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma^2} \left( \frac{\Delta X_j}{X_j} - \tau \Delta t \right) \right)$$

gilt

$$\frac{F_{k+1} - F_k}{F_k} = \frac{\Delta F_k}{F_k} = \frac{\mu}{\sigma^2} \left( \frac{\Delta X_k}{X_k} - \tau \Delta t \right). \quad (7a)$$

Damit ist die relative Änderung des Wachstums (aufgrund des Risikos) proportional zur relativen Änderung des Aktienkurses  $X_t$ , bei welchem das Wertpapier  $W = W(X_t)$  zu Bezügen führt, abzüglich des Zinses für risikolose Anlagen.



Graphik zum diskreten Modell mit mehreren Zeitschritten:

Wird im diskreten Modell mit mehreren Zeitschritten jeweils der Logarithmus des Aktienkurses aufgetragen, so ergibt sich ein gerades Gitter. Bei dem hier fett in das Gitter eingetragenen Verlauf würde man also viermal auf ein Steigen des Aktienkurses (mit einem höheren erwarteten Wachstum, falls dies für die Aktie insgesamt auch angenommen wird) und zweimal auf ein Sinken des Aktienkurses (mit einem tieferen erwarteten Wachstum) setzen.



## 5 Übergang auf das kontinuierliche Modell

Lässt man  $\Delta t$  gegen 0 streben, so konvergiert der in (5) definierte Prozess in Wahrscheinlichkeit gegen die geometrische Brownsche Bewegung  $X_t$ , welche durch die Stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\tau + \mu) dt + \sigma dB_t \quad (8)$$

definiert wird, mit  $dB_t =$  Differential des standardisierten Wiener Prozesses. Die Gleichung (7a) wird für  $\Delta t \rightarrow 0$  zu

$$\frac{dF_t}{F_t} = \frac{\mu}{\sigma^2} \left( \frac{dX_t}{X_t} - \tau dt \right). \quad (7b)$$

Aus der Differentialgleichung (7b) soll  $F_t(X_t)$  bestimmt werden. (7b) beschreibt allerdings keine Differentialgleichung im üblichen Sinn, insbesondere ist  $X_t$  ein stochastischer Prozess und kein differenzierbarer Weg. Deshalb kann  $X_t$  nicht wie in der Analysis differenzierbarer Funktionen durch Integration unter Verwendung der üblichen Integrationsformeln bestimmt werden. Statt dessen muss die Stochastische Analysis von Itô eingesetzt werden (siehe z.B. [A] oder [I]). Mit dem Ansatz

$$F := F_t(X_t) = \exp \left[ \frac{\mu}{\sigma^2} (\ln X_t - \ln x_0 - \tau t) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t + \frac{\mu}{2} t \right] \quad (9)$$

folgt Gleichung (7b) aus dem Kalkül von Itô (bei verkürzter Schreibweise  $X$  und  $F$  für  $X_t$  und  $F_t$ )

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} dX^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\ &= F \left( \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{dX}{X} \right) + \frac{1}{2} F \left( \frac{\mu^2}{\sigma^4} \frac{dX^2}{X^2} - \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{dX^2}{X^2} \right) \\ &\quad + F \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} \tau dt - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} dt + \frac{\mu}{2} dt \right). \end{aligned}$$

Um diese Gleichung auf (7b) zurückzuführen, verwenden wir

$$dX^2 = [X((\tau + \mu)dt + \sigma dB)]^2 = X^2 \sigma^2 dB^2 = X^2 \sigma^2 dt.$$

Produkte von Differentialen verschwinden bis auf den Term  $dB^2 = dt$  aus der Stochastischen Analysis. Neben der stochastischen Differentialgleichung (7b) ist  $F$  durch die Randbedingung  $F_0(X_0) = 1$  bestimmt, welche von dem in (9) gegebenen  $F$  auch erfüllt wird.

