Cas général

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **4 (1931-1934)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

C'est ainsi que les fig. 1, 2, 3, 5, planche X, représentent des contours Z, tandis que les fig. 4, 6, 7, 8, représentent des contours V.

Nous conviendrons enfin de désigner sous le nom d'*opération double* le passage du contour PQ au contour PQ_1 ou de ce dernier à PQ_2, ou, d'une manière générale, du contour PQ_i au contour PQ_{i+1}.

Une opération double comporte, comme son nom l'indique, deux opérations: 1) l'association d'une arête conjointe, ce qui a pour effet de faire apparaître une bifurcation, 2) la suppression d'une arête de façon à faire disparaître la bifurcation. Comme dans ce dernier cas, il s'agit de ne pas revenir en arrière, il n'y a jamais d'ambiguïté dans le choix de l'arête que l'on supprime, laquelle appartient toujours au contour fermé qui résulte de la première opération. De plus, les deux arêtes, celle que l'on associe et celle que l'on supprime, sont contiguës.

RÉDUCTION DES BIFURCATIONS

§ 11. Cas général.

Il nous paraît maintenant possible de nous attaquer au cas général.

Nous considérons un réseau cubique, tracé sur une sphère, qui satisfait aux conditions exposées au § 8. Nous faisons apparaître sur ce réseau un arbre linéaire qui relie entre eux la totalité des sommets. Cet arbre appartient à l'une des classes dont nous avons constaté l'existence au § 9. Admettons qu'il renferme k bifurcations. Deux questions se posent d'emblée, que nous allons examiner successivement.

Première question. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir l'arbre ainsi obtenu, pour que l'on puisse réduire le nombre de ses bifurcations?

La réponse à cette question est immédiate: *Il faut et il suffit que deux sommets libres de l'arbre limitent la même arête du réseau.*

En effet, par l'adjonction de cette arête, on transforme l'arbre en un contour bouclé, lequel renferme, nous le savons, un contour fermé. Ce dernier est réuni aux autres arêtes du contour bouclé en des points qui sont des bifurcations. Si alors on supprime une arête qui rencontre l'une de ces bifurcations, tout en faisant partie du contour fermé, la configuration linéaire qui en résulte est encore connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant; c'est un arbre linéaire qui ne comprend plus que $k - 1$ bifurcations. Comme il peut se faire que l'arête supprimée aboutisse à deux bifurcations, il arrive que le nombre de celles-ci soit d'un seul coup diminué de deux unités.

Nous admettrons maintenant que toutes les réductions possibles ont été effectuées, cela d'ailleurs sans qu'il fût nécessaire de choisir d'avance un plan de travail. Nous entendons par là que, au gré de notre fantaisie, nous avons opéré une première réduction, puis une seconde, etc., sans la moindre préoccupation du meilleur choix possible. Il est clair que ce que nous entendons par meilleur choix, c'est celui qui conduirait à un contour Z, ou, mieux encore, à un contour V. Nous sommes donc en présence d'un arbre linéaire qui présente h bifurcations, tel que deux de ses sommets libres ne limitent jamais la même arête. Dans ces conditions, nous posons une:

Deuxième question. Est-il possible de transformer cet arbre de façon à le rendre réductible ?

Le moyen approprié, pour répondre à cette question, est à la fois simple et varié. Il est simple, car ayant choisi un des sommets libres de l'arbre considéré, nous effectuerons une série d'opérations doubles. Il est varié, car si la première série de ces opérations est irréductible, nous avons le loisir de procéder à une seconde série, à une troisième, ... , en partant d'un sommet libre de n'importe quelle figure qui est issue des transformations antérieures. Cela donne une grande variété de moyens.

Le but que l'on se propose d'atteindre, en utilisant toutes ces opérations doubles, est de remplacer l'arbre donné par un autre, dont deux sommets libres limitent la même arête du réseau. Alors, en vertu de la réponse à la première question, la réduction est immédiate.

Il convient ici de faire une constatation. Le problème de réductibilité d'un arbre linéaire est le même que celui qui consiste à passer d'un contour Z à un contour V. Or un arbre a d'autant plus de sommets libres, que le nombre de ses bifurcations est plus élevé. S'il se réduit à un contour ouvert, il n'a plus que deux sommets libres. Les possibilités que l'on a de faire en sorte que ces sommets limitent la même arête du réseau, sont certainement moindres que celles dont on dispose dans le cas d'un arbre quelconque, puisque le nombre des sommets de l'ensemble du réseau n'a pas varié, tandis que celui des sommets libres de l'arbre est plus grand. Telles sont les raisons pour lesquelles nous examinerons avec de plus amples détails les séries de transformations qui doivent conduire d'un contour Z à un contour V. Et si nous parvenons à en justifier la possibilité, nous aurons du même coup justifié la possibilité de la réduction des bifurcations de tout arbre linéaire du réseau.

