

Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des
Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1994)

Heft: 1

Artikel: Katastrophen : Modellierung und Vorhersage

Autor: Klüppelberg, Claudia

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967195>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

CLAUDIA KLÜPPELBERG, Zürich

Katastrophen – Modellierung und Vorhersage¹

Immer häufiger werden wir von Katastrophenmeldungen in Funk, Fernsehen und Presse überrascht. Denken Sie nur an die Hochwasserkatastrophen dieses Sommers an der Rhone und im Tessin, die Millionenschäden verursachten. In der folgenden Tabelle habe ich einmal einige der weltweit am bedrohlichsten eingestuften Katastrophenszenarien aufgeführt:

- Zerstörung der Ozonschicht und daraus resultierend eine erhöhte Strahlung ultravioletten Lichtes
- Treibhauseffekt, insbesondere die Zunahme von Kohlendioxid und anderen Treibhausgasen
- Saurer Regen, d.h. Verschmutzung der Luft durch Auto- und industrielle Abgase
- atomare Strahlung, d.h. Verschmutzung der Atmosphäre durch radioaktive Teilchen
- AIDS Epidemie
- Bevölkerungsexplosion, also eine Übervölkerung der Erde
- Erdbeben
- Wirtschaftskrisen, wie z.B. eine weltweite Rezession

Dabei haben Katastrophen seit alters her nicht nur Besorgnis erregt, sondern auch eine gewissermassen schizophrene Faszination ausgeübt. Echte und falsche Propheten finden bis in unsere heutige Zeit grosse Gemeinden von Anhängern. Solche Propheten wollen natürlich nicht unbedingt nützliche Informationen über die Zukunft vermitteln. Im Gegenteil, seit dem Orakel von Delphi, den römischen Vestalinnen, den Offenbarungen des Johannes bis zu Nostradamus,

¹ Antrittsvorlesung gehalten an der ETH Zürich am 1. Dezember 1993

waren deren prophetische Hinweise derart vage, zwiespältig und fragwürdig, dass wenige ihrer Prophezeihungen interpretiert werden konnten, bevor sie sich tatsächlich erfüllt hatten – und natürlich erfüllten sie sich alle.

Prophezeihungen wurden im Altertum geschätzt, denn sie bestätigten die Existenz von Ordnung im Universum. Unser Schicksal liegt in den Händen der Götter und alle wichtigen gegenwärtigen wie zukünftigen Ereignisse sind ein für allemal entschieden – in Stein gemeißelt sozusagen. Ein armer Sterblicher wie z.B. Oedipus, kann noch so tapfer kämpfen, jedoch am Ende wird er besiegt durch das unausweichliche Schicksal. Diese Weltanschauung hielt die Menschen zwar im Ungewissen, aber sie vermittelte auch ein gewisses Mass an Sicherheit und Trost.

In christlicher Zeit, und besonders nach der Reformation, gewannen zusätzliche Elemente an Bedeutung: nämlich Begriffe wie Schuld und Sühne. Der nachklassische Held hat einen freien Willen; er sündigt und verübt Verbrechen. Die Prophezeihung beinhaltet Strafe und demonstriert somit nicht nur Ordnung, sondern auch Gerechtigkeit im Universum. Die Prophezeihung ist eine Bekräftigung religiöser und moralischer Prinzipien. Solche Elemente scheinen bis heute ein wichtiger Bestandteil gewisser Prophezeihungen unserer westlichen Welt zu sein.

Während wir einerseits ein ungeheures Vertrauen in unsere Technik haben und bedingungslos glauben, dass mit genügend Vorstellungskraft und harter Arbeit alles erreicht werden kann, existiert doch andererseits ein beharrlicher Gegenstrom, nämlich die Faszination der Katastrophe. Wort- und Bilddokumente von Katastrophen werden seit Hunderten von Jahren verfasst. Ein Beispiel dafür ist Bild 1, das einen Kupferstich von D. Redinger des Sihl-Hochwassers von 1732 zeigt.

Als Wissenschaftler müssen wir uns natürlich von allen nicht wissenschaftlich fundierten Prophezeihungen fernhalten. Wissenschaftlich fundierte Prophezeihungen nennen wir Vorhersagen. Jedoch Vorhersagen über Katastrophen sind selten präzise. Das liegt in der Natur der Katastrophe. Die folgenden Katastrophentypen erscheinen mittlerweile immer öfter in den Schlagzeilen:

- Explosionen
- Wirbelstürme
- Überschwemmungen
- Chemieunfälle
- Erdbeben

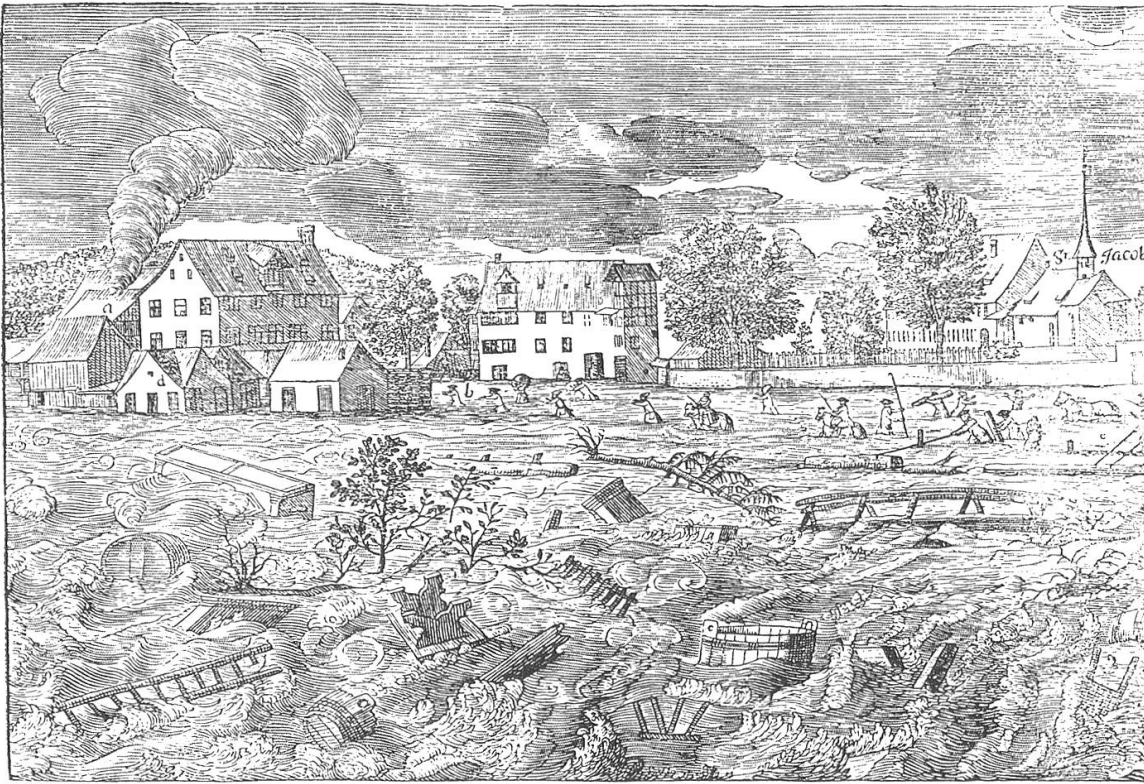


Bild 1: D. Redinger: "Das Sihl-Hochwasser von 1732" (Graphische Sammlung ETH)

Hier einige Beispiele aus einem Bericht der Versicherungswirtschaft:

- Die Explosion auf der Öl- und Gasplattform "Piper Alpha" im Juli 1988 belastete die internationale Versicherungswirtschaft mit 1,5 Milliarden Dollar. Sie setzte damit einen neuen Massstab. Erstmals hat ein von Menschen verursachter Schaden die Milliardenengrenze erreicht, und "Piper Alpha" wurde zum grössten je von Menschen verursachten Einzelschaden der Geschichte.
- 1989 wurde für die Versicherungswirtschaft zum Katastrophenjahr. Die versicherten Grossschäden eskalierten gegenüber dem Vorjahr auf mehr als das Doppelte und erreichten die Rekordhöhe von über 13,8 Milliarden Dollar. Allein der Hurrikan "Hugo" richtete in der Karibik und Teilen der USA einen Versicherungsschaden von 4,3 Milliarden Dollar an. (1990 brachte einen neuen Donnerschlag: Eine Sturmserie über Europa verursachte Schäden zwischen 13 und 17 Milliarden SF.)