## 6 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Aktienkurses

Wir führen die folgende Bezeichnung für die Dichte der durch die beiden Parameter  $a$  und  $b$  bestimmten logarithmischen Normalverteilung ein.

$$\text{LNV}\{a, b\}(x) := \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - a}{b} \right)^2 \right]$$

Im Unterschied zur Normalverteilung sind  $\exp(a)$  und  $b$  bei der logarithmischen Normalverteilung nicht gleich dem Erwartungswert ( $= \exp(a + 1/2b^2)$ ) bzw. der Streuung. Genügt  $X_t$  der stochastischen Differentialgleichung (8) mit Anfangswert  $X_0 = x_0$ , so ist  $X_t$  bei gegebenem  $t$  logarithmisch normalverteilt mit Erwartungswert  $\exp(a + 1/2b^2) = x_0 \exp[(\tau + \mu)t]$  und dem für die Streuung massgeblichen Parameter  $b = \sigma\sqrt{t}$ . Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X_t$  hat also die Dichte

$$\begin{aligned} w_t(x) &= \text{LNV} \left\{ (\tau + \mu)t - \frac{1}{2}\sigma^2t + \ln x_0, \sigma\sqrt{t} \right\} (x) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - (\tau + \mu)t + \frac{1}{2}\sigma^2t - \ln x_0}{\sigma\sqrt{t}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

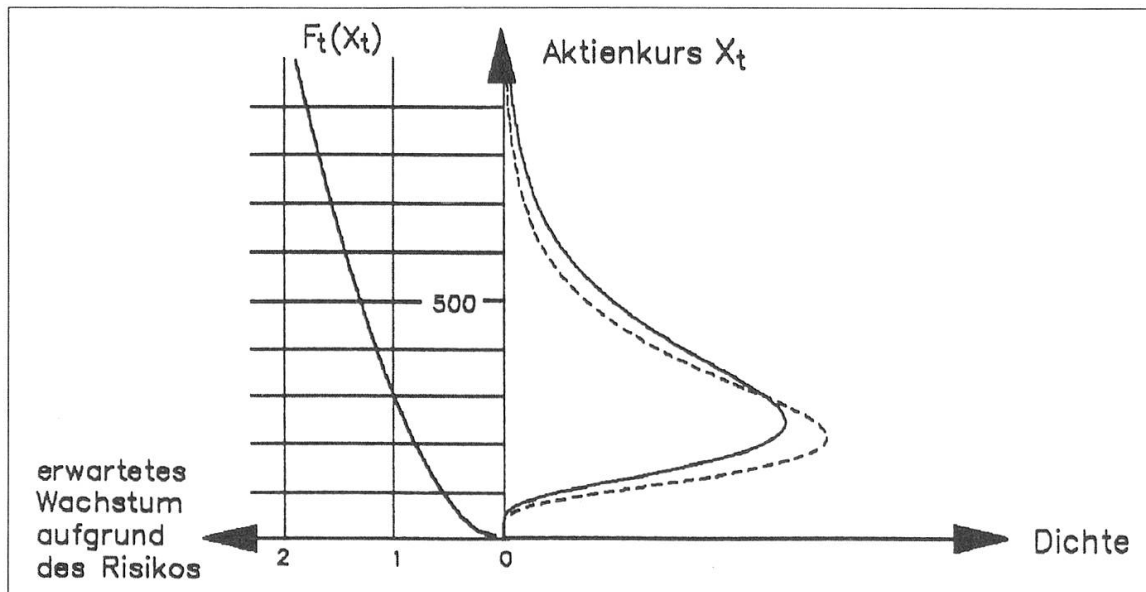
Zwischen den Dichtefunktionen logarithmischer Normalverteilungen und  $F_t(x)$  besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} w_t(x) &= \text{LNV} \left\{ (\tau + \mu)t - \frac{1}{2}\sigma^2t + \ln x_0, \sigma\sqrt{t} \right\} (x) \\ &= \text{LNV} \left\{ \tau t - \frac{1}{2}\sigma^2t + \ln x_0, \sigma\sqrt{t} \right\} (x) \cdot F_t(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Zum Nachweis von (10) genügt es, die Exponenten zu betrachten. Die Gleichung (10) reduziert sich dann auf die im Anhang aufgeführte quadratische Ergänzung.

