

# Essai sur la phénomène des Céphéides

Autor(en): **Javet, Pierre**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **6 (1938-1941)**

Heft 4

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-287460>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Essai sur le phénomène des Céphéides

---

### CHAPITRE PREMIER

#### Les Céphéides.

Données d'observation. Hypothèses. Les décalages.

Les étoiles variables peuvent se répartir en quatre classes principales:

1. Les *variables à éclipses* dont les fluctuations lumineuses sont dues au passage d'un compagnon devant l'étoile principale. Les variations d'éclat sont périodiques, la période durant de 6 heures à 10 jours, suivant l'étoile considérée.

2. Les *Céphéides*, ou variables à courte période, dont le type est  $\delta$  Cephei, et sur lesquelles nous reviendrons dans un instant.

3. Les *variables à longue période* (analogues à Mira-Ceti) dont la durée de fluctuation d'éclat peut être supérieure à 20 ans.

4. Les *variables irrégulières* dont les changements d'éclat ne semblent suivre aucune loi déterminée.

Nous résumons dans le présent chapitre les connaissances actuelles sur les Céphéides ainsi que quelques-unes des hypothèses émises dans le but de rendre compte des faits observés.

#### 1. *Données d'observation.*

Les Céphéides sont des géantes, ainsi qu'en témoignent leur magnitude absolue moyenne très forte (ordre de grandeur entre  $-2$  et  $-3$ ), leurs petits mouvements propres et leurs faibles parallaxes.

La magnitude d'une Céphéide subit des variations périodiques de l'ordre de 1,3 m. en moyenne. Parallèlement à ces variations d'éclat, on observe une variation du spectre de l'étoile, le spectre le plus avancé se produisant à peu près au moment du minimum de lumière et le spectre le moins avancé au moment du maximum de lumière.

Dans un premier groupe de Céphéides, la période est comprise entre quelques heures et un jour; dans un deuxième

groupe, la période est supérieure à 3 jours et peut monter jusqu'à 50 jours. Par contre, pour une Céphéide particulière, la période est invariable, ainsi que l'a montré Hertzsprung en 1918<sup>1</sup>.

L'éclat augmente, en général, rapidement du minimum de lumière jusqu'au maximum suivant, pour diminuer ensuite

*S Sagittae.* période = 8,38 j.