- Sommer 1991: Wieder fegte ein Wirbelsturm über Bangladesh. 150 000 Menschen starben. Mit tödlicher Sicherheit werden in den kommenden Jahren weitere Hunderttausend in den Sturmfluten sterben. Eine Trendanalyse zeigt, dass nicht nur die Anzahl, sondern auch das Ausmass solcher Naturkatastrophen seit den achtziger Jahren steil ansteigen.
- Ausländische Investoren errichten in Drittweltnationen riesige Industrieanlagen, bei denen für Sicherheitskonzepte und vorbeugende Unterhaltsarbeiten oft zu wenig Zeit und Geld aufgewendet wird. Die Chemiekatastrophe von Bhopal, wo ein Rohrbruch über 2000 Menschenleben forderte, hat hier ein mahnendes Zeichen gesetzt.
- Der Sommer 1987 wird in den Alpen als Katastrophenzeit in Erinnerung bleiben. Im Puschlav ist es der Wildbach im Val Varuna, der am Anfang der Unglückskette steht. In seinem Ober- und Mittellauf die Ufer erodierend, trägt er Unmengen von Erde, Steinen, Bäumen und sogar Felsen von vielen Tonnen Gewicht ins Tal und verstopft mit seinem Geschiebe das Bett des Poschiavino. Der Fluss sucht sich einen neuen Weg und findet ihn in den Strassen und Gassen von Poschiavo. Der durch das Städtchen tosende Fluss richtet gewaltige Zerstörungen an; die in ihren Häusern blockierten Einwohnern müssen per Helikopter von den Dächern geholt werden. Inmitten der Aufräumarbeiten beginnt es Ende August nochmals heftig zu regnen.

Voll getroffen vom August-Unwetter wird das Urnerland. In der Nacht vom 24. zum 25. August brechen die Uferdämme im Gebiet der Reussmündung an mehreren Stellen. Der Fluss wählt sich die Autobahn als zusätzlichen Weg und deponiert mannshoch Schlamm auf dem Betonband. Die Nationalstrasse und weitere Verkehrswege werden an anderer Stelle für den wildgewordenen Fluss zum Hindernis. Schon nach wenigen Stunden ist die ganze untere Reussebene eine riesige Wasserfläche. Flüelen, Seedorf und Attinghausen stehen meterhoch im Wasser. Da die Reuss im oberen Kantonsteil (insbesondere in Gurtellen und Göschenen) ebenfalls wütet und die Bahn- und Strassenverbindungen an vielen Stellen zerstört, sind weite Teile des Urnerlandes nur noch per Schiff oder Helikopter zugänglich.

Wir bemerken, dass alle diese Katastrophen die folgenden Eigenschaften besitzen:

- sie beeinflussen einen beträchtlichen Teil der Bevölkerung

- sie sind von ungewöhnlichem Ausmass
- die verursachten Langzeiteffekte
- sie geschehen äusserst selten.

Jeder Statistiker weiss nun, und auch der gesunde Menschenverstand sagt uns das, dass das Prädikat “äusserst selten” bedeutet, dass wissenschaftliche Vorhersagen schwierig sind, einfach aus einem Mangel an genügend Daten, d.h. an Informationen über den Ablauf ähnlicher Katastrophen in der Vergangenheit. Dennoch gibt es Methoden, die qualitative und quantitative Aussagen über seltene Ereignisse erlauben. Die effizientesten Methoden beruhen auf der **Poisson Approximation für Extrema**. Wir erläutern sie hier an einem Beispiel: Für den Bau von Dämmen und Deichen benötigt man Aussagen über den zukünftigen Pegelstand, die man aus Vergangenheitsdaten ableiten möchte. Diese Daten bilden eine Stichprobe (X_1, \dots, X_n) von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen und mit X bezeichnen wir den (zukünftigen, unbekannt, zufälligen) Pegelstand. Was kann man über $P(X > u)$ für grosse Werte u sagen? Bild 2 zeigt eine solche simulierte Stichprobe.

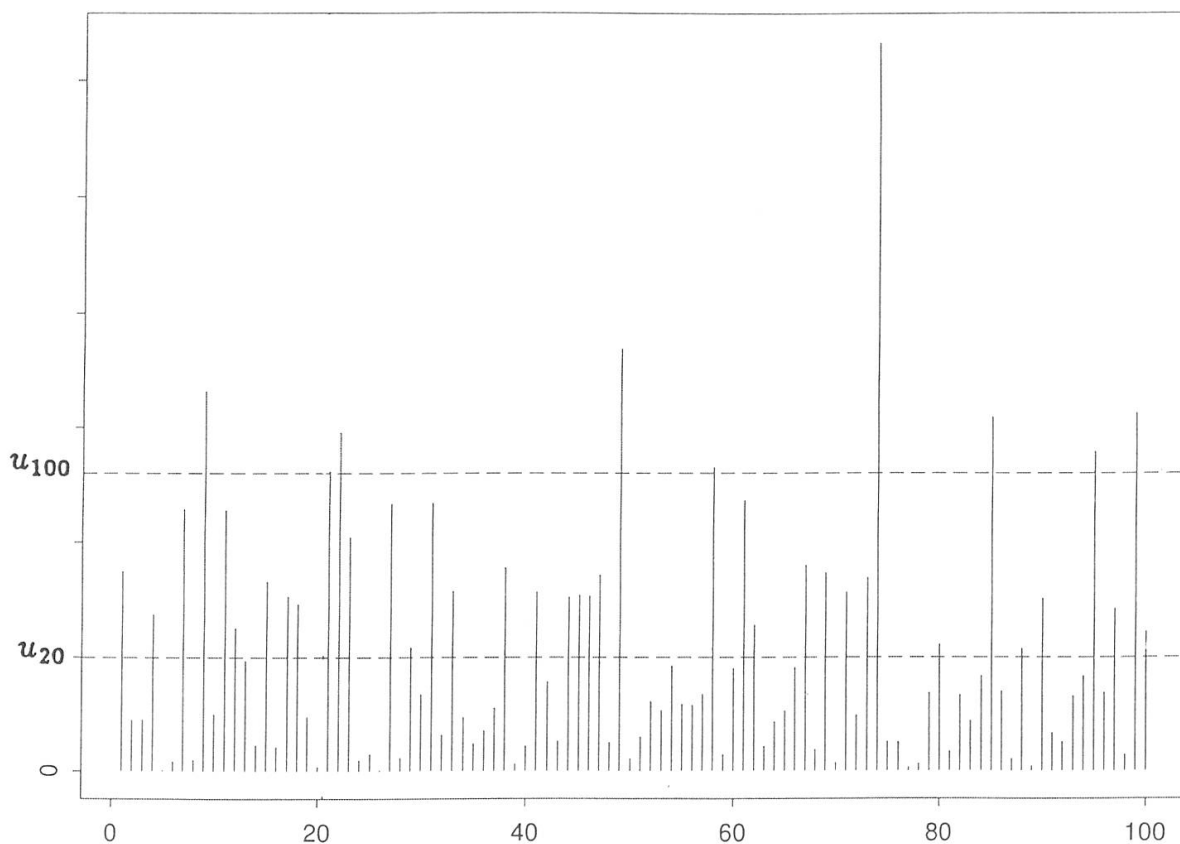


Bild 2: Poisson Approximation für Extrema

Für eine Stichprobe vom Umfang n sei u_n ein hoher Schwellenwert. Man definiert

$$S_n = \#\{i = 1, \dots, n; X_i > u_n\} = \sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u_n\}},$$