## Beispiel 1

$x_0 = 400$ ;  $t = 1$ ;  $\tau = 0.07$ ;  $\mu = 0.06$ ;  $\sigma = 0.22$

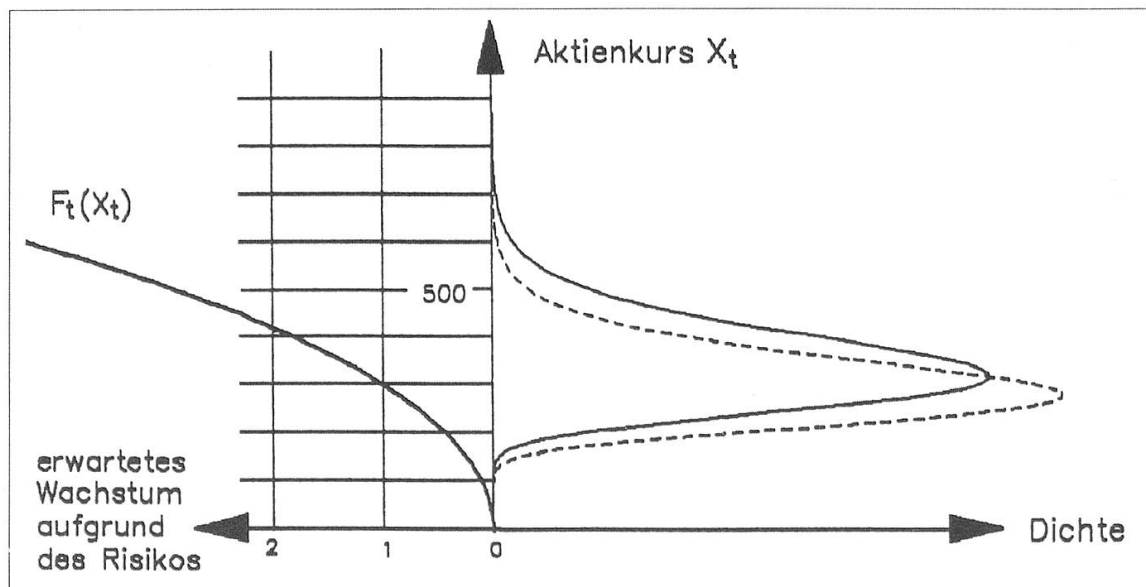


— Dichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung:  $w_t(x)$

---- Dichte der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsvtl.:  $w_t(x) \cdot F_t(x)^{-1}$

## Beispiel 2

$x_0 = 400$ ;  $t = 1$ ;  $\tau = 0.07$ ;  $\mu = 0.06$ ;  $\sigma = 0.11$



— Dichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung:  $w_t(x)$

---- Dichte der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsvtl.:  $w_t(x) \cdot F_t(x)^{-1}$

Beispiel 2 hat gleiche Parameter wie Beispiel 1, ausser  $\sigma$ , welches mit  $\sigma = 0.11$  nur halb so gross wie in Beispiel 1 gewählt wurde. Trotz kleinerer Schwankungen des Aktienkurses ist der Ertrag  $\mu$  aus dem Risiko gleich gross. Das Risiko wird hier offenbar unangenehmer eingeschätzt als in Beispiel 1 und deshalb ist die Kurve des Wachstumsfaktors auch steiler.

