Ein individuell-kollektives Modell für Schadenzahl-Verteilungen

Reinhard Michel, Wuppertal

Ein individuell-kollektives Modell für Schadenzahl-Verteilungen

1 Das Modell der Schadenzahl-Verteilung

Betrachtet werde das kollektive Modell der Risikotheorie, wobei der Gesamtschaden des Kollektivs in einer Periode die Verteilung

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\} Q^{*k}$$

besitzt. Hierbei ist R mit $R\{0, 1, 2, \ldots\} = 1$ die sogenannte Schadenzahl-Verteilung und Q mit $Q(0, \infty) = 1$ die Einzelschaden-Verteilung. Die in der Praxis am häufigsten benutzten Schadenzahl-Verteilungen (siehe *Straub* [5], Seite 18) sind dabei die Binomial-, die Poisson-, die negative Binomial- und die logarithmische Verteilung, deren wesentlicher Vorteil in der allgemein bekannten Rekursionsformel liegt, die dann das Panjersche Rekursionsverfahren für die Verteilung P liefert.

Ein Nachteil des wichtigsten Modells der Poisson-Verteilung ist die Tatsache, dass hier Varianz und Mittelwert identisch sind, was sicher oft empirischen Beobachtungen widerspricht. Ferner steht hier auch nur ein freier Parameter, nämlich der Mittelwert, zur Anpassung zur Verfügung. Das zweitwichtigste Modell, nämlich die negative Binomialverteilung besitzt zwei Parameter und es gilt, dass die Varianz grösser ist als der Mittelwert. (Über die Ammeter-Transformation kann man die Gesamtschaden-Verteilung hierbei auf das Poisson-Modell umrechnen, so dass wichtige Ergebnisse aus der Theorie der Ruinwahrscheinlichkeiten angewandt werden können).

Unser im folgenden betrachtetes Modell ist reichhaltiger als die oben erwähnten, da es für die Anpassung an empirische Daten drei freie Parameter besitzt, es eröffnet ferner eine Panjer-ähnliche Rekursion für die Gesamtschaden-Verteilung und lässt sich schliesslich auf das Poisson-Modell umtransformieren. Ein auch für die Praxis unschätzbarer Vorteil ist weiterhin, dass wir unbegrenzt teilbare Verteilungen betrachten.

Gegeben sei dabei eine generelle, eventuell von der Versicherungssparte abhängige, Schadenzahl-Verteilung R. Betrachtet werden n Risiken mit individueller Schadenzahl-Verteilung

$$R_i = (1 - p_i)\delta_0 + p_i R, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wobei $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, und δ_0 die in $\{0\}$ konzentrierte Verteilung ist. Die Verteilung der Schadenzahl des Kollektivs
ist dann die Faltung der R_i, $i = 1, \ldots, n$, die sehr gut (siehe das Ergebnis bei *Michel* [3]) durch die *zusammengesetzte Poisson-Verteilung* $P(\lambda, R)$ mit $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$ approximiert werden kann. Hierbei ist

$$P(\lambda, R) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} R^{*k}.$$

Mit der Supremums-Metrik d folgt für die Güte der Approximation der Gesamtschaden-Verteilung

$$\begin{aligned} & d\left(\sum_{k=0}^{\infty} (R_1 * \cdots * R_n)\{k\} Q^{*k}, \sum_{k=0}^{\infty} P(\lambda, R)\{k\} Q^{*k}\right) \\ & \leq d(R_1 * \cdots * R_n, P(\lambda, R)) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 / \sum_{i=1}^{n} p_i. \end{aligned}$$

In Absatz 3 wird dabei R als Poisson-Verteilung s-ter Stufe, $s = 0, 1, 2, \ldots$, angesetzt (bezüglich der Namensgebung siehe Lemma 2). Ist diese Q_s, so ergibt $P(\lambda, Q_s)$ für $s = 0, 1, 2$ die Neymanschen «ansteckenden» Verteilungen vom Typ A, B und C (siehe [4]), die Verallgemeinerungen für beliebige s wurden in [1] betrachtet.
Bezüglich der Ergebnisse des ersten Teils der vorliegenden Arbeit sei auch auf die Resultate von *Thyrion* ([6] und [7]) verwiesen, auf die mich ein Referent freundlicherweise aufmerksam gemacht hat.