d.h. S_n ist die Anzahl der Werte der Stichprobe, die den Schwellenwert u_n überschreiten; man nennt diese Werte auch Exzedenten über u_n . Im obigen Bild ist z.B. $S_{20} = 9$ und $S_{100} = 8$. Dass diese beiden Zahlen so nahe beieinander liegen ist kein Zufall, sondern eine Konsequenz der Poisson Approximation für Extrema. S_n ist nach Definition eine Summe von n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen und zwar gilt

$$P(I_{\{X_i > u_n\}} = 1) = P(X_i > u_n) = p_n \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Folglich ist S_n binomial verteilt mit Parametern n und p_n . Wir wählen nun p_n so, dass

$$ES_n = np_n \rightarrow \tau > 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Mit anderen Worten, die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird so gewählt, dass die mittlere Anzahl an Exzedenten approximativ konstant bleibt. Dann konvergiert für $n \rightarrow \infty$ nach dem klassischen Satz von Poisson S_n gegen eine Poisson verteilte Zufallsvariable mit Parameter τ . Man kann damit die Anzahl S_n von Exzedenten über einen Schwellenwert u_n für grosse n durch einen Poisson Prozess approximieren.

Dieses Prinzip lässt sich nun statistisch ausnutzen, um Schätzungen für $P(X > u)$ zu erhalten. Die folgende Formel gibt einen nichtparametrischen Schätzer, wobei γ sowie a und b aus den Vergangenheitsdaten zu schätzen sind

$$P(X > u_n) \approx \frac{k}{n} \left(1 + \gamma \frac{u_n - b(n/k)}{a(n/k)} \right)^{-1/\gamma}$$

für $n \rightarrow \infty$, $k = k(n) \rightarrow \infty$, $k(n)/n \rightarrow 0$. Parametrische Schätzungen sind ebenfalls möglich [Klüppelberg und Villaseñor (1993); Keller und Klüppelberg (1991)].

Zahl und Ausmass von Katastrophen nehmen weltweit ständig und immer schneller zu. Bei näherem Hinschauen wird deutlich, dass dies weder Zufall noch Schicksal ist: Nicht die Natur, sondern der Mensch verursacht die meisten Katastrophen. Die Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft publizierte 1988 eine ausführliche Dokumentation der Ereignisse des Katastrophensommers 1987. Mag man auch die rein materielle Ausrichtung der Versicherungswirtschaft als Einschränkung empfinden, so muss man doch anerkennen, dass

der tägliche Umgang mit dieser materiellen Seite von Naturkatastrophen wie auch mit technischem und menschlichem Versagen den Blick schärft für die Unglücksursachen. Wie kaum eine andere Institution hat die Versicherungsbranche von Berufs wegen einen detaillierten Einblick in das Ausmass und die näheren Umstände von Schadenfällen, denn sie ist auf Grund ihrer weitgefächerten Risikobeteiligung praktisch in alle grösseren Katastrophen involviert.

So ist in dem Bericht "Berge, Wasser, Katastrophen" (1988) nachzulesen, wie das masslose Abholzen der Bergwälder die ohnehin dünne Humusschicht in weiten Teilen der Alpen reduziert. Starke Bautätigkeit in den Ortschaften, neue Hotelanlagen, Wanderwege, Skipisten und Liftanlagen lassen Regenwasser nur schlecht im Boden versickern.

Nicht zuletzt hat der Machbarkeitswahn der Menschen zu vermehrten Schäden geführt. So glaubte man im 19. Jahrhundert, die im Urner Mündungsgebiet immer wieder über die Ufer tretende Reuss durch einen schnurgeraden Kanal eindämmern zu können. In der ehemaligen Hochwasserebene machte sich Landwirtschaft breit, Einfamilienhäuser schossen aus dem Boden, Bahnlinien und Autobahn wurden gebaut. Bereits 1868, vier Jahre nach dem Kanalbau, zeigte eine Grossüberschwemmung die Illusion des Sicherheitskonzepts. 1910 und 1987 wiederholte sich die Katastrophe.

In unserer modernen und erschreckend komplexen Welt sind zuverlässige Vorhersagen künftiger Ereignisse von eminenter Wichtigkeit. Entscheidungsträger in Regierung und Wirtschaft hängen von solchen Vorhersagen ab – sowohl in ihren täglichen Aktivitäten als auch in ihren langfristigen Planungen. Unter diesen Bedingungen ist es für uns Wissenschaftler ganz entscheidend klarzustellen, was wir unter der Vorhersage von Katastrophen verstehen. Oder mit anderen Worten, wofür oder ob überhaupt Vorhersagen formuliert werden können.

Ich möchte Ihnen das am Beispiel der Erdbebenforschung verdeutlichen. Erdbeben gelten mit als die am meisten Terror verbreitenden Katastrophen unserer Erde. Sie können immensen Schaden anrichten und sie geschehen praktisch ohne jede Vorwarnung zu jeder Stunde des Tages, zu jeder Jahreszeit, und wenige Orte dieser Welt sind sicher vor ihnen. Sie hängen wie ein Damoklesschwert über unseren Köpfen und können jeden Moment über uns hereinbrechen (oder besser unter uns hervorbrechen). Für die Forschung haben sie den Vorteil, dass sie seit den frühesten Perioden der Geschichtsschreibung auf der ganzen Welt sorgfältig dokumentiert wurden. Zum Beispiel gibt es einen Katalog aller substantiellen

Erdbeben in Zentralchina seit 3000 Jahren; vollständige Dokumentation der Erdbeben in Japan, Europa und dem Nahen Osten gibt es seit ungefähr 2000 Jahren.

Was wissen nun Wissenschaftler über Erdbeben heutzutage? Die Ursache von Erdbeben, das ist mittlerweile eine allgemein akzeptierte Theorie, ist die Kontinentaldrift. Nach dieser Theorie schweben oder schwimmen ungefähr 10 gigantische Platten von Erdkruste, jede ca 75 km dick auf weicherem Material darunter. Ein stetiger Fluss von geschmolzenem Fels schiebt sich entlang wohldefinierter Ränder vom Innern der Erde aufwärts. Dies verursacht, dass die Platten sich bewegen, ihre Ränder reiben aneinander. Dort finden die meisten Erdbeben statt. Leider kann man diesen Prozess nicht hinreichend genau beobachten, um eine zuverlässige Theorie zu entwickeln. Man hat bis heute nicht einmal ein zufriedenstellendes Modell; zufriedenstellend in dem Sinn, dass man einigermaßen zuverlässige Vorhersagen machen kann.

Seit Beginn unserer Geschichte haben Menschen versucht, mit Hilfe von Sternen, Pflanzen, Tieren und irgendwelchen anderen natürlichen Anzeichen – mittels mehr oder weniger dubioser Methoden – Ort, Zeit und Intensität von Erdbeben vorherzusagen. Die folgenden Signale werden auch heute noch als ernstzunehmende Vorwarnungen von Erdbeben angesehen. Natürlich glauben wir, in unserer Zeit eine bessere (wissenschaftliche) Begründung für unser Vorgehen zu haben.

- Veränderungen im Grundwasser
(Druckänderungen verursachen ein Heben oder Senken des Grundwasserspiegels)
- Elektromagnetische Phänomene
(Felsen unter hohem Druck erzeugen manchmal elektrische Ströme)
- Deformationen in der Landschaft
(Erdbeben gehen manchmal Aufwerfungen und Veränderungen im Gefälle der Erdoberfläche voraus)
- Seismographische Beobachtungen
(Häufig gehen einem grossen Erdbeben kleinere Erschütterungen voraus)
- Tierverhalten
(Manche Tiere fühlen das Nahen eines Erdbebens und brechen in Panik aus.)

