Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1994)

Heft: 1

Rubrik: Kurzmitteilungen

D. Kurzmitteilungen

MICHAEL WEBA, Hamburg

Zur Konvergenzordnung bei der Diskretisierung von Gesamtschadenverteilungen

Im kollektiven Modell der Risikotheorie hat die Gesamtschadenverteilung P die Darstellung

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\} \cdot Q^{*k} ,$$

wobei die Schadenzahlverteilung R auf $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und die Schadenhöhenverteilung Q auf die positive Halbachse $(0, \infty)$ konzentriert seien. Zahlreiche Verfahren zur Berechnung von P – z.B. das Rekursionsverfahren von Panjer – sind für arithmetische Schadenhöhenverteilungen konzipiert. Falls Q nicht arithmetisch ist, so wählt man zur Schrittweite $h > 0$ eine Diskretisierung Q_h und wendet die Algorithmen stattdessen auf die Verteilung

$$P_h = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\} \cdot Q_h^{*k}$$

an. Von Bedeutung ist deshalb die Abschätzung des Approximationsfehlers. Sei Q absolutstetig mit der Lebesgue-Dichte q; dann ist die einfachste Diskretisierung gemäß

$$Q_h\{jh\} = \int_{(j-1)h}^{jh} q(x)\, dx , \quad j = 1, 2, \ldots$$

definiert. Bei dieser Approximation ist das Versicherungsunternehmen "auf der sicheren Seite", da Q_h stochastisch nicht kleiner als Q ist. Der Kolmogoroff-Abstand zwischen P und P_h genügt bekanntlich der Abschätzung

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t]| \leq C(Q, h) \cdot m(R) ,$$

wobei $m(R) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R\{k\}$ den Erwartungswert von R und

$$C(Q,h) = \sup_{t \in \mathbb{R}} Q(t, t+h]$$

das Konzentrationsmaß von Q bezeichnen. Bei den meisten Anwendungen ist $m(R)$ endlich und die Verteilungsfunktion von Q Lipschitz – stetig, d.h. es gibt eine Konstante $a > 0$ mit $Q(t, t+h] \leq a \cdot h$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Unter diesen beiden Annahmen ist der Kolmogoroff-Abstand mindestens von der Ordnung $O(h)$. In Analogie zu verwandten Diskretisierungsproblemen taucht die natürliche Frage auf, ob die Ordnung $O(h)$ zu pessimistisch ist und ob zusätzliche Voraussetzungen eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit nach sich ziehen. Das Ziel dieser Note ist der Nachweis, daß sich der Kolmogoroff-Abstand für **keine** Schadenhöhenverteilung Q mit stetiger Verteilungsfunktion wie $o(h)$ verhalten kann und daher die obengenannte Abschätzung nicht mehr substantiell zu verbessern ist; lediglich der Trivialfall $R\{0\} = 1$ muß ausgeschlossen werden. Wenn Q die stetige Verteilungsfunktion F besitzt – ohne notwendige absolutstetig zu sein – so ist Q_h gemäß

$$Q_h\{jh\} = F(jh) - F((j-1)h)\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

erklärt, und die Definition der diskreten Approximation

$$P_h = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\} \cdot Q_h^{*k}$$

von P bleibt unverändert.

Satz *R sei eine Schadenzahlverteilung mit $R\{0\} < 1$. Dann existiert keine auf $(0,\infty)$ konzentrierte Schadenhöhenverteilung Q mit stetiger Verteilungsfunktion derart, daß der Kolmogoroff-Abstand zwischen P und P_h für $h \to 0$ der Relation*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t]| = o(h)$$

genügt.

Beweis: Q bezeichne eine auf $(0,\infty)$ konzentrierte Verteilung mit stetiger Verteilungsfunktion F. Sei $t \in \mathbb{R}$. Da Q_h^{*k} für jedes $k \geq 0$ stochastisch nicht kleiner ist als Q^{*k}, ergibt sich für jedes $k \geq 0$ die Ungleichung

$$P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq R\{k\} \cdot (Q^{*k}(-\infty, t] - Q_h^{*k}(-\infty, t])\,.$$

Diese Ungleichung impliziert

$$P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq R\{k\} \cdot (Q^{*k}(-\infty, t] - (Q^{*k})_h(-\infty, t]),$$

denn Q_h^{*k} ist stochastisch nicht kleiner als die Diskretisierung $(Q^{*k})_h$ der Faltung Q^{*k}. Hieraus folgt die Relation

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq R\{k\} \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}}(Q^{*k}(-\infty, t] - (Q^{*k})_h(-\infty, t])$$

für ein spezielles $k \geq 1$ mit $R\{k\} > 0$ aufgrund der Annahme $R\{0\} < 1$. Die Stetigkeit der Verteilungsfunktion F^{*k} von Q^{*k} garantiert

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}}(Q^{*k}(-\infty, t] - (Q^{*k})_h(-\infty, t]) &\geq \sup_{j\geq 1}\left(F^{*k}(jh) - F^{*k}((j-1)h)\right) \\ &\geq \frac{1}{2} C(Q^{*k}, h),\end{aligned}$$

so daß man die Abschätzung

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} P(-\infty, t] - P_h(-\infty, t] \geq \frac{1}{2} R\{k\} \cdot C(Q^{*k}, h)$$

mit $R\{k\} > 0$ erhält. Ist der Kolmogoroff-Abstand zwischen P und P_h für $h \to 0$ von der Ordnung $o(h)$, so folgt

$$C(Q^{*k}, h) = o(h).$$

Das Konzentrationsmaß $C(Q^{*k}, h)$ stimmt wegen der Monotonie von F^{*k} mit dem Stetigkeitsmodul von F^{*k} überein. Aus Satz 3.1.2 auf S. 100 von Müller (1978) ergibt sich dann der Widerspruch, daß F^{*k} eine konstante Funktion ist. □

Literaturhinweis

Müller, M.W. (1978). Approximationstheorie. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft

Acknowledgement. Der Autor möchte sich bei einem unbekannten Gutachter für die sehr sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes bedanken.

Michael Weba
Universität Hamburg
Institut für Mathematische Stochastik
Bundesstr. 55
20146 Hamburg