2 Eine Transformation der Gesamtschaden-Verteilung

Gemäss obigem Ansatz betrachten wir also im folgenden die Gesamtschaden-Verteilung

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P(\lambda, R)\{k\} Q^{*k},$$

wobei $\lambda > 0$, $R\{0, 1, 2, \ldots\} = 1$ und $Q(0, \infty) = 1$.

Als erstes Ergebnis haben wir dabei, dass eine Ammeter-Transformation möglich ist, die P in eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung überführt.

Satz 1: *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\lambda, R)\{k\}Q^{*k} = P(\lambda, D),$$

wobei

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\}Q^{*k}.$$

Bei der Interpretation dieses Resultats ist zu beachten, dass die Intensität λ von $P(\lambda, D)$ die Summe der gegebenen individuellen p_i, $i = 1, \ldots, n$, ist, während D zusammengesetzt wird aus der generellen Schadenzahl-Verteilung R und der Einzelschaden-Verteilung Q.

Beweis: Es sei $\varphi_P(t)$ die charakteristische Funktion der Verteilung P und, für Q mit $Q\{0, 1, 2, \ldots\} = 1$, $m_Q(t)$ die erzeugende Funktion des Wahrscheinlichkeitsmasses Q.
Ist

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P(\lambda, R)\{k\}Q^{*k}$$

so haben wir

$$\varphi_P(t) = m_{P(\lambda,R)}(\varphi_Q(t))$$

und, mit der Poisson-Verteilung P_λ,

$$m_{P(\lambda,R)}(s) = m_{P_\lambda}(m_R(s)).$$

Weiterhin gilt

$$\varphi_{P(\lambda,D)}(t) = m_{P_\lambda}(\varphi_D(t))$$

und

$$\varphi_D(t) = m_R(\varphi_Q(t)).$$

Bemerkung: Wählt man in unserem Modell die generelle Schadenzahl-Verteilung R als eine der anfangs erwähnten Standardverteilungen für Schadenzahlen, so lässt sich aufgrund von Satz 1 die Gesamtschaden-Verteilung

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P(\lambda, R)\{k\} Q^{*k}$$

bei diskretem Q durch zweifache Anwendung des Panjerschen Verfahrens rekursiv berechnen.
Für $R = \delta_1$ ist $P(\lambda, R)$ gleich der Poisson-Verteilung P_λ. Somit kann unser Ansatz als Verallgemeinerung der Poissonschen Summenverteilung betrachtet werden. Ferner ist zu beachten, dass die Varianz von $P(\lambda, R)$ stets grösser oder gleich dem Mittelwert ist, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} kR\{k\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 R\{k\}.$$

3 Die Poisson-Verteilung s-ter Stufe

Für $b > 0$ und $s = 0, 1, 2, \ldots$ definieren wir

$$\begin{aligned} Q_s\{k\} &= Q_{s,b}\{k\} \\ &= b^k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{i} (-b)^i \frac{s!}{(k+i+s)!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Hierbei ist als erstes nachzuweisen, dass ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\{0, 1, 2, \ldots\}$ festgelegt wird, d.h. dass gilt

$$Q_s\{k\} \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} Q_s\{k\} = 1.$$

Dies ergibt sich induktiv aus

Lemma 1: *Für* $s = 0, 1, 2, \ldots$ *und* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt*

$$b^{s+1} Q_{s+1,b}\{k\} = (s+1) \int_0^b x^s Q_{s,x}\{k\}\, dx.$$

Beweis: Wir haben

$$b^{s+1} Q_{s+1,b}\{k\} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{i} (-1)^i b^{k+s+i+1} \frac{(s+1)!}{(k+s+i+1)!}.$$