Aus keinem dieser obigen Signale kann man allerdings einen zuverlässigen Vorhersagemechanismus ableiten. Zur heutigen Strategie gehört es, weiterhin die Ursachen zu studieren und sorgfältig Daten zu sammeln, auch über kleinste Beben. Dabei scheint Übereinstimmungen zu herrschen, dass viele kleine Beben ein grosses unwahrscheinlicher machen. Kleine Beben bedeuten viele kleine Korrekturen für die Kontinentaldrift. Wenn diese ausbleiben, ist irgendwann eine grosse Korrektur fällig. Jahrelange Dokumentation lässt auch in manchen Erdbebengebieten auf eine gewisse Periodizität schliessen. Beide Phänomene führen zu Vorhersagen, die bestenfalls Approximationen sind.

Vom mathematischen Standpunkt aus ist ein Erdbebenmodell ein Raum-Zeit-Modell. Üblicherweise zerlegt man das Problem in mehrere Komponenten, die man einzeln untersuchen kann. Eine solche mehrstufige Analyse erfordert ein Studium sowohl des räumlichen als auch des zeitlichen Ablaufs des Bebens. Erdbeben haben ihren Ursprung in einem Punkt, entlang von Linien oder innerhalb von Zonen. Sie haben verschiedene Stärken (gemessen auf der Richterskala), verschiedenen räumlichen Umfang und geschehen zu verschiedenen Zeitpunkten.

Ein naiver globaler Modellsansatz wäre der folgende: Es gibt eine Quelle und die von ihr verursachten Beben verteilen sich nach einem Poissonprozess in einem Gebiet. Die Stärke der Einzelbeben kann man als unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen ansehen, und die Intensität der Bewegung an den einzelnen Punkten fällt mit der Stärke und der Distanz von der Quelle ab.

Dieser Modellansatz wird nun ergänzt durch einen zeitlichen Aspekt, man kann die Zeitreihe der Beben als Punktprozess auf der Zeitachse modellieren. Nachbeben können z.B. mittels Geburtsprozessen modelliert werden. Nach jedem grösseren Beben werden Messungen in der Umgebung vorgenommen und u.a. die Quelle dort lokalisiert, wo der grösste seismische Ausschlag festgestellt wurde. Es werden isoseismische Karten erstellt (Iseismische Linien sind Linien gleicher Intensität). Solche Karten sollen den Zusammenhang zwischen Bodenerschütterungen und Schäden aufzeigen. Zeitliche und räumliche Vergangenheitsdaten werden nun in die Modelle eingebracht, um zu qualitativen und quantitativen Aussagen zu gelangen. Keines der bisherigen Modelle führt indes bisher zu zuverlässigen Vorhersagen. Dies macht das Gebiet natürlich auch zu einem sehr lebendigen Forschungsgebiet; so schreibt Brillinger (1993): "There is a need for models, for parameter estimates and for the recognition of statical regularities." Viele Wissenschaftsgebiete sind hier herausgefordert wie z.B. die

Geologie, Geophysik, Seismologie, Ingenieurwissenschaften und eben auch die Mathematik.

In der folgenden Tabelle sind die Erdbeben der letzten 20 Jahre aufgeführt, die mehr als 1000 Todesfälle zur Folge hatten.

Zeit	Ort	Stärke	Todesfälle
Juni 1990	Iran	7,7	40 000
Dezember 1988	Armenien	6,8	25 000
September 1985	Mexiko	7,9	9 500
Oktober 1983	Türkei	6,9	1 300
Dezember 1982	Jemen	6,0	2 800
Juli 1981	Iran	7,3	1 500
Juni 1981	Iran	6,9	3 000
November 1980	Italien	7,2	4 800
Oktober 1980	Algerien	7,7	25 000
März 1977	Rumänien	7,2	2 000
November 1976	Türkei	7,9	4 000
August 1976	Philippinen	7,8	8 000
Juli 1976	China	7,6	242 000
Februar 1976	Türkei	6,8	2 300
Dezember 1972	Nicaragua	6,2	5 000
Mai 1970	Peru	7,8	66 000

Alle diese Beben haben eines gemeinsam: Nicht ein einziges wurde vorhergesagt. Sie kamen alle vollständig unerwartet.

Etwas provokant möchte ich Sie bitten, einmal die beiden folgenden Vorhersagen zu vergleichen:

Nostradamus formulierte im 16. Jh. diesen Vierzeiler:

Im Jahre 1999, im 7. Monat,
wird ein König des Schreckens vom Himmel herabsteigen,
und der grosse König von Angolmois wird wieder auferstehen.
Um diese Zeit wird Mars regieren zum Nutzen der guten Sache.

Wie interpretiert man diese Prophezeiung heute? Stewart Robb (1979) bietet die folgende Interpretation an: "In diesem bemerkenswerten Vierzeiler – bemerkenswert weil Nostradamus nicht nur den Luftkrieg erwähnt, sondern ihn für das

20. Jh. prophezeit – sieht Nostradamus Armageddon voraus für 1999. Mars offensichtlich repräsentiert Krieg. Sein wohlmeinender Aspekt (für die gute Sache) bedeutet, dass der Krieg fast vorbei ist mit einem Sieg für die richtige Seite, für jene die für die gute Sache kämpfen.”

Soviel zu mittelalterlichen Prophezeihungen. Vorhersagen unserer Zeit sind zumindest völlig anders formuliert. Jede Zeit hat ja ihre ganz zeitgemässe Ausdrucksweise. Eine sehr ernst zu nehmende und ernst genommene Erdbebenvorhersage lautet z.B.

“Mit 35 %-iger Wahrscheinlichkeit wird es in den nächsten 50 Jahren ein grösseres Erdbeben in Südkalifornien geben.”

Eine Interpretation dieser Aussage in 500 Jahren würde mich schon interessieren.

Lassen Sie mich zurückkommen zum Problem der Modellierung und Vorhersage von Katastrophen. Ich möchte Ihnen einen vielleicht typischen Entwicklungsprozess von Modellen, Theorien und mathematischen Methoden beschreiben, und zwar an Beispielen aus der Versicherungs- und Finanzmathematik. Katastrophen im Sinne dieser Kategorien haben den Vorteil, dass sie messbar sind; sie werden im wesentlichen in Geldeinheiten ausgedrückt.

In der Versicherungsmathematik ist ein Katastrophenrisiko im Prinzip durch den Umfang seines Schadens definiert. Es erzeugt Verluste, die bei weitem die Kapazität einer einzelnen Versicherungsgesellschaft übersteigen. Typischerweise können sie nicht durch lokale Versicherungsgesellschaften und einige Rückversicherungen abgedeckt werden, sondern sie werden weltweit plaziert.

An eine Katastrophe in der Finanzmathematik erinnern Sie sich sicher alle noch, nämlich an den Börsenkrach 1987, als innerhalb weniger Tage, ja Stunden, fast alle Aktienkurse in den Keller sanken. Auch hier lässt sich der Schaden ebenfalls am finanziellen Umfang messen, aber es findet auch ein nicht zu unterschätzender Vertrauensverlust in gewisse Anlagen statt, der sich wohl nicht so leicht beziffern lässt.

Katastrophen, die beide Branchen betreffen, gab es z.B. bei Kreditversicherungen für Junk Bonds oder für Hypotheken in USA und Grossbritannien. Infolge der Rezession verloren Grundstücke und Häuser an Wert, und zwar teilweise in solchem Umfang, dass die darauf lastenden Hypotheken den Eigentumswert bei weitem überstiegen.

Die Geschichte der Versicherungs- und Finanzmathematik beginnt ungefähr gleichzeitig Anfang dieses Jahrhunderts: In der Versicherungsmathematik 1903

mit dem kollektiven Modell von Lundberg und in der Finanzmathematik 1900 mit der Doktorarbeit von Bachelier.