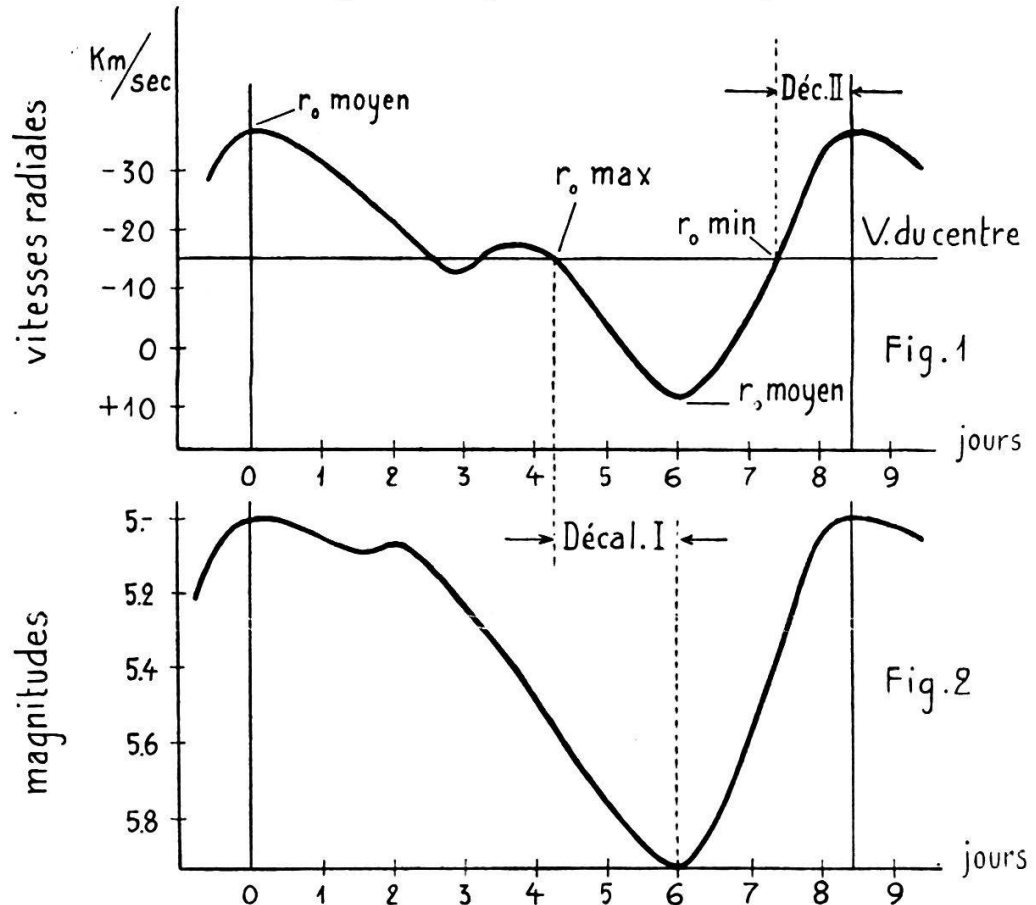


FIG. 1 : d'après G. Tiercy.<sup>2</sup>

FIG. 2 : d'après Aldrich. Michigan, vol. 4, 1932.

plus lentement du maximum au minimum, ainsi qu'on le voit sur les courbes des figures 2 et 4.

La vitesse radiale d'une Céphéide est variable; si l'on trace la courbe de lumière et la courbe des vitesses radiales, on est frappé de leur étroite correspondance: leurs périodes sont égales, leurs extrema sont presque simultanés.

Nous donnons, comme illustration de ce qui précède, les courbes de lumière et des vitesses radiales de deux Céphéides: *S Sagittae* et *W Sagittarii*.

<sup>1</sup> *The Observatory*, t. XLI, p. 379.

<sup>2</sup> G. TIERCY : *L'équilibre radiatif dans les étoiles*. Paris 1935, p. 283.

2. Hypothèses.

On a cru pendant longtemps que les Céphéides étaient des variables à éclipses. Mais H. Shapley <sup>1</sup> a montré en 1914 à quelles impossibilités on est conduit en appliquant aux Céphéides la théorie des binaires. Ce point de vue doit donc être abandonné.