## 7 Der Preis der CALL-Optionen

Der Besitzer einer CALL-Option zum Ausübungspreis  $c$  und Verfalldatum  $t$  erhält bei einem Aktienkurs  $X_t = x > c$  den Betrag  $x - c$  ausgezahlt. Das Wertpapier, welches zum Bezug des Betrags  $x - c$  bei einem Aktienkurs  $X_t = x$  berechtigt, hat ein erwartetes Wachstum von  $e^{\tau t} F_t(X_t)$  und damit zum Zeitpunkt 0 den Preis  $(x - c)w_t(x)F_t(x)^{-1}e^{-\tau t}$ .

Der Preis mehrerer derartiger Wertpapiere ist gleich der Summe der Preise der einzelnen Wertpapiere. Sonst könnte ein Anleger durch den Kauf eines Paketes und den Verkauf einzelner Papiere oder umgekehrt risikolose Gewinne erzielen, und wir schliessen dies in unserem Modell aus. (Im Unterschied dazu addieren sich die Prämien einzelner Versicherungsportefeuilles in der Regel nicht zur Prämie des Gesamtportefeuilles. Die Versicherungsportefeuilles werden auch an keiner Börse gehandelt.) Der Preis  $C(c)$  der Call-Option ergibt sich dann als Summe dieser Preiskomponenten

$$C(c) = \int_c^{\infty} (x - c)w_t(x) \cdot F_t(x)^{-1}e^{-\tau t} dx \quad (11)$$

und gemäss (10) ist

$$w_t(x)F_t(x)^{-1}e^{-\tau t} = \text{LNV} \left\{ \tau t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \ln x_0, \sigma\sqrt{t} \right\} (x) \cdot e^{-\tau t}. \quad (12)$$

Insbesondere ist der Optionenpreis unabhängig von der durchschnittlichen Rendite  $\mu$ . Etwas vereinfacht kann dies folgendermassen begründet werden:

Nehmen wir an, einer Aktie wird mit einem relativ grossen  $\mu$  eine recht hohe erwartete Rendite aus dem Risiko zugeschrieben. Wegen des recht hohen erwarteten Wachstums der Aktie ist auch mit einem hohen erwarteten Ertrag der CALL-Option zu rechnen. Konsequenterweise muss der CALL-Option wie der Aktie aber auch eine hohe durchschnittliche Rendite aus dem Risiko zugeschrieben werden.

Dies reduziert wiederum den Preis, der schliesslich unabhängig von  $\mu$  ist. Man bezeichnet  $w_t(x)F_t(x)^{-1}$  auch als die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die zur Preisbestimmung von Optionen nach (11) verwendet wird. In diesen risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ist die Bewertung des Risikos, welches das Wachstum aufgrund des Risikos rechtfertigt, schon eingerechnet. Die Beziehung (12) zeigt, dass  $w_t(x)F_t(x)^{-1}$  wirklich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt. Es ist die logarithmische Normalverteilung, welche der Aktienkurs zum Zeitpunkt  $t$  bei gleichen Parametern  $\tau$ ,  $\sigma$  und  $X_0$ , aber mit verschwindendem Trend  $\mu = 0$  haben würde.

Mit den folgenden beiden Identitäten

$$\int_c^\infty \text{LNV}\{a, b\}(x) dx = 1 - N\left(\frac{\ln c - a}{b}\right) = N\left(\frac{a - \ln c}{b}\right)$$

und

$$\int_c^\infty x \text{LNV}\{a, b\}(x) dx = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right) N\left(\frac{a + b^2 - \ln c}{b}\right)$$

erhält man die Formel von Black-Scholes:

$$C(c) = x_0 N(d_1) - ce^{-\tau t} N(d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x_0}{c}\right) + \tau t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{x_0}{c}\right) + \tau t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$$

und der kumulativen Normalverteilung  $N(d)$ .