Während in der Versicherungsmathematik ein stetiger Entwicklungsprozess folgte, der bis heute anhält, gab es in der Finanzmathematik eine schöpferische Pause bis in die 60er Jahre. Danach allerdings setzte insbesondere in den 70er Jahren ein Boom ein, der bis heute ungebrochen anhält. Mittlerweile erfolgt mehr und mehr ein Zusammenwachsen beider Gebiete. Versicherungs- und Finanzmathematiker haben erkannt, dass sie voneinander profitieren können. Die Versicherungsmathematik hat mit ihren jahrzehntelangen Erfahrungen im Risikomanagement und mit Katastrophenrisiken ein reiches Wissen erlangt und Methoden erarbeitet, die in der Finanzmathematik von immensem Nutzen sein können. Ein mathematisches Beispiel ist die berühmte Black and Scholes Formel zur Preisbestimmung von Optionen, die vom versicherungsmathematischen Standpunkt eine Stop-loss-prämie darstellt. Andererseits kann insbesondere die Lebensversicherungsmathematik von den Methoden der Finanzmathematik profitieren; ein mathematisches Beispiel sind hier stochastische Zinsmodelle.

Lassen Sie uns ein paar ausgewählte Modelle zusammen anschauen.

Das klassische Risikomodell in der Versicherungsmathematik betrachtet ein Kollektiv von Verträgen, das Risiken produziert. Bild 3 zeigt einen typischen Pfad des klassischen Risikoprozesses, der zu jedem Zeitpunkt t die Bilanz eines Portfolios darstellt:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0.$$

Dabei sind

u	das Anfangskapital
c	die Prämienrate
T_1, T_2, \dots	die Schadenankunftszeiten
	$N(t) = \#\{n \in \mathbb{N}; T_n \leq t\}, \quad t \geq 0$: Poissonprozess
X_1, X_2, \dots	die Schadenhöhen (unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen, unabhängig von $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$)
τ	der Ruinzeitpunkt.

Die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \mid R(0) = u)$$

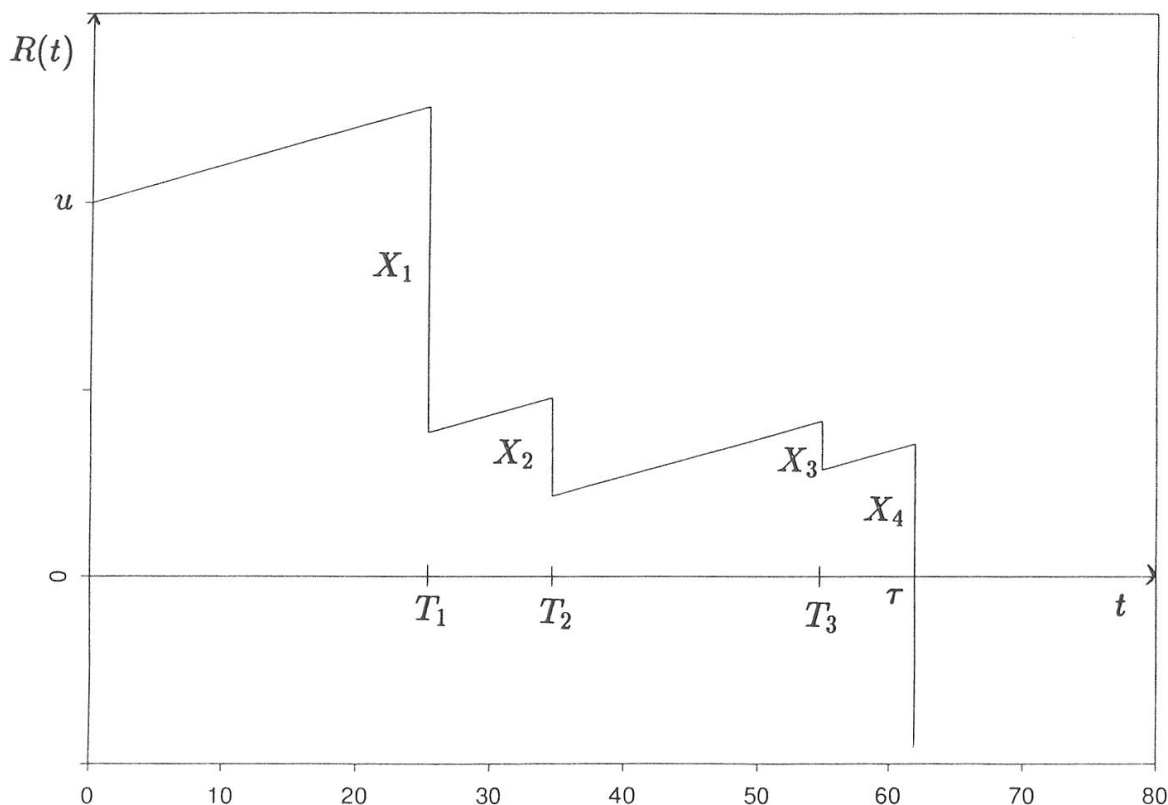


Bild 3: Ein Pfad des klassischen Risikoprozesses

dient als Mass für die Stabilität des Prozesses. Wie wirken sich nun Gross-schäden (oder Katastrophenrisiken) aus? Für moderate Schäden (z.B. exponentialverteilte) fällt die Ruinwahrscheinlichkeit exponentiell schnell (mit wachsendem Anfangskapital u) gegen 0.

Für Paretoverteilte Schäden, eine der klassischen Grossschadenverteilungen, fällt dagegen die Ruinwahrscheinlichkeit wie eine Potenzfunktion gegen 0, d.h. der Prozess ist bedeutend unstabiler. Das wird auch sichtbar in den Simulationen von Bild 4 und 5.

Mittlerweile wurde der klassische Risikoprozess in viele Richtungen verallgemeinert, um bestimmte ökonomische Zusammenhänge in das Modell einzubauen. Der Poissonprozess als Schadenankunftprozess impliziert z.B. dass eine feste Anzahl an Schäden in einem gegebenen Zeitintervall gleichverteilt sind. Clusterbildung in den Ankunftszeiten modelliert man durch andere Punktprozesse. Ein Beispiel ist das Polya-Eggenberger-Modell, wo der Poissonprozess durch einen negativen Binomialprozess ersetzt wird; damit werden zeitlich gehäufte