Nous désignons encore, comme précédemment, par P et Q les sommets libres d'un contour Z et commençons par effectuer une première série de transformations qui laissent P invariable. Des sommets Q_1, Q_2, Q_3, ... , apparaissent ainsi, Deux cas sont à considérer :

1) Un des sommets Q_k se trouve à l'extrémité de l'une des arêtes qui aboutissent au sommet P. Le contour Z est devenu un contour V; la série de transformations est dite réductible.

2) Un des sommets Q_k occupe la position initiale Q , le contour Z ayant une forme identique à celle du début. La série de transformations est irréductible; les différents sommets Q_i constituent un cycle.

Cette dernière éventualité étant admise, le sommet Q demeure fixe. Une nouvelle série de transformations conduit aux sommets P_1, P_2, ... Cette série est réductible ou non. Imaginons qu'elle soit irréductible. Partant du contour PQ_1 et laissant Q_1 invariable, on passe de P à P'_1, P'_2, P'_3, ... Et si ces sommets constituent encore un cycle, on partira du contour PQ_2, laissant Q_2 fixe, on passera de P à P''_1, P''_2, ... L'inexistence d'un contour V, soit d'un réseau quadratique du premier type, est liée à la persistance de séries irréductibles.

Rappelons à ce propos que nous entendons par *série réductible* une série de transformations qui conduisent d'un contour Z à un contour V, et *série irréductible,* une série dans laquelle les sommets P_i, respectivement Q_i, constituent un cycle, le contour Z reprenant sa forme originale.

De ce qui précède, il résulte que dans un réseau cubique qui satisfait aux conditions du § 8:

1) *l'existence d'une seule série réductible permet de réduire d'une unité, éventuellement de deux, le nombre des bifurcations d'un arbre linéaire donné.*

2) *l'existence d'une seule série réductible permet de passer d'un contour Z à un contour V.*

3) *l'existence d'un contour V assure celle d'un réseau quadratique du premier type.*

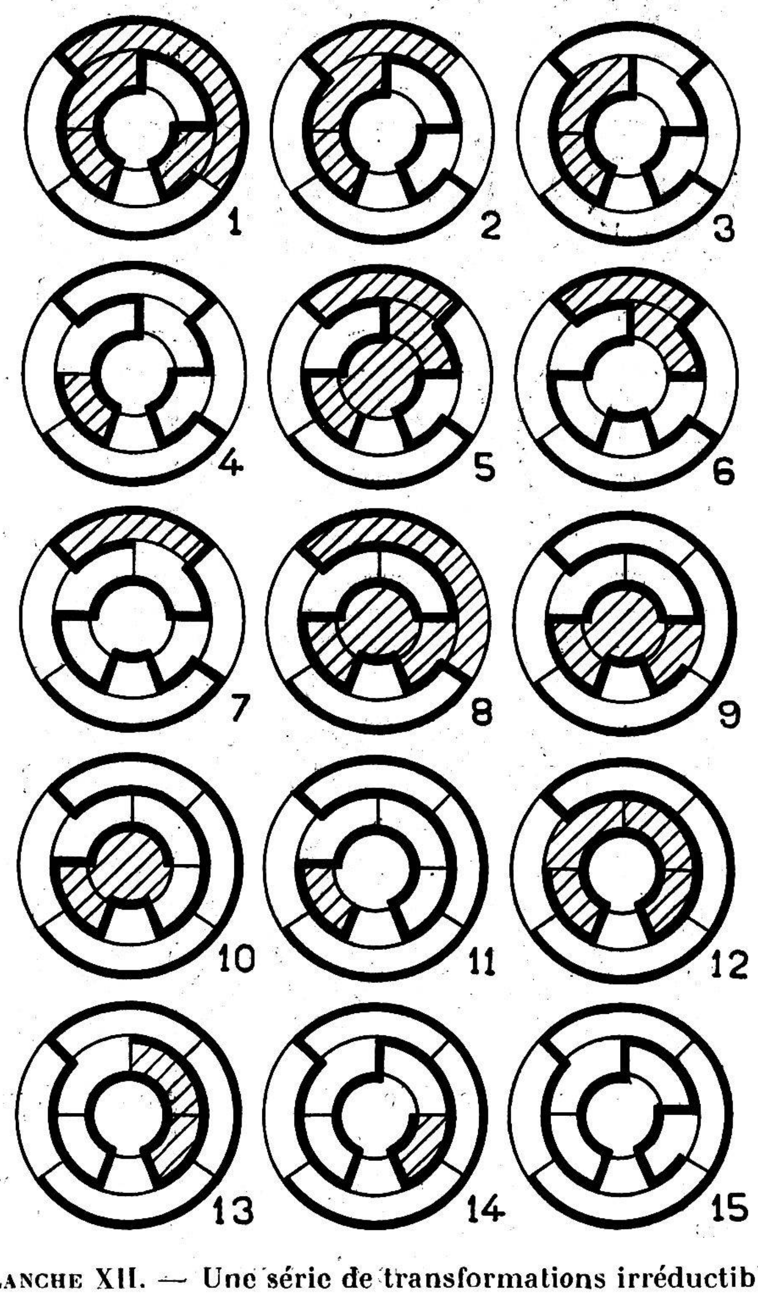

Planche XII. — Une série de transformations irréductible.