Thomas Müller  
Basler  
Lebens-Versicherungs-Gesellschaft  
Aeschengraben 21  
4002 Basel

## Anhang

Zur Übereinstimmung der Exponenten bei Gleichung (10) gehen wir von folgender quadratischer Ergänzung aus:

$$-\frac{1}{2} \left\{ \ln x - (\tau + \mu)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t - \ln x_0 \right\}^2 =$$

$$-\frac{1}{2} \left\{ \left[ \ln x - \tau t + \frac{1}{2}\sigma^2 t - \ln x_0 \right]^2 + \mu^2 t^2 - 2\mu\tau t^2 - 2\mu t(\ln x - \ln x_0) + \mu\sigma^2 t^2 \right\}$$

Dividiert man die ergänzenden Summanden durch  $2\sigma^2 t$ , so erhält man den Exponenten von  $F_t(x)$  (vgl. (9)):

$$\frac{\mu}{\sigma^2} (\ln x - \ln x_0 - \tau t) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t + \frac{\mu}{2} t$$

## Literaturverzeichnis

- [A] *Arnold, L.* (1973): Stochastische Differentialgleichungen. R. Oldenbourg Verlag, München/Wien.
- [B-S] *Black, F./Scholes, M.* (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637–654.
- [C] *Cummins, David J.* (1990): Asset Pricing Models and Insurance Ratemaking. *ASTIN Bulletin* 20, 125–166.
- [I] *Ingersoll Jr., Jonathan E.* (1987): *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield Publishers.
- [Me] *Merton, Robert, C.* (1973): An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica* 41, 867–880.
- [S-F] *Schweizer, M., Föllmer, H.* (1988): Hedging by Sequential Regression: An Introduction to Mathematics of Options Trading. *ASTIN Bulletin* 18, 147–160.
- [Mü] *Müller, H.H.* (1988): Modern Portfolio Theory: Some main results. *ASTIN Bulletin* 18, 127–146.

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Formeln von Black und Scholes zur Bestimmung des Preises von Optionen auf Aktien vom Gesichtspunkt eines Kapitalanlegers betrachtet und neu hergeleitet.

Dabei wird untersucht, wie sich die Annahmen über Rendite und Risiko der Aktie auf speziell definierte Wertpapiere auswirken. Mit diesen Wertpapieren wird auf das Erreichen eines bestimmten Aktienkurses zum Ausübungszeitpunkt der Option spekuliert. Vom einfachen, diskreten Modell werden diese Überlegungen auf das Modell einer Aktienkursentwicklung mit mehreren Zeitschritten übertragen. Beim Übergang auf das kontinuierliche Modell einer geometrischen Brownschen Bewegung ergibt sich eine stochastische Differentialgleichung für das im Risiko der Aktie begründete erwartete Wachstum der definierten Wertpapiere. Der Preis einer Call-Option kann dann als gewichtete Summe der Preise der Wertpapiere dargestellt werden.

## Résumé

Le présent article a pour objet l'analyse, du point de vue d'un investisseur, des formules de Black et Scholes permettant de déterminer le prix des options sur les actions.

Nous étudions comment des titres particuliers réagissent aux hypothèses faites sur le rendement et le risque d'une action. Avec ces titres nous spéculons sur le cours que l'action atteindra à l'échéance de l'option. Nous traitons d'abord du modèle discret à une période que nous étendons au modèle discret à plusieurs périodes pour décrire l'évolution du cours de l'action. En passant au modèle continu du mouvement brownien géométrique, nous obtenons une équation différentielle stochastique décrivant la hausse attendue de la valeur des titres due au risque afférent à l'action. Enfin, nous exprimons le prix d'un Call comme somme pondérée des prix des titres.

## Summary

In this paper the formulas of Black and Scholes to determine the price of options on shares are looked at from the viewpoint of an investor and newly derived.

We investigate how the assumptions made on yield and risk of the share influence special defined securities. With these securities we speculate on a given share price at the exercise date of the option. Starting with the simple discrete model with one time step and using our considerations on yield and risk, we progress to the model of the development of prices of shares with several time steps. When extending to the continuous model of a geometric brownian motion, the expected increase in value of the defined securities due to the risk of the share is described by a stochastic differential equation. Finally the price of the option is described as a weighted sum of the prices of the securities.