Differenzieren nach b ergibt

$$\begin{aligned}
\left(b^{s+1} Q_{s+1,b}\{k\}\right)' &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{i} (-1)^i b^{k+s+i} \frac{(s+1)!}{(k+s+i)!} \\
&= (s+1) b^s Q_{s,b}\{k\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Zum Nachweis, dass Q_s ein Wahrscheinlichkeitsmass ist, beachte man, dass

$$Q_0\{k\} = b^k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{i} (-b)^i \frac{1}{(k+i)!} = e^{-b} \frac{b^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

d.h. $Q_s\{k\} \geq 0$, $s, k = 0, 1, 2, \dots$ und weiter

$$\begin{aligned}
b^{s+1} \sum_{k=0}^{\infty} Q_{s+1,b}\{k\} &= (s+1) \int_0^b x^s \sum_{k=0}^{\infty} Q_{s,x}\{k\}\, dx \\
&= (s+1) \int_0^b x^s\, dx = b^{s+1},
\end{aligned}$$

falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_{s,x}\{k\} = 1, \quad x > 0,$$

als Induktionsvoraussetzung angenommen ist.
Als weitere Eigenschaft der Verteilung Q_s folgt aus Lemma 1

Lemma 2: (i) *Es gilt (Differentiation nach b)*

$$\frac{1}{s!} \left(b^s Q_{s,b}\{k\}\right)^{(s)} = e^{-b} \frac{b^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) *Wir haben* $Q_0 = P_b$ *(Poisson-Verteilung mit Mittelwert* b*) und für* $s \in \mathbb{N}$

$$Q_s\{k\} = \frac{s}{b} Q_{s-1}(k, \infty), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Insbesondere folgt

$$Q_1\{k\} = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-b} \sum_{i=0}^{k} \frac{b^i}{i!}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$Q_2\{k\} = \frac{2}{b^2}\left[b - \sum_{i=0}^{k}\left(1 - e^{-b} \sum_{j=0}^{i} \frac{b^j}{j!}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beweis: (i) Wegen $Q_0 = P_b$ ist die Aussage für $s = 0$ richtig. Ferner ergibt sich mit Lemma 1

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(s+1)!}(b^{s+1} Q_{s+1,b}\{k\})^{(s+1)} \\ &= \frac{1}{(s+1)!}[(b^{s+1} Q_{s+1,b}\{k\})']^{(s)} = \frac{1}{s!}(b^s Q_{s,b}\{k\})^{(s)}. \end{aligned}$$

(ii) Wir haben mit Lemma 1

$$\begin{aligned} bQ_1\{k\} &= \int_0^b Q_{0,x}\{k\}\, dx = \int_0^b e^{-x} \frac{x^k}{k!}\, dx \\ &= 1 - e^{-b} \sum_{i=0}^{k} \frac{b^i}{i!} = P_b(k, \infty) = Q_0(k, \infty). \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$Q_{s,x}\{k\} = \frac{s}{x} Q_{s-1,x}(k, \infty), \quad x > 0, \quad s \in \mathbb{N},$$

voraus, so folgt mit Lemma 1

$$
\begin{aligned}
b^{s+1} Q_{s+1}\{k\} &= (s+1) \int_0^b x^s Q_{s,x}\{k\}\, dx \\
&= (s+1)s \int_0^b x^{s-1} Q_{s-1,x}(k,\infty)\, dx \\
&= (s+1) \sum_{i=k+1}^{\infty} s \int_0^b x^{s-1} Q_{s-1,x}\{i\}\, dx \\
&= (s+1) \sum_{i=k+1}^{\infty} b^s Q_s\{i\} = b^s (s+1) Q_s(k,\infty).
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Mit Teil (ii) dieses Lemmas ergibt sich die Rekursionsformel

$$
Q_s\{k\} = Q_s\{k-1\} - \frac{s}{b} Q_{s-1}\{k\}, \quad k, s \in \mathbb{N},
$$

wobei $Q_0 = P_b$.

Zur Berechnung der Momente von Q_s – insbesondere interessieren natürlich der Mittelwert $\mu(Q_s)$ und die Varianz $V(Q_s)$ – geben wir die erzeugende Funktion $m_s(t)$ von Q_s an.