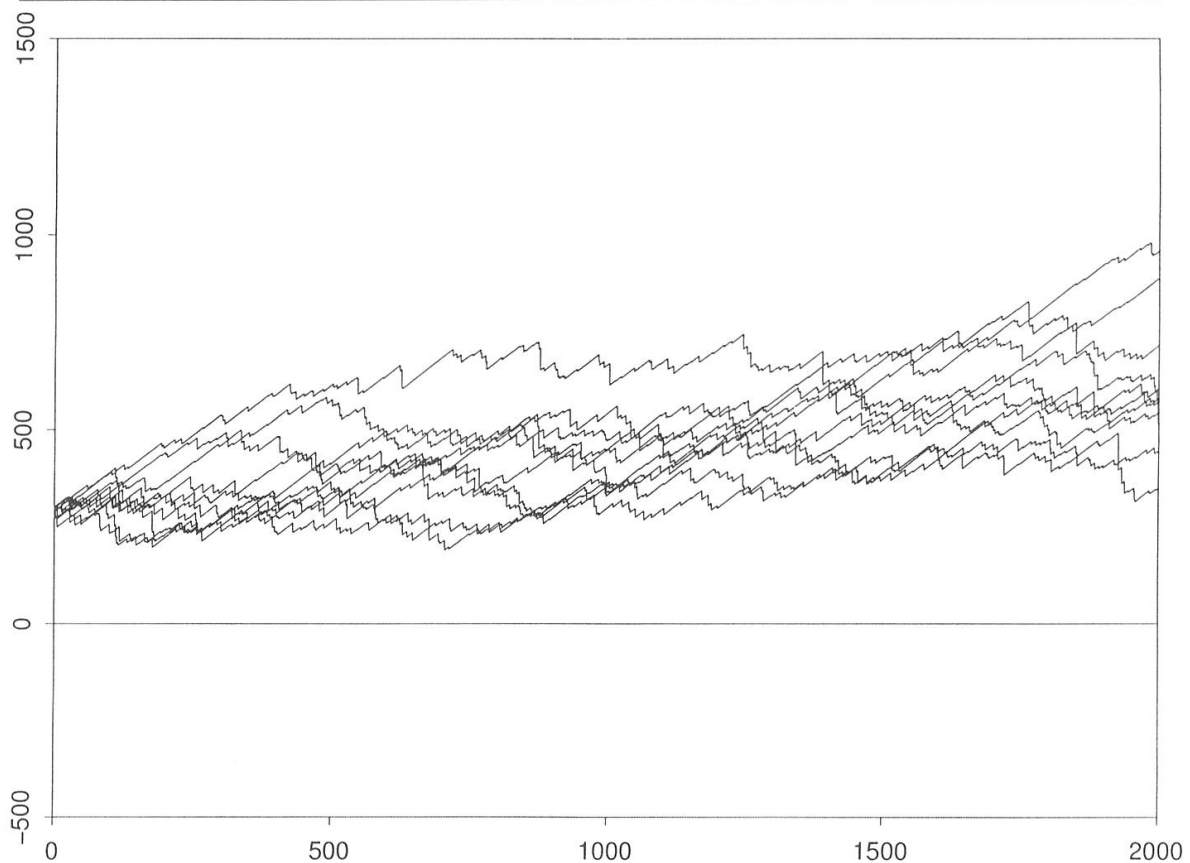


Bild 4: Pfade des klassischen Risikoprozesses mit exponentialverteilten Schäden

Schäden, also Ansteckungsmodelle, beschrieben. Eine wichtige Klasse bilden Risikoprozesse in Markovscher Umgebung. Dabei verändert sich die Umgebung im Laufe der Zeit. Sie ist definiert durch einen Intensitätsparameter, der die Schadenanzahl beschreibt, und durch eine Schadenhöhenverteilung. Falls auch nur in einer dieser Umgebungen eine Grossschadenverteilung auftritt, so bewirkt sie eine Instabilität des ganzen Prozesses. Technisch bedeutet dies, dass sie die Ruinwahrscheinlichkeit bestimmt. Eine weitere ökonomische Erweiterung des klassischen Prozesses sind Modelle mit Investmentmöglichkeiten und der Möglichkeit, Geld am Kapitalmarkt zu borgen.

Insbesondere für Katastrophenrisiken spielen sogenannte IBNR Modelle eine wichtige Rolle. Dabei wird berücksichtigt, dass einige Schäden erst lange nach ihrer Entstehung bekannt werden oder auch dass die zukünftige Kostenentwicklung von Einzelschäden unbekannt ist. Die entscheidende Frage dabei ist, Rückstellungen zur Deckung zukünftiger Schäden zu schätzen.

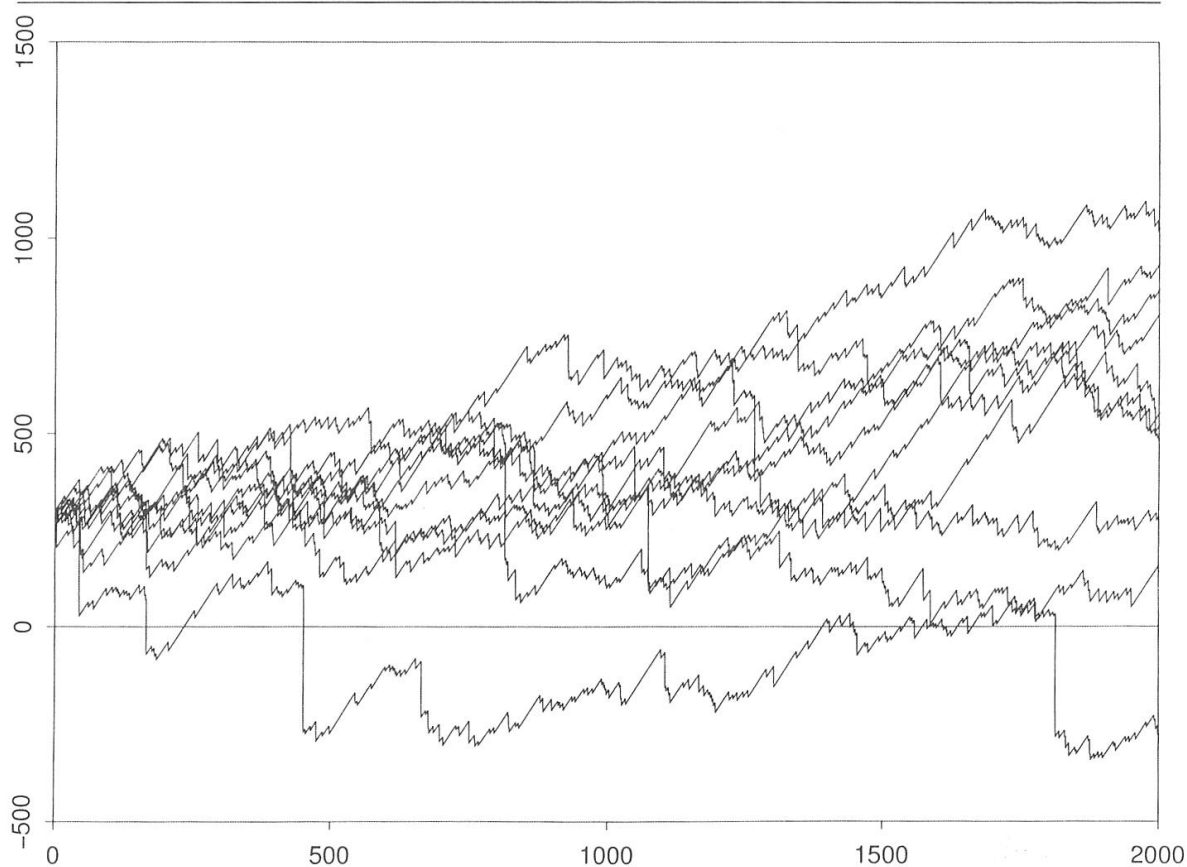


Bild 5: Pfade des klassischen Risikoprozesses mit Pareto verteilten Schäden

Das klassische Modell in der Finanzmathematik ist die geometrische Brownsche Bewegung. Der Preis einer Aktie wird als dynamischer Prozess modelliert:

$$dY(t) = rY(t) dt + \sigma Y(t) dB(t),$$

dabei sind

- r die risikolose Zinsrate
- σ die Volatilität
- $(B_t)_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung

Bild 6 zeigt einige simulierte Pfade einer standard Brownschen Bewegung. Mittels Ito-Calculus erhält man die Lösung

$$Y(t) = Y_0 \exp \{ \sigma B(t) - \sigma^2 t / 2 + rt \}, \quad t \geq 0,$$

also eine geometrische Brownsche Bewegung.

Dieses Modell ist allerdings ungeeignet zum Modellieren von grossen Fluktuationen wie sie z.B. der Aktienkurs in Bild 7 manifestiert.