Il s'agit maintenant d'examiner les conditions d'existence d'une série irréductible.

Mais auparavant, nous pensons qu'il n'est pas inutile, ceci pour fixer les idées, d'en donner deux exemples. Nous reprenons, à cet effet, le type de carte de la planche X, à propos de laquelle sont reproduites les transformations des planches XII et XIII.

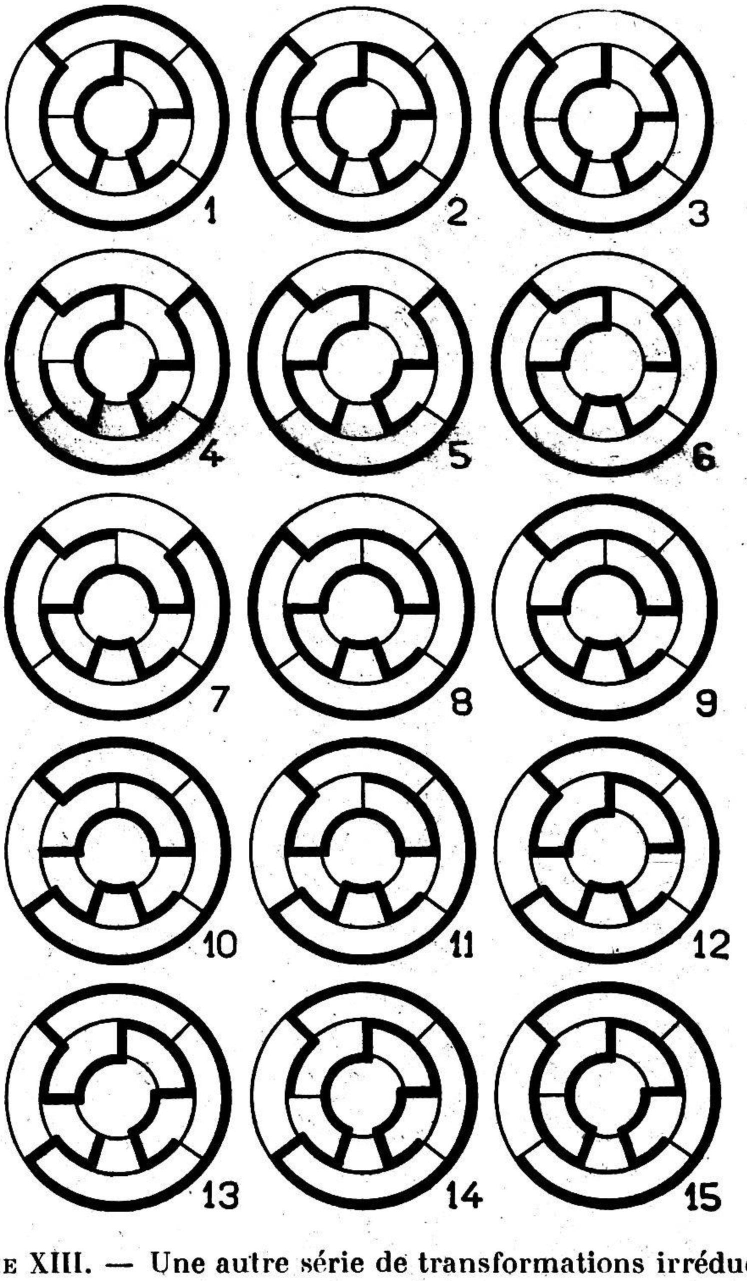

PLANCHE XIII. — Une autre série de transformations irréductible.

Il faut remarquer d'emblée que, lorsque l'on s'est engagé dans la voie des transformations d'un contour Z, on n'en peut suivre qu'une seule. Celle-ci, sans doute, n'est pas connue d'avance; elle n'en existe pas moins d'une façon unique car, à moins de détruire l'arête que l'on vient d'associer (ce qui n'aurait aucun sens), il ne se présente jamais d'indécision sur le choix des arêtes que l'on associe ou supprime. Cette constatation a son importance.