Lemma 3: *Für die erzeugende Funktion*

$$
m_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_s\{k\} t^k
$$

von Q_s gilt

$$
m_s(t) = s! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i}{(s+i)!} (t-1)^i, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}
m_s(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} b^k t^k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{k} (-b)^i \frac{s!}{(k+i+s)!} \\
&= s! \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} b^i \frac{1}{(i+s)!} \\
&= s! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i}{(i+s)!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} t^k \\
&= s! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i}{(i+s)!} (t-1)^i .
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3 ergibt sich

$$\mu(Q_s) = m_s'(1) = \frac{b}{s+1}$$

und

$$\begin{aligned}
V(Q_s) &= m_s''(1) + \mu(Q_s) - [\mu(Q_s)]^2 \\
&= \frac{b}{s+1} \left[1 + \frac{sb}{(s+1)(s+2)} \right] .
\end{aligned}$$

Insbesondere haben wir

$$V(Q_s) > \mu(Q_s) \quad \text{und} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{\mu(Q_s)}{V(Q_s)} = 1$$

sowie weiter

$$\mu(P(\lambda, Q_s)) = \lambda \mu(Q_s) = \frac{b\lambda}{s+1}$$

und

$$V(P(\lambda, Q_s)) = \lambda \int x^2 Q_s(dx) = \frac{b\lambda}{s+1} \left(1 + \frac{2b}{s+2} \right) .$$

Lemma 4: *Mit wachsendem* s *wird* Q_s *immer ≪ungefährlicher≫, d.h. es gilt*

$$Q_s[t, \infty) \leq Q_{s-1}[t, \infty), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Mit Lemma 3 ergibt sich für $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}[(t-1)^s m_s(t)]' &= s! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i}{(i+s-1)!}(t-1)^{i+s-1} \\ &= s(t-1)^{s-1} m_{s-1}(t),\end{aligned}$$

d.h. es folgt

$$m_s'(t) = s\frac{m_s(t) - m_{s-1}(t)}{1-t}.$$

Also für $|t| < 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)Q_s\{k+1\}t^k &= s\sum_{k=0}^{\infty}(Q_s\{k\} - Q_{s-1}\{k\})\,t^k \sum_{n=0}^{\infty} t^n \\ &= s\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(Q_s\{i\} - Q_{s-1}\{i\})\,t^k,\end{aligned}$$

d.h.

$$Q_s\{0,\ldots,k\} - Q_{s-1}\{0,\ldots,k\} = \frac{k+1}{s}Q_s\{k+1\} \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Als Abschluss dieses Absatzes soll noch das Verhalten von Q_s für grosse s diskutiert werden. Wie man an dem Anwendungsbeispiel in Abschnitt 5 sieht, ist dieses Problem für praktische Anwendungen von Bedeutung.

Lemma 5: *Es gilt für* $b > 0$

(i) $\lim_{s \to \infty} d(Q_{s,b}, \delta_0) = 0.$

(ii) $\lim_{s \to \infty} d(Q_{s,sb}, Q) = 0,$

wobei Q *die geometrische Verteilung mit dem Parameter* $p = b(1+b)^{-1}$ *ist. Ferner ist* d *die Supremums-Metrik.*

Für festes b und grosse s konzentriert sich also die Masse von Q_s immer stärker in $\{0\}$. Konvergenz gegen eine nicht-ausgeartete Verteilung, in diesem Fall die geometrische Verteilung, ergibt sich, wenn der Parameter b mit der Ordnung s gross wird. In diesem Fall haben wir auch noch

$$\lim_{s\to\infty} \mu(Q_{s,sb}) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+1} b = b = \frac{p}{1-p} = \mu(Q)$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} V(Q_{s,sb}) &= \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+1} b \left[\frac{s^2}{(s+1)(s+2)} b + 1\right] \\ &= b(1+b) = \frac{p}{(1-p)^2} = V(Q).\end{aligned}$$