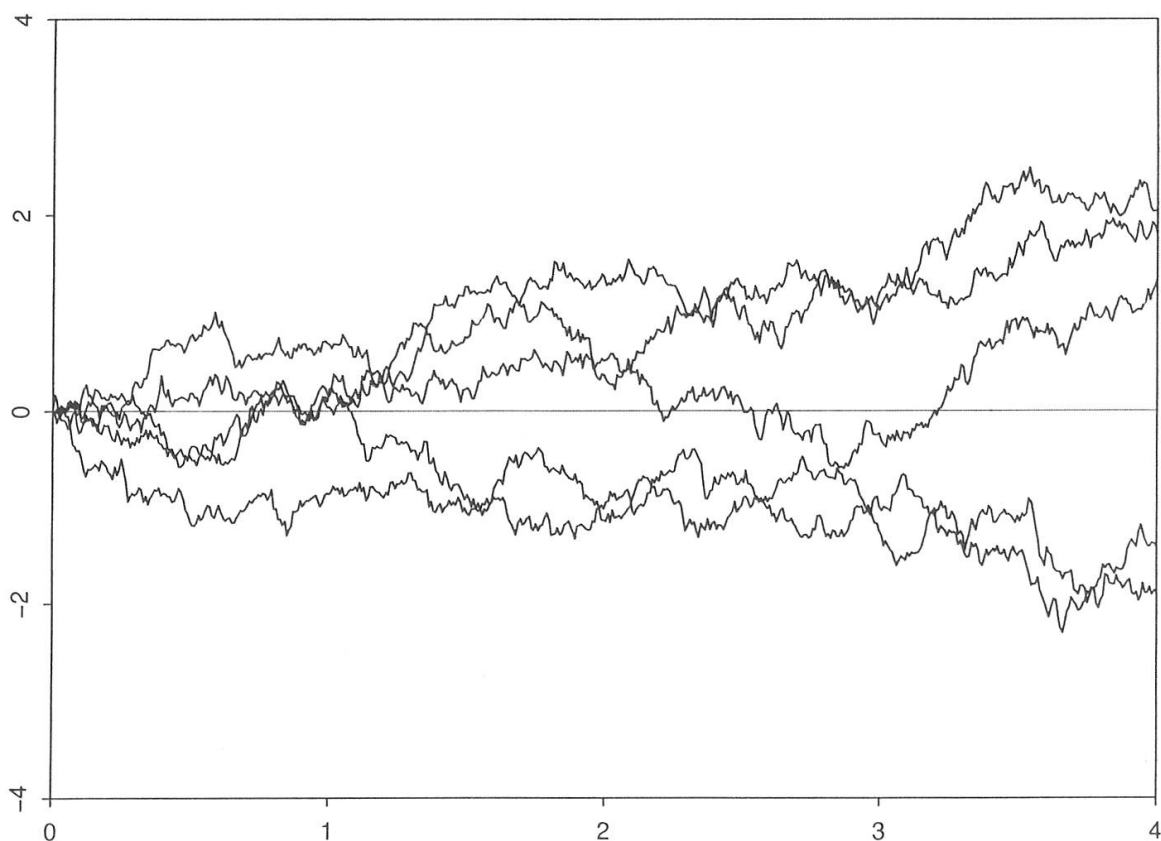


Bild 6: Pfade einer Brownschen Bewegung B

Die grossen Fluktuationen werden deutlich, wenn man den Differenzprozess in Bild 8 betrachtet. Für die Log-Differenzen würde man kaum an eine Folge normalverteilter Zufallsvariablen glauben, was eine Konsequenz der Modellierung mit der geometrischen Brownschen Bewegung wäre. Eine Möglichkeit, solche grossen Fluktuationen zu modellieren, bieten stabile Prozesse. Für den Preisprozess der Aktie bedeutet das, dass man die Brownsche Bewegung $(B(t))_{t \geq 0}$ durch eine sogenannte alpha-stabile Bewegung $(S_\alpha(t))_{t \geq 0}$ für $\alpha < 2$ ersetzt.

Bild 9 zeigt einige simulierte Pfade von S_α für $\alpha = 1.7$. Charakteristisch sind dabei die Sprünge. Dieser Effekt schlägt auf den Preisprozess $(Y(t))_{t \geq 0}$ durch. Solche Modelle dienen z.B. als Grundlage zur Berechnung von Optionspreisen und anderen derivativen Instrumenten. Eine (Europäische) Kaufoption beinhaltet das Recht, eine Aktie an einem bestimmten zukünftigen Tag zu einem vorher festgelegten Preis zu kaufen. Der Preis K heisst Ausübungspreis und der Tag T heisst Fälligkeitstermin der Option. Für dieses Recht muss man nun einen Preis bezahlen und zwar am Tag des Kaufes der Option, also lange vor



Bild 7: Tageskurse einer Aktie (1983–1987)

dem Fälligkeitstermin. Man weiss am Kauftag nichts über den Kurs der Aktie am Fälligkeitstermin.

Der Wert der Option zum Zeitpunkt T ist

$$C_T = \max\{Y(T) - K, 0\}.$$

Als Preis der Option am Fälligkeitstermin erhält man im Falle der geometrischen Brownschen Bewegung die berühmte Black-Scholes-Formel

$$P = E \max\{Y(T) - K, 0\} = x\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

wobei x der Tageskurs der Aktie ist, Φ die Standardnormalverteilungsfunktion und

$$d_1 = (\log(x/k) + \sigma^2 T/2 + rT)/\sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = (\log(x/k) + \sigma^2 T/2 - rT)/\sigma\sqrt{T}$$

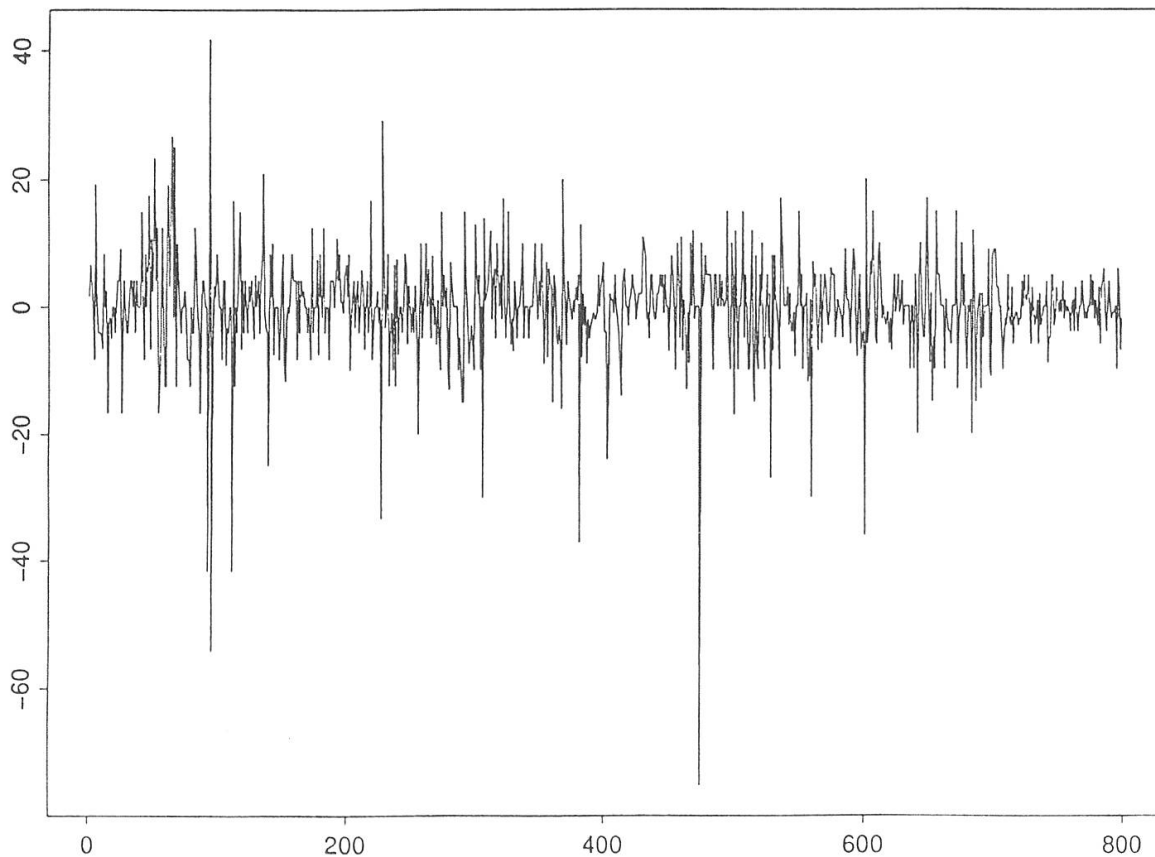


Bild 8: Der Log-Differenz-Prozess für obige Aktienkurse

Im Falle der stabilen Bewegung lässt sich P nicht in solch expliziter Form darstellen. Ein Vergleich der Dichte von C_T für $(B(t))_{t \geq 0}$ und $(S_\alpha(t))_{t \geq 0}$ zeigt, dass diese im α -stabilen Fall für $\alpha < 2$ bedeutend langschwänziger ist als im Fall der geometrischen Brownschen Bewegung. Als Konsequenz wird man den Preis P deutlich höher wählen müssen, um das höhere Risiko zu kompensieren.