De plus, chaque opération double fait apparaître un contour fermé qui limite une aire simplement connexe. Cette aire se compose toujours d'un arbre superficiel, lequel peut se réduire à une chaîne ouverte ou même à une face unique. Elle se modifie, s'agrandit ou se rétrécit, lorsque l'on passe d'un contour Z au suivant. Le plus souvent, ces modifications ne paraissent pas obéir à une loi. Pourtant, dans le cas d'une série irréductible, l'existence de cette loi est indispensable. Imaginons un instant qu'elle n'existe pas. Du sommet P qui est fixe partent deux arêtes conjointes qui aboutissent à deux sommets du réseau L et M. Du sommet Q l'on passe successivement aux différents sommets Q_i ($i = 1, 2, 3. \ldots$) et comme dans la succession de ces points aucun cycle ne se révèle, il n'y a pas de raison pour que l'un d'eux ne puisse pas coïncider soit avec le sommet M, soit avec L, mais alors la série est réductible.

La loi qui préside à l'existence d'une série irréductible apparaît de prime abord sous la forme d'un cycle de points. Dans la suite des sommets Q_i ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$), Q_n coïncide avec Q_0 lequel n'est autre que Q. Mais ce cycle exige plus qu'une simple coïncidence des sommets Q_n et Q. Pour qu'il existe réellement, il faut encore que toutes les arêtes du contour ouvert aient repris leur position initiale.

Les différentes arêtes du réseau cubique considéré qui permettent de souder entre eux les sommets Q_i d'un certain cycle, constituent une configuration linéaire à laquelle nous convenons de donner le nom de *tracé T*. Or le tracé T ne doit pas être regardé comme une simple juxtaposition d'arêtes. C'est plutôt une ligne continue qui se referme et qui est orientée dans le sens qui va de Q_i à Q_{i+1}. Et si cette ligne passe plusieurs fois par la même arête, celle-ci est comptée autant de fois qu'elle a été parcourue.

Sur la ligne qui caractérise un tracé T, les différents sommets Q_i occupent une position caractéristique. Rappelons à ce propos que l'on passe de Q_i à Q_{i+1} par le moyen d'une opération double dans laquelle interviennent deux arêtes contiguës, l'une étant l'arête que l'on associe et l'autre celle que l'on supprime. Le sommet qui les réunit toutes deux n'est pas et ne peut pas être un sommet Q_i, d'où la conséquence :

Entre deux sommets consécutifs Q_i *d'un tracé* T, *il existe* *toujours un sommet du réseau qui n'est pas pris en considération.*

En outre, si la série est irréductible, le contour Z doit se transformer en lui-même. Il est par suite nécessaire que toute arête qui a été préalablement associée, devienne à son tour une arête que l'on supprime, et inversement. Cela revient à dire que dans le tracé T, chaque arête doit être parcourue au moins une fois dans chaque sens.

Enfin, comme nous l'avons déjà vu, dans chaque opération double, on crée un contour fermé (pour le détruire sitôt après) qui délimite une aire simplement connexe. Le déplacement que l'on effectue sur le tracé T permet d'orienter chacune de ces aires. En général, lorsque l'on passe de l'une d'elles à la suivante, l'orientation change de sens. Cette propriété se manifeste chaque fois que les deux aires consécutives ont en commun la face sur laquelle s'appuie le tracé T. Mais il arrive aussi que les faces composant les aires qui correspondent à deux transformations consécutives ne soient pas communes. Ce fait produit une rupture dans la cadence des orientations, rupture qui devra réapparaître, mais en sens inverse, au moment précis où, en suivant le tracé T, on repassera à cet endroit.

Dans ces conditions, le tracé T ne doit pas être regardé simplement comme un fil continu et isolé, mais bien au contraire, comme un fil soudé aux différentes aires qui apparaissent dans chaque opération double. Ces aires, comme d'ailleurs la sphère elle-même, sont simplement connexes. Si elles font partie d'une série irréductible, elles se succèdent de telle façon que leurs orientations respectives se détruisent les unes les autres. On ne s'expliquerait pas, en effet, que des aires également orientées s'empilent les unes sur les autres, constituant ainsi des nappes distinctes sur une surface de connexion aussi simple que la sphère.

Il est évident que l'on pourrait envisager un tracé T dans ses rapports avec une série réductible. Dans ce cas, aucun caractère distinctif ne sera à signaler. Toutes les fantaisies sont admissibles, du moment que l'on sera arrêté dans ces opérations par la présence d'un contour V.

Si nous résumons ce que nous savons d'un tracé T, nous sommes en droit de dire :

Le tracé T *d'une série, réductible ou non, est représenté* *par un fil continu qui est parcouru constamment dans le même sens. Ce fil se compose d'un certain nombre d'arêtes du réseau donné. Sur ce fil, entre deux sommets consécutifs* Q_i et Q_{i+1}, *se trouve toujours intercalé un troisième sommet du réseau qui n'appartient pas à la série des points* Q_i.