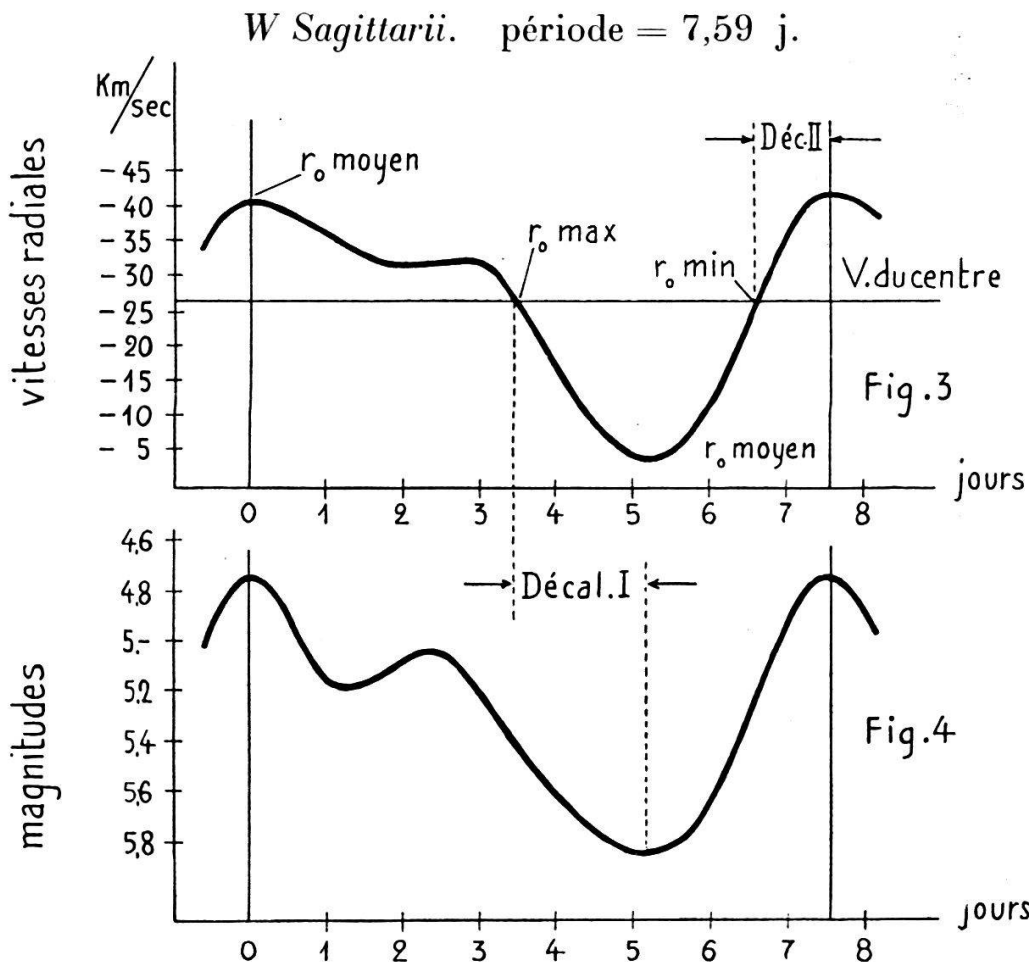


FIG. 3 : d'après G. Tiercy. <sup>2</sup>

FIG. 4 : d'après *Pub. Observat. de Genève*, fasc. 7 et CHANDLER, *A. N.*, 2119; PICKERING, *Harv. Ann.* 24.

Il est remplacé, à la suite des travaux de Shapley et d'Eddington <sup>3</sup>, par l'hypothèse des pulsations: on suppose une étoile unique qui se dilate et se contracte périodiquement. Cette hypothèse, jointe à la théorie de l'équilibre radiatif (voir chapitre II), a permis à Eddington de rendre compte des caractéristiques

<sup>1</sup> *Astrophysical Journal* 1914, p. 448.

<sup>2</sup> G. TIERCY : *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, p. 291.

<sup>3</sup> *Monthly Notices*, t. LXXIX 1918 ; voir aussi EDDINGTON : *The internal constitution of the stars*, Cambridge.



téristiques essentielles des Céphéides: grandeur des périodes observées, allure de la courbe des vitesses radiales et de la courbe de lumière.

### 3. *Les décalages.*

Les courbes données dans les figures 1, 2, 3 et 4 mettent en évidence un phénomène remarquable, commun à toutes les Céphéides: les extrema lumineux ne se produisent pas au même instant que les extrema du rayon.

Le minimum de lumière a lieu après l'instant du maximum du rayon; et le maximum de lumière après l'instant du minimum du rayon. Il y a donc un décalage entre les extrema respectifs du rayon et de la magnitude.

En désignant par: *décalage I* le décalage entre l'instant du minimum de lumière et celui du maximum du rayon, et par: *décalage II* celui entre l'instant du maximum de lumière et l'instant du minimum du rayon, les figures précédentes montrent qu'on a:

pour S Sagittae:

$$\begin{cases} \text{décalage I} = 0,20 \theta \\ \text{décalage II} = 0,12 \theta \end{cases} \quad \theta = \text{période.}$$

pour W Sagittarii:

$$\begin{cases} \text{décalage I} = 0,18 \theta \\ \text{décalage II} = 0,14 \theta \end{cases}$$

Pour la plupart des Céphéides, le décalage II est plus petit que le décalage I. Ces deux décalages peuvent être égaux; mais le décalage II n'est jamais plus grand que le décalage I. Ajoutons encore que le décalage I vaut en moyenne  $\frac{1}{5}$  de période.

Ces décalages, signalés par de nombreux auteurs, sont restés inexplicés jusqu'en 1935, date à laquelle G. Tiercy<sup>1</sup> a montré qu'ils pouvaient se déduire de la théorie générale de l'équilibre radiatif complétée par certaines hypothèses au sujet de la pulsation de l'étoile.

G. Tiercy étudie le cas d'une étoile à pulsation sinusoïdale et obtient alors des valeurs égales pour le décalage I et pour le décalage II.

Dans la plupart des cas, la pulsation n'est pas harmonique et les deux décalages sont inégaux. C'est l'étude de ce cas — plus général — qui fait l'objet du présent travail.

<sup>1</sup> G. TIERCY : L'équilibre radiatif dans les étoiles. Paris 1935.

Avant d'exposer, à partir du chapitre III, les résultats de nos recherches, nous résumons dans le chapitre II les traits principaux de la théorie de l'équilibre radiatif, théorie sur laquelle nous nous sommes basé dans la suite.

## CHAPITRE II

### L'équilibre radiatif dans les étoiles <sup>1</sup>.

#### 1. *Equilibres polytropiques.*

Le mémoire fondamental est dû à Emden <sup>2</sup>. Considérons une masse isolée de gaz. Sous l'effet de sa propre attraction gravitationnelle, et en l'absence de mouvement de rotation ou d'autres causes perturbantes, cette masse prend une distribution à symétrie sphérique.

