Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 4 (1931-1934)
Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs
Kapitel: Introduction
Autor: Chuard, Jules
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ VAUDOISE DES SCIENCES NATURELLES
N° 25 1932 Vol. 4, N° 2

Les réseaux cubiques et Le problème des quatre couleurs

PAR

Jules CHUARD

(Mémoire présenté à la séance du 3 février 1932, publié avec l'appui financier de la Société Académique Vaudoise)

INTRODUCTION

Le *Problème des quatre couleurs*, souvent aussi dénommé: *Théorème des quatre couleurs*, s'est acquis une juste renommée parmi les questions d'*Analysis Situs*, tant par la simplicité de son énoncé, que par les difficultés qui se sont révélées à l'occasion de sa résolution.

On a constaté, d'une façon expérimentale, que quatre couleurs ont toujours été suffisantes jusqu'ici, pour colorier les différents pays d'une carte terrestre, de telle manière que deux pays voisins soient pourvus de couleurs distinctes. Il y a lieu d'ajouter que l'on entend par pays voisins, des pays qui ont une ligne frontière commune. S'ils ne se touchent qu'en un point, autrement dit s'ils n'ont qu'une borne commune, ils ne sont pas considérés comme voisins et peuvent par conséquent recevoir la même couleur.

La question suivante s'est alors posée :

Des régions de forme arbitraire et en nombre quelconque étant disposées sur une sphère (ou sur un plan) *sera-t-il possible dans tous les cas imaginables d'effectuer le coloriage de ces régions à l'aide de quatre couleurs seulement* ?

Tel est l'énoncé d'un problème qui a été proposé au monde mathématicien par le professeur Cayley, le 13 juin 1878, dans une séance de la Société mathématique de Londres. On en parlait certes antérieurement, mais son origine ne paraît pas pouvoir être indiquée d'une façon précise.

Dès lors, un grand nombre de spécialistes ont consacré à l'étude de cette question de sérieuses méditations. C'est ce qui explique qu'à l'heure actuelle sa bibliographie comporte une cinquantaine de mémoires, sans que l'on soit pour autant parvenu à la justifier ou à l'infirmer.

Il est curieux de constater que le même problème posé sur un tore, autrement dit sur un anneau, soit une surface plus compliquée que la sphère, est résolu depuis fort longtemps. On a montré en effet que, dans les cas les plus compliqués, sept couleurs sont nécessaires et suffisantes pour assurer le coloriage de la carte dans les conditions requises.

Mais si l'on en revient au problème de la carte sur une sphère, on doit reconnaître que les diverses publications, dont on vient de rappeler la grande variété, ne furent pas inutiles. Elles ont permis de déblayer le terrain, en ce sens que peu à peu l'on a acculé la difficulté dans un type de carte d'un caractère nettement défini. Cette carte est alors dénommée: *carte minima, carte normale,* ou aussi carte appartenant au *cas difficile.*

Une carte minima a ceci de particulier que chaque borne sert de frontière commune à trois pays distincts et à trois seulement. L'ensemble des frontières constitue alors un système de lignes qui est connu sous le nom de *réseau cubique.* Or, tandis que nos prédécesseurs, en ce domaine, ont eu plus spécialement en vue des méthodes de coloriage proprement dites, nous nous sommes résolument écarté de cette voie, pour nous attacher à l'étude des propriétés des réseaux cubiques, des réseaux cubiques tracés sur une sphère, et enfin, de ceux qui sont fournis par les cartes minima.

C'est en lisant la brochure de M. Veblen, que l'idée nous vint d'aborder cette étude. Nous avons été frappé par la simplicité des résultats auxquels conduit l'application de la méthode de cet auteur en ce qui concerne la *réduction d'un réseau cubique donné en un réseau linéaire et un réseau quadratique,* ainsi que de l'importance que présente, au point de vue du coloriage, une classification des réseaux quadratiques issus de cette réduction. Ce début nous a d'ailleurs valu une Note à l'Académie des Sciences de Paris.

Mais cette méthode, malgré des avantages incontestés, ne nous a pas permis de résoudre l'ensemble des difficultés que comporte la question. Pour en venir à bout, nous nous vîmes dans l'obligation, à un moment donné, de faire intervenir des propriétés assez peu connues des *arbres linéaires* et *superficiels*.