Si la série est irréductible, le fil est un contour fermé. Chaque arête du réseau qui appartient au tracé T *est parcourue deux fois, une fois dans un sens, une fois en sens opposé.*

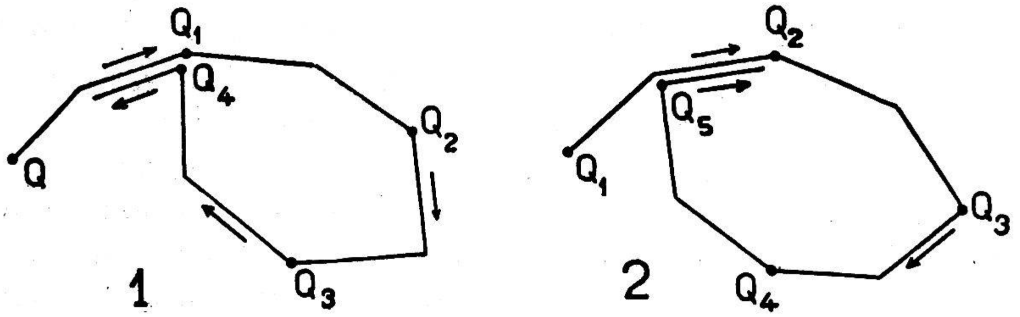

PLANCHE XIV. — Jonction d'un tracé T.

Il reste enfin à examiner les conditions dans lesquelles le fil qui constitue un tracé T revient sur des arêtes déjà parcourues. Cette jonction peut se faire de deux façons différentes, suivant qu'elle s'opère sur un sommet Q_i ou sur un sommet intermédiaire. Mais avant de faire cette distinction, il convient de remarquer qu'en chaque sommet du tracé T il y a :

1. une arête qui appartient au contour Z,
2. une arête que l'on a supprimée (du contour bouclé précédent),
3. une arête que l'on a associée (pour former le contour bouclé suivant).

Les arêtes indiquées sous 2 et 3 font déjà partie du tracé T. Si donc il y a une jonction en ce sommet, celle-ci ne peut avoir lieu que par l'arête 1. Et comme cette arête appartient au contour Z, c'est par une suppression et non pas par une association que la jonction peut s'effectuer.

a) La jonction a lieu en un sommet Q_i.

Le fil qui constitue le tracé T se présente dans la disposition du schéma fig. 1, planche XIV. Faisant retour au sommet Q_i par une arête que l'on supprime, il doit en repartir à l'aide d'une arête que l'on associe. Mais lors du premier passage on a associé l'arête qui contribue à former le contour que l'on est en train de fermer. La seule arête qui demeure disponible est précisément celle qui n'appartient pas à ce contour fermé. On s'en éloigne donc en sens contraire de celui qui a été suivi lors du premier passage, détruisant ainsi l'effet antérieurement produit. On conçoit fort bien que si cela se produit une seconde fois dans les mêmes conditions, on réussira à se retrouver dans la position initiale du contour Z, préalablement envisagé.

b) La jonction a lieu en un sommet intermédiaire.

La disposition du tracé T est représentée fig. 2, planche XIV. Dans ce cas l'arête qui a été supprimée lors du premier passage, appartient au contour qui se ferme. En l'associant maintenant, on s'engage sur un chemin déjà parcouru avec la même orientation. Ce caractère ne saurait convenir à une série irréductible puisqu'il n'a pas pour effet de détruire ce qui a été créé lors du premier passage. Il nous permettra précisément de déceler la présence d'une série réductible.

Dans ces conditions, la question capitale qui nous préoccupe peut se condenser dans la proposition suivante:

Sur un réseau cubique tracé sur une sphère, satisfaisant aux conditions du § 8, il est impossible qu'il n'y ait que des séries de transformations irréductibles.

Pour la démontrer, nous partons d'un contour Z dont les extrémités sont les sommets P et Q. Nous admettons que les deux séries de transformations que l'on obtient en laissant P puis Q fixes, soient irréductibles. Afin de distinguer les différents tracés T dont il va être question, nous conviendrons d'affecter de l'indice p le tracé T qui résulte de la fixité du sommet P, et de l'indice q celui qui correspond à la fixité du sommet Q. Ainsi le tracé T_p est jalonné par les sommets Q, Q_1, Q_2, ..., Q_i, ..., qui sont les extrémités de contours Z. Chacun de ces sommets peut à son tour être regardé comme fixe. C'est alors le sommet P qui se déplace en suivant des tracés T, T_1, T_2, ..., T_i, ..., sur lesquels on rencontrera les sommets suivants :

$$\begin{aligned} &\text{sur } T_q : P, P_1, P_2, \ldots\ldots \\ &\text{sur } T_{q_1} : P, P_1', P_2', \ldots\ldots \\ &\text{sur } T_{q_2} : P, P_1'', P_2'', \ldots\ldots, \text{etc.} \end{aligned}$$