Trouver quelle est, à l'intérieur de cette masse, la répartition des pressions, des températures et des densités, tel est le problème résolu par Emden en 1907.

Soit :

$p$  la pression du gaz à une distance  $r$  du centre.

$\rho$  la masse spécifique au point considéré.

$g$  l'accélération de la pesanteur en ce point.

$M_r$  la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$ .

Ces 4 grandeurs sont liées entre elles par les égalités bien connues:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dr} = -g\rho \\ g = \frac{GM_r}{r^2} \quad (G = \text{constante de la gravitation}) \\ M_r = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \end{array} \right.$$

Pour qu'il soit possible de déterminer les 4 fonctions de  $r$  ci-dessus introduites, une quatrième égalité est nécessaire. Cette quatrième égalité est:

$$(2) \quad pv^k = \Theta$$

dans laquelle  $\Theta$  et  $k$  sont deux constantes.

La relation (2) est une équation de Poisson généralisée.

<sup>1</sup> Pour tout ce qui concerne ce chapitre, voir G. Tiercy, *loc. cit. passim*.

<sup>2</sup> EMDEN : *Gaskugeln* 1907.

L'exposant  $k$  sera dans la suite différent de sa valeur habituelle  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Quand l'égalité (2) est satisfaite, la distribution est appelée polytropicque.

Du système formé par les équations (1) et (2), on déduit facilement<sup>1</sup> l'équation suivante, dite équation d'Emden:

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0$$

dans laquelle on a posé:

$$u^n = \rho \quad n = \frac{1}{k-1}$$

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G\mu}{(n+1)R\Theta}$$

et où:

$\mu$  = poids atomique moyen.

$R$  = constante des gaz.

L'exposant  $n$  définit la classe polytropicque envisagée. Cette équation (3) est fondamentale pour la théorie qui nous occupe. Sa solution générale, à l'aide des fonctions élémentaires, peut s'obtenir pour les trois classes polytropicques  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 5$ <sup>2</sup>. Dans le cas général ( $n$  quelconque), avant de résoudre numériquement (3), on fait le changement de variable et de fonction suivant:

$$(4) \quad r = \frac{\xi}{\alpha u_c \frac{n-1}{2}} \quad u = u_c \psi$$

dans lequel  $u_c$  = valeur de  $u$  au centre de l'étoile.

L'équation (3) devient:

$$(5) \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \psi^n = 0$$

Emden a calculé la solution de cette équation pour les classes polytropicques

$n = 0 - 0,5 - 1 - 1,5 - 2 - 2,5 - 3 - 4 - 4,5 - 4,9 - 5$  et 6.

Voici, à titre d'exemple utile pour la suite, la table d'Emden pour  $n = 3$ . La valeur  $\xi = 6,90$  correspond à la surface de l'étoile.

Cette table (de même que les tables analogues pour les autres classes polytropicques) donne, on le voit, la répartition

<sup>1</sup> Voir par exemple EDDINGTON: The internal constitution of the stars, p. 79 et suiv.

<sup>2</sup> G. TIERCY: *loc. cit.*, p. 68 et suivantes.

des températures, densités et pressions, du centre à la surface de l'étoile.

Table d'Emden pour  $n = 3$ .

$\xi$	$\psi$	$\psi^n$	$\psi^{n+1}$	$-\frac{d\psi}{d\xi}$	$-\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$	$-\frac{\xi}{3} \frac{d\xi}{d\psi}$
$r$	$T$	$\rho$	$p$	$g$	$M_r$	$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}_r}$
0	1	1	1	0	0	1
0,25	0,98975	0,96960	0,95966	0,08204	0,00513	1,0158
0,50	0,95987	0,88436	0,84886	0,15495	0,03874	1,0756
0,75	0,91355	0,76242	0,69650	0,21270	0,11964	1,1754
1,00	0,85505	0,62513	0,53451	0,25219	0,25219	1,3218
1,25	0,78897	0,49111	0,38747	0,27370	0,42765	1,5224
1,50	0,71948	0,37244	0,26797	0,27993	0,62984	1,7862
1,75	0,64996	0,27458	0,17847	0,27460	0,84097	2,1243
2,00	0,58282	0,19796	0,11538	0,26149	1,0450	2,5495
2,16	0,54133	0,15863	0,08587	0,25052	1,1710	2,8768
2,50	0,46109	0,09803	0,04520	0,22396	1,3994	3,7210
3,00	0,35921	0,04635	0,01665	0,18393	1,6553	5,4370
3,50	0,27629	0,02109	0,00583	0,14859	1,8203	7,8697
4,00	0,20942	0,00918	0,00192	0,11998	1,9197	11,113
4,50	0,15529	0,003746	0,000582	0,09748	1,9740	15,387
5,00	0,11110	0,001371	0,000152	0,08003	2,0007	20,826
6,00	0,04411	$8,583 \cdot 10^{-5}$	$3,786 \cdot 10^{-5}$	0,05599	2,0156	35,720
6,80	0,00471	$1,045 \cdot 10^{-6}$	$4,921 \cdot 10^{-10}$	0,04360	2,0161	51,987
6,90	0	0	0	0,04231	2,0182	54,350