Beweis: (i) Ist Q ein Wahrscheinlichkeitsmass mit $Q\{0, 1, 2, \ldots\} = 1$, so gilt

$$d(Q, \delta_0) \le \mu(Q).$$

Für $0 \in A$ folgt $0 \notin A^c$ und

$$|Q(A) - \delta_0(A)| = 1 - Q(A) = Q(A^c).$$

Im anderen Fall ergibt sich

$$|Q(A) - \delta_0(A)| = Q(A).$$

Ferner haben wir für B mit $0 \notin B$

$$Q(B) \le \sum_{i=1}^{\infty} Q\{i\} \le \sum_{i=1}^{\infty} iQ\{i\} = \mu(Q).$$

In unserem Fall gilt

$$d(Q_{s,b}, \delta_0) \le \mu(Q_{s,b}) = \frac{b}{s+1}.$$

(ii) Es sei $P_s = Q_{s,sb}$ gesetzt. Als erstes zeigen wir

$$\lim_{s\to\infty} P_s\{k\} = \frac{1}{1+b}\left(\frac{b}{1+b}\right)^k = Q\{k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Es seien $m_s(t)$ und $m(t)$ die erzeugenden Funktionen von P_s bzw. Q. Dann gilt

$$m_s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s! s^i}{(i+s)!} b^i (t-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s) b^i (t-1)^i,$$

wobei

$$a_i(s) = \prod_{j=0}^{i} \left(1 + \frac{j}{s}\right)^{-1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wegen

$$0 < a_i(s) \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad s \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{s \to \infty} a_i(s) = 1, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt der Konvergenzsatz von Lebesgue, dass für $|t-1| < \frac{1}{b}$

$$\lim_{s \to \infty} m_s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b^i (t-1)^i = m(t).$$

Genauso erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$ und $|t-1| < \frac{1}{b}$

$$\lim_{s \to \infty} m_s^{(k)}(t) = \lim_{s \to \infty} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{(i-k)!} a_i(s) b^i (t-1)^{i-k} = m^{(k)}(t).$$

Im Fall $b \geq 1$ liegt dabei 0 nicht im Geltungsbereich dieser Konvergenzaussagen, d.h. wir können nicht direkt auf die Konvergenz der Koeffizienten $P_s\{k\}$ gegen $Q\{k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ schliessen. Da 1 stets die Einschränkung an t erfüllt, müssen wir den Umweg über die Momente machen. Sind

$$\mu_k(s) = \int x^k P_s(dx) \quad \text{und} \quad \mu_k = \int x^k Q(dx), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

so ergibt obige Konvergenzaussage (über einen induktiven Beweis)

$$\lim_{s \to \infty} \mu_k(s) = \mu_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

d.h. es gilt

$$\lim_{s\to\infty} \int p(x) P_s(dx) = \int p(x) Q(dx)$$

für jedes Polynom $p(x)$ und – über den Satz von Weierstrass –

$$\lim_{s\to\infty} \int f(x) P_s(dx) = \int f(x) Q(dx)$$

für stetige Funktionen mit kompaktem Träger.
Bei festem $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ sei nun $f_k(x)$ die Dreiecksfunktion auf $[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$, die in den Endpunkten des Intervalls den Wert 0 annimmt und ihre Spitze im Punkt $(k, 1)$ besitzt. Dann haben wir

$$\int f_k(x) P_s(dx) = P_s\{k\} \quad \text{und} \quad \int f_k(x) Q(dx) = Q\{k\}$$

und unsere letzte Konvergenzaussage ergibt

$$\lim_{s\to\infty} P_s\{k\} = Q\{k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Um die gleichmässige Konvergenz nachzuweisen, setzen wir

$$A = \{k : P_s\{k\} < Q\{k\}\} \quad \text{und} \quad A_K = A \cap \{0, 1, \ldots, K-1\}.$$

Damit folgt für $K \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |P_s\{k\} - Q\{k\}| &= 2 \sum_{k\in A} (Q\{k\} - P_s\{k\}) \\
&\leq 2 \sum_{k\in A_K} (Q\{k\} - P_s\{k\}) + 2 \sum_{k=K}^{\infty} Q\{k\} \\
&\leq 2 \sum_{k=0}^{K-1} |P_s\{k\} - Q\{k\}| + 2 \sum_{k=K}^{\infty} Q\{k\}.
\end{aligned}$$