Les tracés T_{q_i} partent tous du sommet P. Ils empruntent tous une partie du tracé T_q, puisqu'à partir de P on a chaque fois associé la même arête. Mais comme le sommet fixe Q_i diffère d'une série à l'autre, ils doivent suivre des voies différentes. Mais si toutes les séries sont irréductibles, ces voies finissent par se souder au premier tracé T_q, tout au moins dans le voisinage du sommet P.

A l'égard des sommets où s'opère l'écartement des tracés T_{q_i} on ne peut formuler aucune règle. Cela provient du fait que, selon notre hypothèse, deux faces contiguës n'ont en commun qu'une seule arête et qu'en outre ces faces sont des polygones d'au moins quatre côtés. Il s'en suit que le champ d'action des tracés T_{q_i} n'est limité en aucune façon sur l'ensemble du réseau. Cette constatation est très importante ainsi que nous le verrons au paragraphe suivant, car il peut arriver que, dans des réseaux cubiques qui n'appartiennent pas au cas difficile, ces tracés ne puissent emprunter qu'un ensemble bien déterminé d'arêtes du réseau considéré.

Il est d'autre part un fait connu que les réseaux qui ont une forme régulière, tels que ceux que nous représentons: planche XV, possèdent un grand nombre de réseaux quadratiques du premier type. Ce n'est donc pas sur ces réseaux que l'on recherchera uniquement des séries irréductibles.

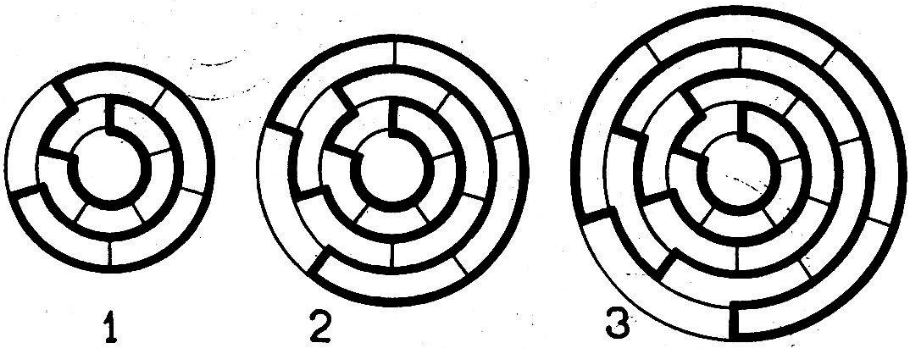

PLANCHE XV. — Réseaux de forme régulière.

Rappelons enfin que ce qui caractérise plus spécialement une série irréductible, c'est la forme particulière de son tracé T_q. Les sommets libres des différents contours Z se succèdent sur un tel tracé avec une cadence régulière, de deux en deux sommets. De plus chaque arête est parcourue une fois dans un sens et une fois en sens contraire.

Si donc toutes les séries envisagées étaient irréductibles, il serait nécessaire que tous les tracés T_{q_i} finissent par se rejoindre, la jonction s'opérant en l'un des sommets P_i du premier. Mais on doit prendre garde que la forme de chaque tracé dépend de déplacements qui s'effectuent autour de faces