## 2. Equilibre radiatif.

Les recherches d'Emden, que nous venons de résumer brièvement, ne tiennent pas compte de la pression de radiation. Or cette pression, qui est proportionnelle à la 4<sup>me</sup> puissance de la température absolue, ne peut être négligée dans le problème de l'équilibre stellaire: aux énormes températures qui règnent à l'intérieur des étoiles, la pression de radiation peut être du même ordre de grandeur que la pression matérielle.

Ainsi que le fait remarquer J. Bosler<sup>1</sup>: « Il est même surprenant qu'on ait tardé si longtemps à s'apercevoir d'une chose aussi naturelle. »

Il faut donc reprendre la théorie d'Emden et y introduire, au lieu de la seule pression matérielle  $p$ , la pression totale  $P$ , définie par:

$$P = p + p'$$

<sup>1</sup> J. BOSLER : Cours d'astronomie, III Astrophysique, p. 546.

où  $p'$  est la pression de radiation, égale comme on sait à  $\frac{1}{3} a T^4$ . C'est ce qu'a fait Bialobrzski en 1913<sup>1</sup>.

Le système formé par les équations (1) et (2) du paragraphe précédent est remplacé par:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = -g\rho \\ g = \frac{GM_r}{r^2} \\ M_r = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \\ pv^k = \Theta \end{array} \right. \quad \text{où } P = p + p'$$

Ces équations (6), dont la dernière est caractéristique des distributions polytropiques, définissent l'équilibre radiatif.

En traitant le système (6) comme on a traité le système (1) (2), on obtient une équation différentielle du 2<sup>me</sup> ordre correspondant à l'équation d'Emden<sup>2</sup>. Mais cette nouvelle équation est, dans le cas général, beaucoup plus compliquée que celle d'Emden. Il est cependant très remarquable que pour la classe polytropique  $n = 3$  l'équation en question se simplifie considérablement et devient:

$$(7) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \frac{3\pi G\mu}{3R\Theta + a\mu\Theta^4} u^3 = 0$$

Cette équation est du même type que celle d'Emden. Seul le coefficient constant du dernier terme, désigné plus haut par  $\alpha^2$ , a une valeur différente. Désignons ce coefficient par  $\omega^2$ . En posant, comme dans la théorie d'Emden:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{\xi}{\omega u_c \frac{n-1}{2}} = \frac{\xi}{\omega u_c} \\ u = u_c \psi \end{array} \right.$$

l'équation (7) devient grâce à (8):

$$(9) \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \psi^3 = 0$$

Cette dernière équation est identique à l'équation (5) dans laquelle on poserait  $n = 3$ . La table d'Emden pour  $n = 3$  donnée plus haut est donc valable maintenant, et donne, dans

<sup>1</sup> BIALOBRZSKI. — Sur l'équilibre thermodynamique d'une sphère gazeuse libre. *Bull. de l'Académie de Cracovie*.

<sup>2</sup> G. TIERCY : *loc. cit.*, p. 100.

le cas de l'équilibre radiatif, la distribution des pressions, densités et températures.

Cette table d'Emden indique — entre autres — que  $T$ ,  $\rho$  et  $P$  sont respectivement proportionnels à  $\psi$ ,  $\psi^3$ ,  $\psi^4$ . On établit en effet les formules suivantes que nous relevons ici sans les démontrer:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \Theta u = u_c \Theta \psi \\ \rho = u^3 = u_c^3 \psi^3 \\ P = \frac{\pi G}{\omega^2} u_c^4 \psi^4 = P_c \psi^4 \\ P_c = \frac{\pi G}{\omega^2} u_c^4 \quad P_c = \text{valeur de } P \text{ au centre.} \end{array} \right.$$

Ces formules (10) donnent les valeurs de  $T$ ,  $\rho$  et  $P$  dès que  $u_c$ ,  $\Theta$  et  $\omega$  sont connus. Ces trois constantes sont faciles à déterminer si l'on considère comme connus:

le rayon  $r_0$  de l'étoile,  
la masse  $M$  de l'étoile.