Bei festem K konvergiert die erste Summe für $s \to \infty$ gegen Null, während die zweite für $K \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Bemerkung: Wie der Beweis von Lemma 5 (ii) zeigt, darf $b = b_s$ so von s abhängen, dass

$$\lim_{s\to\infty} b_s = b > 0$$

gilt. Siehe dazu die Gegebenheiten des Beispiels in Absatz 5.
Wegen

$$|P(\lambda, Q_{s,sb})(A) - P(\lambda, Q)(A)| \leq e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} |Q^{*k}_{s,sb}(A) - Q^{*k}(A)|$$

$$\leq e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k d(Q_{s,sb}, Q) = \lambda d(Q_{s,sb}, Q)$$

sowie

$$d(P(\lambda_s, Q), P(\lambda, Q)) \leq d(P_{\lambda_s}, P_\lambda) \leq |\lambda_s - \lambda|$$

haben wir

Korrolar: *Mit der geometrischen Verteilung* $Q = Q_b$ *aus Lemma 5 gilt für* $b_s, \lambda_s > 0$ *mit* $\lim\limits_{s\to\infty} b_s = b > 0$ *und* $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda > 0$

$$\lim_{s\to\infty} d(P(\lambda_s, Q_{s,sb_s}), P(\lambda, Q_b)) = 0.$$

(Bei den Anwendungen in Absatz 5 ist dabei zu setzen $b_s = \frac{s+2}{s} \frac{\sigma^2 - \mu}{2\mu}$ und $\lambda_s = \frac{s+1}{s+2} \frac{2\mu^2}{\sigma^2 - \mu}$)

4 Die Rekursionsformel für die Gesamtschaden-Verteilung

In diesem Abschnitt wollen wir eine Panjer-ähnliche Rekursionsformel für die in Abschnitt 2 gegebene Gesamtschaden-Verteilung P herleiten, falls $R = Q_s$. Aufgrund von Satz 1 läuft dies darauf hinaus, eine für die dort definierte Verteilung D anzugeben.

Satz 2: *Es sei* Q_s, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *die Poisson-Verteilung* s*-ter Stufe. Ferner gelte* $Q\{1, 2, 3, \ldots\} = 1$. *Für die Verteilung*

$$D_s = \sum_{k=0}^{\infty} Q_s\{k\} Q^{*k}$$

folgt dann

$$D_s\{0\} = \frac{s}{b}\,(1 - D_{s-1}\{0\}) \text{ mit } D_0\{0\} = e^{-b}$$

und für $s \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *haben wir*

$$D_s\{k\} = \sum_{i=0}^{k-1} D_s\{i\} Q\{k-i\} - \frac{s}{b} D_{s-1}\{k\}.$$

Für die Rekursion ist dabei zu beachten, dass

$$D_0 = P(b, Q).$$

Somit können die Anfangswerte $D_0\{k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ mit dem Panjerschen Verfahren ebenfalls rekursiv berechnet werden.

Beweis: Ist $m_s(t)$ die erzeugende Funktion von Q_s und $m(t)$ die erzeugende Funktion von Q, so ist $m_s(m(t))$ die erzeugende Funktion von D_s. Mit Lemma 2 (ii) haben wir für $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
m_s(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} Q_s\{k\} t^k = \frac{s}{b} \sum_{k=0}^{\infty} Q_{s-1}(k, \infty) t^k \\
&= \frac{s}{b} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{i=k+1}^{\infty} Q_{s-1}\{i\} = \frac{s}{b} \sum_{i=1}^{\infty} Q_{s-1}\{i\} \sum_{k=0}^{i-1} t^k \\
&= \frac{s}{b}\, \frac{1 - m_{s-1}(t)}{1-t}, \qquad |t| < 1.
\end{aligned}$$

Damit folgt für $s \in \mathbb{N}$, $|t| \le 1$

$$(1 - m(t)) m_s(m(t)) = \frac{s}{b}\,(1 - m_{s-1}(m(t)))\,.$$

Dies ergibt

$$(\delta_0 - Q) * D_s = \frac{s}{b}(\delta_0 - D_{s-1})$$

bzw.

$$D_s = Q * D_s + \frac{s}{b}(\delta_0 - D_{s-1}).$$

Wegen $Q\{0\} = 0$ folgt daraus die gewünschte Rekursionsformel.