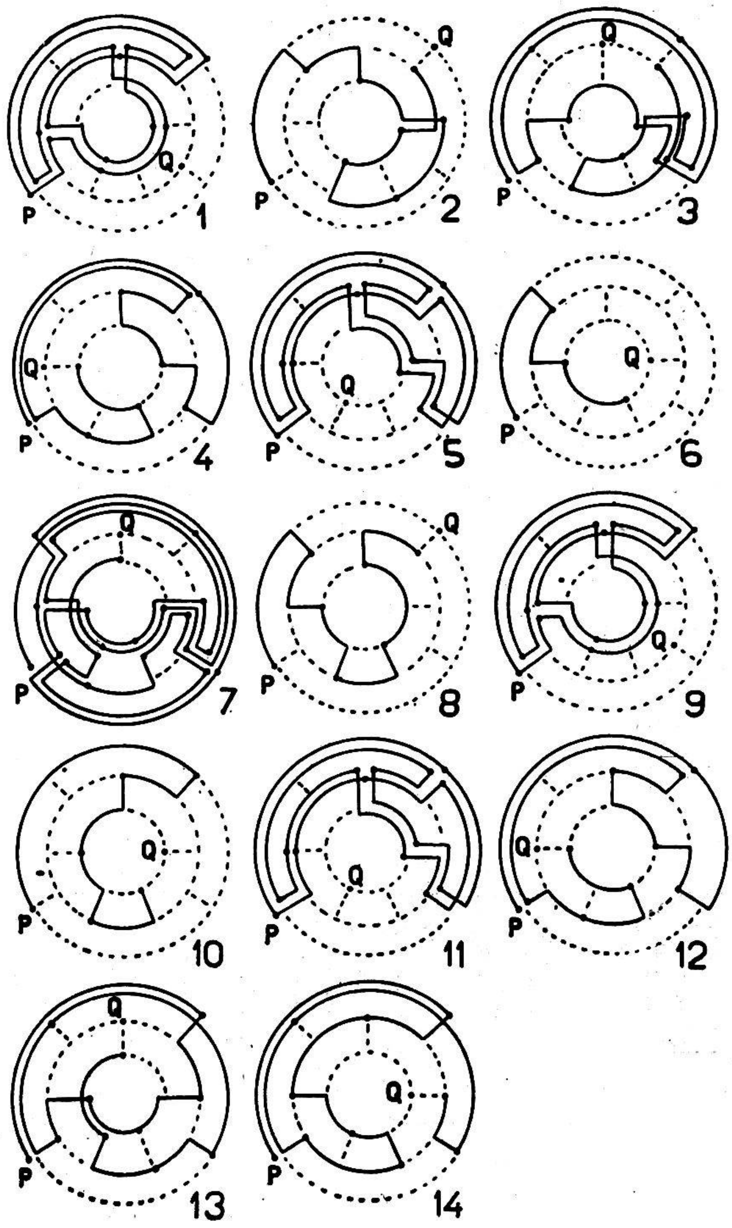

Planche XVI. — Les tracés T.

qui ont tantôt un nombre pair, tantôt un nombre impair d'arêtes et cela avec une variété de moyens qui n'a d'égale que celle que l'on a mise à compliquer la forme du réseau donné. On comprendrait, à la rigueur, que cette cadence ne soit pas troublée dans le cas d'un réseau qui présente toutes les garanties de symétrie voulues. Mais nous venons de voir que précisément dans ce cas il n'y a pas lieu de rechercher des séries irréductibles, puisque l'on est certain d'avance de rencontrer un réseau quadratique du premier type. Cette cadence ne se justifie pas, et à fortiori ne se réalise pas.

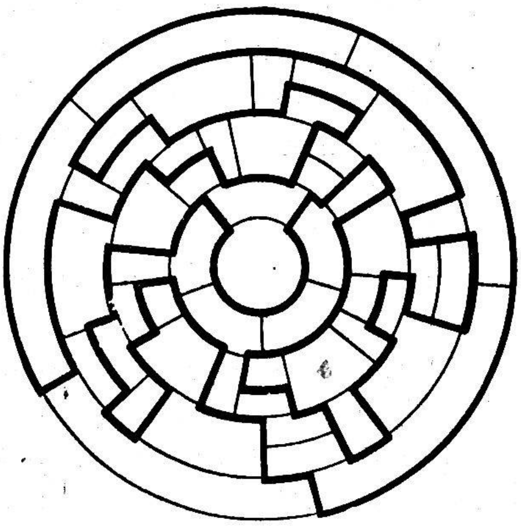

Fig. 14. — Carte de 52 pays.

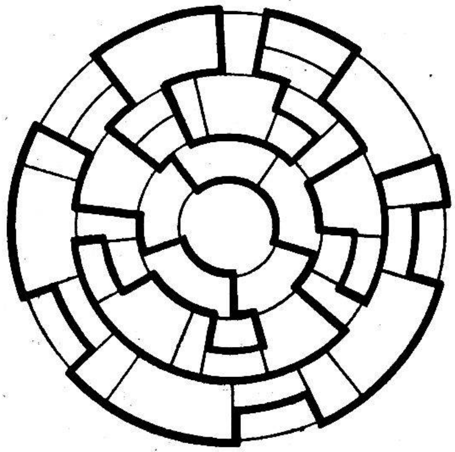

Fig. 15. — Carte de 47 pays.

Exemples de M. Errera.

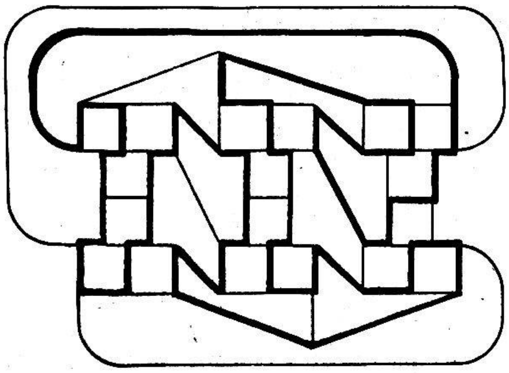

Fig. 16. — Carte de 30 pays.

