Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 4 (1931-1934)

Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs

Kapitel: La matrice A

Autor: Chuard, Jules

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

entendu, que la soudure de ces différents types de configurations linéaires, n'entraîne pas la formation d'un second contour fermé.

§ 2. La matrice A.

Il est possible de caractériser un réseau à l'aide d'une certaine matrice, introduite par M. Veblen[1] sous le nom de *matrice A*.

Soit un réseau comprenant α_0 sommets et α_1 arêtes. Les frontières de chacune des α_1 arêtes sont constituées par deux sommets pris parmi les α_0 sommets considérés. Numérotons sommets et arêtes dans un ordre arbitraire et désignons:

les sommets par $a_1^0,\ a_2^0, \ldots\ldots, a_i^0, \ldots\ldots, a_{\alpha_0}^0$

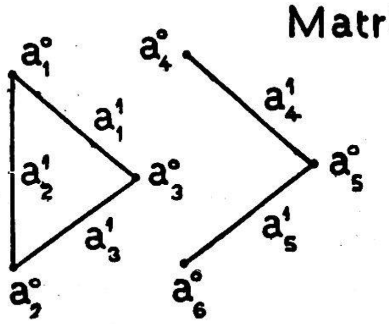
et les arêtes par $a_1^1,\ a_2^1, \ldots\ldots, a_j^1, \ldots\ldots, a_{\alpha_1}^1$.

Soit maintenant η_{ij}^1 un nombre qui est égal à 1 si le sommet a_i^0 est frontière de l'arête a_j^1 et qui est nul dans tous les autres cas. Rangeons ces nombres en un tableau rectangulaire de α_0 lignes et α_1 colonnes en admettant que la ligne de rang i corresponde au sommet a_i^0, tandis que la colonne de rang j correspond à l'arête a_j^1. Le tableau ainsi formé est la *matrice A*.

L'on peut remarquer que dans cette matrice:

1° chaque colonne renferme deux nombres η_{ij}^1 égaux à 1 et deux seulement, car elle correspond à une arête qui a par définition ses extrémités distinctes.

2° la quantité de nombres η_{ij}^1 égaux à 1 que renferme une ligne indique le degré du sommet correspondant, soit le nombre d'arêtes qui aboutissent à ce sommet. Ainsi la ligne qui correspond à un sommet libre ne contient qu'un seul nom-



Matrice A $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ a_1^0 \\ a_2^0 \\ a_3^0 \\ a_4^0 \\ a_5^0 \\ a_6^0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \end{array}$$

FIG. 1. — Réseau non connexe.

[1] O. VEBLEN : *Loc. cit.* 1.

bre η^1_{ij} différent de zéro; celle qui correspond à un sommet de degré 2 en contient deux, etc.

Si d'une part, à un réseau correspond une matrice A, de l'autre, à une matrice A qui renferme des nombres zéro et un, et qui satisfait à la condition 1° ci-dessus, correspond un réseau bien déterminé. Une matrice A peut donc servir à définir un réseau.

Lorsqu'un réseau n'est pas connexe, il est possible de numéroter ses éléments, sommets et arêtes, de telle façon que la matrice A correspondante apparaisse aussi comme formée de matrices séparées. Nous nous bornerons à mettre ce fait en évidence à l'aide de l'exemple fig. 1.

§ 3. **Les propriétés de la matrice A.**

Nous disons qu'un déterminant est extrait de la matrice A, s'il est formé de certaines colonnes et d'autant de lignes de cette matrice.

Pour rechercher la valeur d'un déterminant extrait de la matrice A, comme pour déterminer le rang de celle-ci, on est conduit à effectuer des opérations arithmétiques qui peuvent se résumer de la façon suivante :

1° additionner deux lignes ou deux colonnes entre elles,

2° multiplier les termes d'une ligne ou d'une colonne par un certain facteur.

Nous admettrons alors que les combinaisons des nombres η^1_{ij} qui en résultent, seront toujours réduites selon le module 2. En d'autres termes, nous n'aurons à appliquer que les quatre genres d'addition :

$$1+1=0\,, \quad 1+0=1\,, \quad 0+1=1\,, \quad 0+0=0$$

et les quatre genres de multiplication :

$$0.1=0\,, \quad 0.0=0 \quad 1.1=1\,, \quad 1.0=0\,,$$

De cette façon, non seulement les nombres η^1_{ij}, mais encore tous ceux qui en résulteront par suite des combinaisons 1° et 2° ne prendront pour valeur que zéro ou un.

Il est particulièrement intéressant de rechercher la valeur d'un déterminant dont les lignes et les colonnes correspondent respectivement aux sommets et aux arêtes de chacun des types de configurations linéaires connexes que nous avons définis plus haut. A ce propos, on remarquera que le nom-