5 Ein Beispiel

Gegeben seien folgende Daten aus der Unfallstatistik (siehe David [2], Seite 68): Anzahl der Unfälle, die $n = 647$ Arbeiterinnen in einem bestimmten Zeitraum hatten

i	0	1	2	3	4	5
n_i	447	132	42	21	3	2

(n_i Arbeiterinnen hatten in der Zeit i Unfälle, $i = 0, \ldots, 5$).
Für $s = 0$ und $s = 1$ wollen wir die empirische Verteilung $\hat{Q}\{i\} = \frac{n_i}{n}$, $i = 0, \ldots, 5$, an die Verteilung $P(\lambda, Q_s)$ anpassen. Dazu wählen wir die Parameter λ und b (dieser tritt in Q_s auf) so, dass Mittelwert und Varianz von $P_s = P(\lambda, Q_s)$ mit denen von $\hat{Q}$ übereinstimmen. Wir haben dabei

$$\mu(P_s) = \lambda\mu(Q_s) = \frac{\lambda b}{s+1}$$

und

$$V(P_s) = \lambda \int x^2 Q_s(dx) = \frac{\lambda b}{s+1}\left(1 + \frac{2b}{s+2}\right).$$

Mit

$$\mu = \mu(\hat{Q}) \quad \text{und} \quad \sigma^2 = V(\hat{Q})$$

erhalten wir durch Gleichsetzen

$$b = \frac{s+2}{2}\,\frac{\sigma^2 - \mu}{\mu} \quad \text{und} \quad \lambda = (s+1)\frac{\mu}{b}.$$

Als Werte ergeben sich

$$\mu = \sum_{i=1}^{5} i\frac{n_i}{n} = 0{,}4652$$

und

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{5} i^2 \frac{n_i}{n} - \mu^2 = 0,6908.$$

Für $s = 0$ folgt $\lambda = 0,9593$ und $b = 0,4850$.
Wegen

$$Q_0\{k\} = e^{-b}\frac{b^k}{k!} = \frac{b}{k} Q_0\{k-1\}$$

haben wir

k	0	1	2	3	4	5
$Q_0\{k\}$	0,61570	0,29861	0,07241	0,001171	0,00142	0,00014

Für $s = 1$ gilt $\lambda = 1,2790$ und $b = 0,7274$. Mit

$$Q_1\{k\} = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-b}\sum_{i=0}^{k}\frac{b^i}{i!}\right) = Q_1\{k-1\} - e^{-b}\frac{b^{k-1}}{k!}$$

ergibt sich

k	0	1	2	3	4	5
$Q_1\{k\}$	0,71053	0,22736	0,05164	0,00903	0,00128	0,00015

Weiter gilt

$$P_s\{0\} = \exp[-\lambda(1 - Q_s\{0\})]$$

und

$$P_s\{k+1\} = \frac{\lambda}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} iQ_s\{i\}P_s\{k+1-i\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Damit erhalten wir für die theoretischen Häufigkeiten

i	0	1	2	3	4	5
n_i	447	132	42	21	3	2
$nP_0\{i\}$	447,5	128,2	49,4	15,7	4,5	1,2
$nP_1\{i\}$	446,8	129,9	48,4	15,6	4,6	1,3