Mathematischen Methoden in der Versicherungs- und Finanzmathematik sind gerade für die komplexeren Modelle heutzutage hochinteressant. Einige Schlagworte sind SDE und Diffusionsprozesse, Martingalmethoden und Punktprozesse, Extremwerttheorie und Zeitreihen, und eben insbesondere stabile Prozesse zur Modellierung von grossen Fluktuationen in Versicherungs- und Finanzdaten.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Grundlage für alle unsere wissenschaftlichen Bemühungen der Glaube ist, die Welt verstehen zu können, indem wir über sie nachdenken. Indem wir die Welt um uns beobachten und unseren Verstand gebrauchen, können wir erklären, weshalb Dinge geschehen und wie

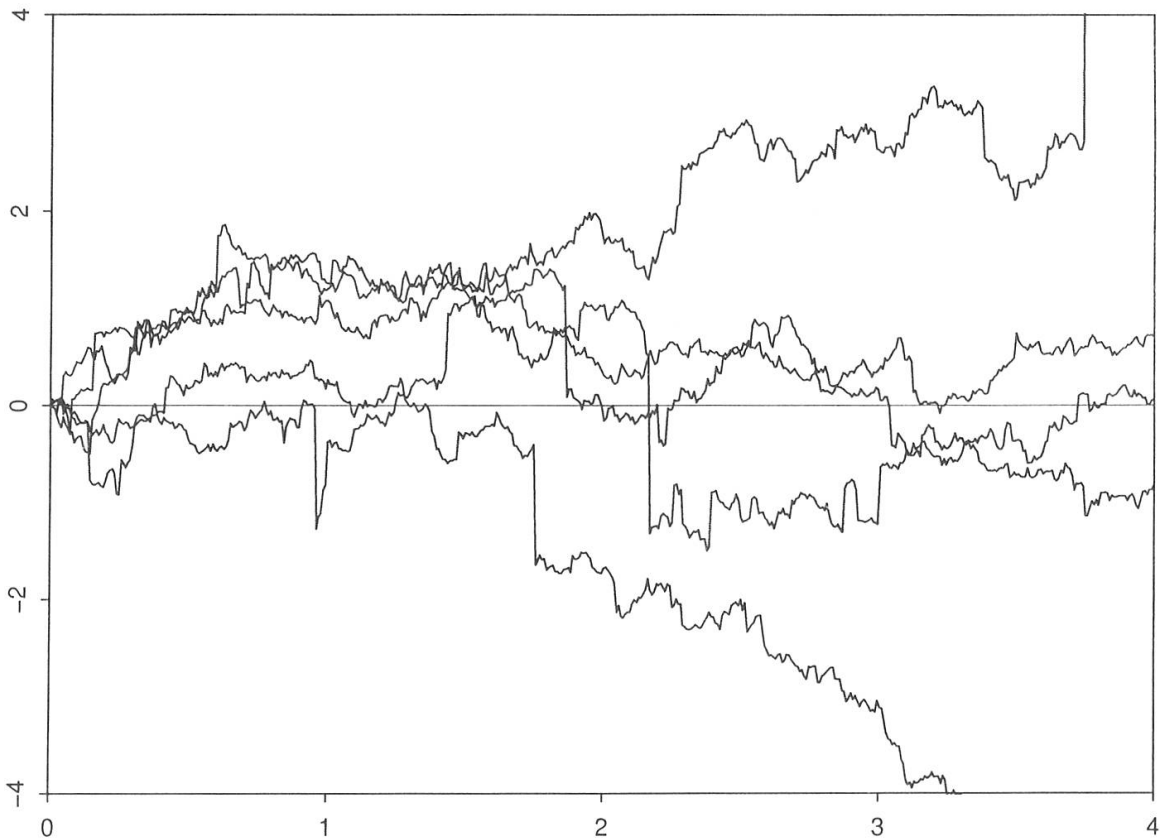


Bild 9: Pfade einer α -stabilen Bewegung für $\alpha = 1,5$

sie geschehen. Je länger wir die Welt beobachten, umso besser verstehen wir sie und umso besser werden unsere Modelle und damit unsere Vorhersagen. Die Modellierung und Vorhersage von Katastrophen stellt sicherlich ein sehr bedeutendes, und auch mathematisch reizvolles Problem dar. Eine weitaus wichtigere Aufgabe ist jedoch die Verhinderung von Katastrophen, und dieses Ziel dürfen wir über der Faszination unserer mathematischen Modelle weder vergessen noch versäumen.

Claudia Klüppelberg
Departement Mathematik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich

Graphiken

Die Graphiken wurden von K. Binswanger mit Hilfe des Programmpaketes S-PLUS erstellt. Ich danke ihm hierfür sehr herzlich.

Literatur

- Brillinger, D.R., Earthquake risk and insurance. *Environmetrics* **4** (1993), 1–21.
- Berge, Wasser, Katastrophen. Report der Schweizerischen Rückversicherungs-Gesellschaft, 1988.
- Buisland, T.A., Statistics of extremes in climatology. *Statistica Neerlandica* **43** (1989), 1–30.
- Coles, S.G., Regional modellin of extreme storms via max-stable processes. *J.R. Statist. Soc. B* **55** (1993), 797–816.
- Dijk, V.; de Haan, L., *On the estimation of the exceedance probability of a high level*. Report 9051/A Erasmus University Rotterdam (1990).
- Janicki, A.; Weron, A., *Lévy α -stable stochastic processes: Simulation and chaotic behaviour*. To appear 1994.
- Karplus, W.J., *The heavens are falling*. Plenum Press New York 1992.
- Keller, B.; Klüppelberg, C., Statistical estimation of large claim distributions. *Mitteilungen der SVVM* 2/1991, 203–216.
- Klüppelberg, C.; Villasenor, J.A., Estimation of distribution tails – a semiparametric approach. *Blätter der DGVM* **21** (1993), 213–235.
- Risiko: zwischen Chance und Gefahr*. Reto Locher & Partner AG, Basel 1992.
- Robb, S., *Prophecies on World Events by Nostradamus*. Liveright New York, 1979.
- sigma: *Naturkatastrophen und Grossschäden 1990*. Report der Schweizerischen Rückversicherungs-Gesellschaft.

Zusammenfassung

Die Modellierung und statistische Analyse von katastrophalen Ereignissen erfordern spezielle Methoden. Wir stellen einige Modelle aus der Versicherungs- und Finanzmathematik vor und beschreiben den Effekt von extremalen Ereignissen. An einem einfachen Beispiel erläutern wir die Poissonapproximation für Extrema, auf der die wichtigsten statistischen Methoden basieren.

Summary

Modelling and statistical analysis of catastrophic events require special methods. We introduce some insurance and finance models and describe the effect of extremal events. For a simple example we explain the Poisson approximation for extremes, which is the basis of the most important statistical methods in this field.

Résumé

La modélisation et l'analyse statistique des événements catastrophiques reposent sur des méthodes spécifiques. Nous présentons des modèles mathématiques de l'assurance et de la finance et nous décrivons les effets des événements extrêmes. Dans le cas d'un exemple simple nous expliquons l'approximation de Poisson pour les valeurs extrêmes, approximation sur laquelle se basent les méthodes statistiques les plus importantes de ce domaine.