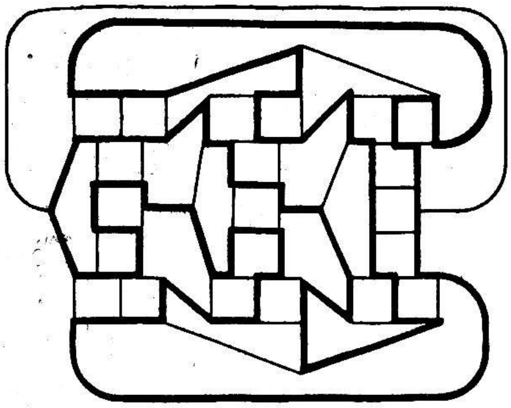

Fig. 17. — Carte de 36 pays.

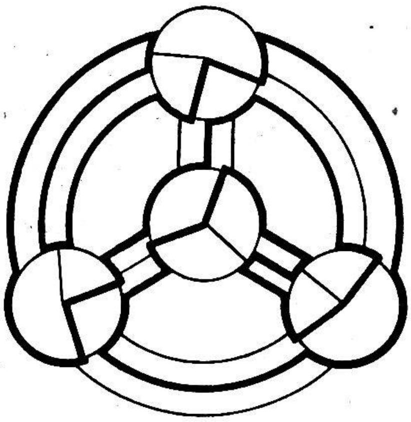

Fig. 18. — Carte de 28 pays

Exemples de M. Reynolds.

Nous indiquons, à titre d'exemple, planche XVI, les différents tracés T_{q_i} qui résultent de l'application de la méthode que l'on vient de développer à la planche XII.

Conclusion. Il est reconnu, d'une façon indiscutable, que si l'on sait colorier une carte dont la frontière est un réseau cubique qui satisfait aux conditions restrictives du § 8, on est capable du même coup de colorier une carte dont les frontières sont quelconques. Or, dans les pages qui précèdent, nous avons montré pourquoi, sur les réseaux cubiques considérés, on doit nécessairement rencontrer une série réductible, partant mettre en évidence un contour V et par suite un réseau quadratique du premier type.

A titre de renseignement, nous faisons suivre ces pages de la reproduction des exemples cités par MM. Errera et Sainte-Lagüe dans les ouvrages que nous avons rappelés plus haut, exemples qui constituent chaque fois une irréductibilité en regard des méthodes adoptées par leurs auteurs respectifs. Sur chacun d'eux, un réseau quadratique du premier type est représenté par un trait renforcé.

§ 12. A propos d'un cas d'exception.

Nous considérons ici des réseaux cubiques dans lesquels certaines faces contiguës ont en commun deux arêtes et nous allons examiner relativement aux transformations d'un contour Z, la région qui est comprise entre ces deux faces.

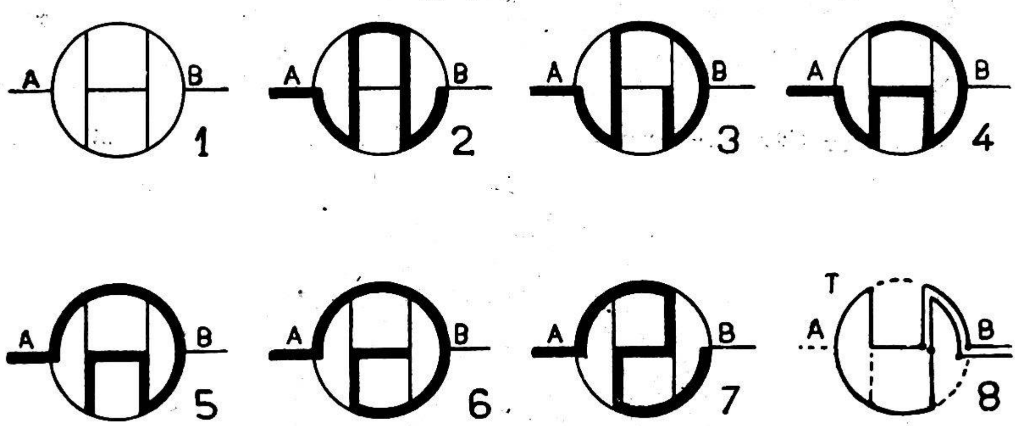

PLANCHE XVII.

Il n'est pas inutile que nous fixions les idées sur un exemple concret. C'est ainsi que nous envisageons le réseau partiel, fig. 1, planche XVII. Il est entendu que les arêtes qui aboutissent aux sommets A et B complètent un réseau