# D. Kurzmitteilungen

MICHAEL WEBA, Hamburg

## Zur Konvergenzordnung bei der Diskretisierung von Gesamtschadenverteilungen

Im kollektiven Modell der Risikotheorie hat die Gesamtschadenverteilung $P$ die Darstellung

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\} \cdot Q^{*k} ,$$

wobei die Schadenzahlverteilung $R$ auf $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und die Schadenhöhenverteilung $Q$ auf die positive Halbachse $(0, \infty)$ konzentriert seien. Zahlreiche Verfahren zur Berechnung von $P$ – z.B. das Rekursionsverfahren von Panjer – sind für arithmetische Schadenhöhenverteilungen konzipiert. Falls $Q$ nicht arithmetisch ist, so wählt man zur Schrittweite $h > 0$ eine Diskretisierung $Q_h$ und wendet die Algorithmen stattdessen auf die Verteilung

$$P_h = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\} \cdot Q_h^{*k}$$

an. Von Bedeutung ist deshalb die Abschätzung des Approximationsfehlers. Sei $Q$ absolutstetig mit der Lebesgue-Dichte $q$; dann ist die einfachste Diskretisierung gemäß

$$Q_h\{jh\} = \int_{(j-1)h}^{jh} q(x)\,dx , \quad j = 1, 2, \ldots$$

definiert. Bei dieser Approximation ist das Versicherungsunternehmen "auf der sicheren Seite", da $Q_h$ stochastisch nicht kleiner als $Q$ ist. Der Kolmogoroff-Abstand zwischen $P$ und $P_h$ genügt bekanntlich der Abschätzung

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t]| \leq C(Q, h) \cdot m(R) ,$$

wobei $m(R) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R\{k\}$ den Erwartungswert von $R$ und

$$C(Q,h) = \sup_{t\in\mathbb{R}} Q(t, t+h]$$

das Konzentrationsmaß von $Q$ bezeichnen. Bei den meisten Anwendungen ist $m(R)$ endlich und die Verteilungsfunktion von $Q$ Lipschitz – stetig, d.h. es gibt eine Konstante $a > 0$ mit $Q(t, t+h] \leq a \cdot h$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Unter diesen beiden Annahmen ist der Kolmogoroff-Abstand mindestens von der Ordnung $O(h)$. In Analogie zu verwandten Diskretisierungsproblemen taucht die natürliche Frage auf, ob die Ordnung $O(h)$ zu pessimistisch ist und ob zusätzliche Voraussetzungen eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit nach sich ziehen. Das Ziel dieser Note ist der Nachweis, daß sich der Kolmogoroff-Abstand für **keine** Schadenhöhenverteilung $Q$ mit stetiger Verteilungsfunktion wie $o(h)$ verhalten kann und daher die obengenannte Abschätzung nicht mehr substantiell zu verbessern ist; lediglich der Trivialfall $R\{0\} = 1$ muß ausgeschlossen werden. Wenn $Q$ die stetige Verteilungsfunktion $F$ besitzt – ohne notwendige absolutstetig zu sein – so ist $Q_h$ gemäß

$$Q_h\{jh\} = F(jh) - F((j-1)h)\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

erklärt, und die Definition der diskreten Approximation

$$P_h = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\} \cdot Q_h^{*k}$$

von $P$ bleibt unverändert.

**Satz** *$R$ sei eine Schadenzahlverteilung mit $R\{0\} < 1$. Dann existiert keine auf $(0,\infty)$ konzentrierte Schadenhöhenverteilung $Q$ mit stetiger Verteilungsfunktion derart, daß der Kolmogoroff-Abstand zwischen $P$ und $P_h$ für $h \to 0$ der Relation*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t]| = o(h)$$

*genügt.*

Beweis: $Q$ bezeichne eine auf $(0,\infty)$ konzentrierte Verteilung mit stetiger Verteilungsfunktion $F$. Sei $t \in \mathbb{R}$. Da $Q_h^{*k}$ für jedes $k \geq 0$ stochastisch nicht kleiner ist als $Q^{*k}$, ergibt sich für jedes $k \geq 0$ die Ungleichung

$$P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq R\{k\} \cdot (Q^{*k}(-\infty, t] - Q_h^{*k}(-\infty, t])\,.$$

Diese Ungleichung impliziert

$$P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq R\{k\} \cdot (Q^{*k}(-\infty, t] - (Q^{*k})_h(-\infty, t]),$$

denn $Q_h^{*k}$ ist stochastisch nicht kleiner als die Diskretisierung $(Q^{*k})_h$ der Faltung $Q^{*k}$. Hieraus folgt die Relation

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq R\{k\} \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}}(Q^{*k}(-\infty, t] - (Q^{*k})_h(-\infty, t])$$

für ein spezielles $k \geq 1$ mit $R\{k\} > 0$ aufgrund der Annahme $R\{0\} < 1$. Die Stetigkeit der Verteilungsfunktion $F^{*k}$ von $Q^{*k}$ garantiert

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}}(Q^{*k}(-\infty, t] - (Q^{*k})_h(-\infty, t]) &\geq \sup_{j\geq 1}\left(F^{*k}(jh) - F^{*k}((j-1)h)\right) \\ &\geq \frac{1}{2} C(Q^{*k}, h),\end{aligned}$$

so daß man die Abschätzung

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq \frac{1}{2} R\{k\} \cdot C(Q^{*k}, h)$$

mit $R\{k\} > 0$ erhält. Ist der Kolmogoroff-Abstand zwischen $P$ und $P_h$ für $h \to 0$ von der Ordnung $o(h)$, so folgt

$$C(Q^{*k}, h) = o(h).$$

Das Konzentrationsmaß $C(Q^{*k}, h)$ stimmt wegen der Monotonie von $F^{*k}$ mit dem Stetigkeitsmodul von $F^{*k}$ überein. Aus Satz 3.1.2 auf S. 100 von Müller (1978) ergibt sich dann der Widerspruch, daß $F^{*k}$ eine konstante Funktion ist. $\square$

## Literaturhinweis

*Müller, M.W.* (1978). Approximationstheorie. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft

**Acknowledgement.** Der Autor möchte sich bei einem unbekannten Gutachter für die sehr sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes bedanken.

Michael Weba
Universität Hamburg
Institut für Mathematische Stochastik
Bundesstr. 55
20146 Hamburg