Die Anpassung ist offenbar recht gut, wobei P_1 die besseren Werte liefert. Zum Vergleich seien noch die Werte für den Grenzfall $s \to \infty$ (siehe das Korrolar zu Lemma 5) notiert. Hier haben wir

$$b = \frac{\sigma^2 - \mu}{2\mu} = 0,24248$$

und

$$\lambda = \frac{2\mu^2}{\sigma^2 - \mu} = 1,91854$$

Q ist dann die geometrische Verteilung mit dem Parameter

$$p = \frac{b}{b+1} = \frac{\sigma^2 - \mu}{\sigma^2 + \mu} = 0,19516.$$

Mit $P = P(\lambda, Q)$ gilt ferner

$$P\{0\} = \exp[-\lambda(1 - Q\{0\})] = \exp[-\lambda p]$$

und

$$P\{k+1\} = \frac{\lambda(1-p)}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} i p^i P\{k+1-i\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Damit erhalten wir

i	0	1	2	3	4	5
$nP\{i\}$	444,9	134,1	46,4	15	4,6	1,4

Die Frage, welchen Parameter s man bei praktischen Anwendungen wählen soll, kann aus der Natur der Sache so beantwortet werden: Man wähle s dergestalt, dass n_0 und $nP_s\{0\}$ möglichst nahe beieinander liegen. In obigem Beispiel war dies schon für $s = 1$ der Fall.

Literatur

[1] *Beall, G./Rescia, R.R.* (1953): A generalisation of Neyman's contagious distributions. Biometrics 9, 354–386.

[2] *David, F.N.* (1951): Probability Theory for Statistical Methods. Cambridge.

[3] *Michel, R.* (1987): An improved error bound for the compound Poisson approximation of a nearly homogeneous portfolio. Astin Bulletin 17, 165–169.

[4] *Neyman, J.* (1939): On a new class of "contagious" distributions, applicable in entomology and bacteriology. Ann. Math. Stat. 10, 35–57.

[5] *Straub, E.* (1988): Non-Life Insurance Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

[6] *Thyrion, P.* (1959): Sur une propriété des processus de Poisson généralisées. Bull. Ass. Roy. Act. Belges 59, 35–46.

[7] *Thyrion, P.* (1960): Note sur les distributions "par grappes". Bull. Ass. Roy. Act. Belges 60, 49–66.

Reinhard Michel
Bergische Universität
Gesamthochschule Wuppertal
Fachbereich 07 – Mathematik
Gaussstr. 20
42097 Wuppertal 1
Germany

Zusammenfassung

Ausgehend von n Risiken mit individuellen Schadenzahl-Verteilungen $(1-p_i)\delta_0+p_iR, i = 1, \ldots, n$, betrachten wir ihre Approximation durch die zusammengesetzte Poisson-Verteilung $P(\lambda, R)$, wobei $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$, als Modell von Schadenzahl-Verteilungen. Hergeleitet wird eine Art Ammeter-Transformation sowie eine Panjer-ähnliche Rekursionsformel für die entsprechende Gesamtschaden-Verteilung. Als spezielle und für Anwendungen relevante Schadenzahl- Verteilungen $P(\lambda, R)$ diskutieren wir die Neymanschen ≪ansteckenden≫ Verteilungen.

Résumé

Soient n risques de loi de distribution du nombre des sinistres individuels $(1 - p_i)\delta_0 + p_iR$, $i = 1, \ldots, n$,. Comme modèle de distribution du nombre des sinistres de ces risques, nous considérons leur approximation donnée par la distribution de Poisson composée $P(\lambda, R)$, où $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$. Nous obtenons une transformation à la Ammeter ainsi qu'une formule de récurrence à la Panjer pour la distribution de la charge des sinistres correspondante. Nous discutons de la distribution de Neymann ≪contagieuse≫ en tant que loi de distribution du nombre des sinistres particulière et importante pour les applications.

Summary

Starting from n risks with individual claim number distributions $(1 - p_i)\delta_0 + p_iR$, $i = 1, \ldots, n$, we consider their approximation by the compound Poisson distribution $P(\lambda, R)$ as a model for claim number distibutions, where $\lambda = p_1+\cdots+p_n$. We derive an Ammeter-transformation and a Panjer-like recursion formula for the corresponding distribution of the total claims. As special and for applications useful claim number distributions $P(\lambda, R)$ we discuss Neyman's "contagious" distributions.