Nous justifions ainsi, d'une façon affirmative, le problème des quatre couleurs, en indiquant du même coup une méthode de coloriage qui convient aux cartes minima. Les différents pays de la carte sont répartis en deux arbres superficiels distincts, grâce à un contour fermé unique, qui rencontre tous les sommets du réseau cubique donné. Et comme deux couleurs suffisent pour distinguer les pays de chaque arbre superficiel, la carte elle-même est coloriée à l'aide de quatre couleurs.

Il est clair que si la carte originale n'appartient pas au cas difficile, on commencera par lui faire subir les transformations d'usage, qui la rendront carte minima, c'est-à-dire apte à recevoir l'application de notre méthode. Après quoi, par une série d'opérations inverses, on reviendra à la carte donnée, laquelle sera entièrement coloriée à l'aide de quatre couleurs.

Pendant la préparation de ce travail, nous avons fait les communications orales suivantes :

1. Société vaudoise des Sciences naturelles, séances du 5 juillet 1922, 3 décembre 1924, 3 février 1932.
2. Société mathématique suisse, séances du 26 août 1922, 6 mai 1923.
3. Colloque mathématique des Universités de la Suisse romande, à Genève, le 17 février 1923.
4. Cercle mathématique de Lausanne, séance du 20 juin 1930.

La Note qui a paru dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, en date du 8 janvier, est intitulée:

Quelques propriétés des réseaux cubiques tracés sur une sphère.

La bibliographie, dont nous nous sommes servi, est restreinte. Il convient de citer :

1. O. VEBLEN: *An Application of modular Equations in Analysis Situs*, (Annals of Mathematics, Princeton, 1912).
2. A. ERRERA: *Du coloriage des cartes et de quelques questions d'Analysis Situs* (Paris, 1921).
3. JULES CHUARD: *Questions d'Analysis Situs* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1922).

A ces ouvrages, nous ajouterons les deux fascicules XVIII et XLI du Mémorial des Sciences mathématiques qui donnent un aperçu très complet sur l'état de la question au moment de leur publication. Le second, en particulier, mentionne 43 auteurs et 53 travaux sur le problème des quatre couleurs. Il nous dispensera de faire d'autres citations.

4. A. Sainte-Lagüe: *Les Réseaux.* Fascicule XVIII. 1926.
5. A. Sainte-Lagüe: *Géométrie de situation et jeux.* Fascicule XLI. 1929.

§ 1. Les Réseaux.

Nous avons défini antérieurement ce que l'on entend par *configuration linéaire* [1] ou *réseau.* Rappelons-en brièvement les fondements.

Une *arête* est un segment linéaire, soit un *arc de courbe de Jordan,* ou encore un lien *simple ouvert.* Elle est limitée à ses extrémités par deux points appelés *sommets.* Les sommets font partie de l'arête qu'ils limitent, mais ils sont dits *points extérieurs,* par opposition aux autres points de l'arête, lesquels sont dits *points intérieurs.*

Tout ensemble d'arêtes, en nombre fini, tel qu'un point intérieur de l'une n'appartienne jamais à une autre arête de l'ensemble, constitue ce que l'on nomme une *configuration linéaire,* un *réseau* ou un *assemblage* (*graph,* en anglais).

Nous désignerons par α_1 le nombre de ses arêtes et par α_0 celui de ses sommets. Le réseau est alors dit *d'ordre* α_0.

On entend par *degré* d'un sommet, le nombre des arêtes du réseau qui aboutissent à ce sommet. Un sommet de degré 1 sera dit *sommet libre.* Il sera dit de *liaison,* lorsque son degré est supérieur à 1. Nous conviendrons encore de nommer *bifurcation* un sommet (de liaison) dont le degré est égal à 3.

Si tous les sommets d'un réseau ont le même degré, le réseau est dit *homogène.* Un réseau homogène du premier degré est appelé réseau *linéaire.* Il ne renferme que des sommets libres. Il est donc représenté par un certain nombre d'arêtes isolées. Et puisque chaque arête a pour frontière deux sommets, on a l'égalité

$$\alpha_0 = 2\,\alpha_1$$

[1] J. Chuard : *Loc. cit.* 3.