Les trois constantes  $u_c$ ,  $\Theta$  et  $\omega$  se calculent alors au moyen des relations:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^3 = \frac{4\pi M_0}{M} \quad u_c = \frac{\xi_0}{r_0} \left( \frac{4\pi M_0}{M} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad \text{et} \\ \omega^2 (3R\Theta + a\mu\Theta^4) = 3\pi G\mu \end{array} \right.$$

relations dans lesquelles on a:

$$M_0 = 2,018$$

et  $\xi_0 = 6,90$  étant la valeur de  $\xi$  correspondant à  $r = r_0$ .<sup>1</sup>

La table d'Emden donne, à la surface de l'étoile ( $\xi_0 = 6,90$ ):

$$\psi = 0 \text{ et par conséquent: } T = 0.$$

Ce résultat n'est évidemment pas acceptable. On admet ordinairement que la solution polytropicque donne des résultats exacts à l'intérieur de l'étoile, là où les températures sont supérieures à un million de degrés. Ce « noyau polytropicque » s'étend de  $\xi = 0$  à  $\xi = \xi' = 5$ . De  $\xi' = 5$  jusqu'à la surface ( $\xi_0 = 6,9$ ); il faut envisager une autre distribution des pressions, densités et températures.

D'après la table d'Emden, et pour  $\xi' = 5$  on a:

$$\frac{M_r}{M} = \frac{2,0007}{2,0182} = 0,9913$$

$$\text{et:} \quad \frac{\xi'}{\xi_0} = \frac{5}{6,90} = 0,725$$

<sup>1</sup> Pour ces dernières formules, voir: G. Tiercy, *loc. cit.*, chapitre V.

Ainsi la sphère dont le rayon est les  $\frac{725}{1000}$  du rayon total contient les 99,13% de la masse totale de l'étoile. Le « noyau polytropique » comprend donc la presque totalité de la masse; on conçoit alors que la partie périphérique n'ait que très peu d'influence sur la solution générale.

Le choix de la classe polytropique 3, justifié au point de vue mathématique par les simplifications qu'il apporte, se justifie-t-il physiquement? En d'autres termes, l'étude des conditions physiques régnant à l'intérieur des étoiles conduit-elle au choix de cette classe polytropique?

La réponse à ces questions est affirmative. Elle a été fournie par Eddington en 1916<sup>1</sup>. L'analyse d'Eddington ne pouvant prendre place ici, nous renvoyons aux mémoires cités.

### CHAPITRE III

#### Les sphères pulsantes.

##### PREMIÈRE PARTIE

Si l'on admet pour les Céphéides l'hypothèse de la pulsation, il devient nécessaire de compléter, pour l'appliquer aux étoiles variables, la théorie de l'équilibre radiatif établie pour les étoiles fixes. En effet, la pulsation du rayon entraîne des variations de même période de la pression, de la densité, et de la température.

##### 1. Notations. Equations fondamentales.

La théorie de l'équilibre radiatif donne les valeurs statiques de  $P$ ,  $\rho$ , et  $T$ , valeurs que nous désignerons maintenant par  $P_i$ ,  $\rho_i$  et  $T_i$ . Dans une étoile fixe, ces grandeurs  $P_i$ ,  $\rho_i$  et  $T_i$  sont invariables. Au contraire, dans une Céphéide la pression, la densité et la température oscillent autour de ces valeurs  $P_i$ ,  $\rho_i$  et  $T_i$ . De même une particule, qui dans la solution statique est à la distance  $r$  du centre, oscille, dans l'hypothèse de la pulsation, autour de cette valeur  $r_i$ .

Nous posons:

$$(12) \quad \begin{cases} r = r_i (1 + r_1) \\ P = P_i (1 + P_1) \\ \rho = \rho_i (1 + \rho_1) \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} r - r_i = \delta r_i = r_i r_1 \\ P - P_i = \delta P_i = P_i P_1 \\ \rho - \rho_i = \delta \rho_i = \rho_i \rho_1 \end{cases}$$

<sup>1</sup> A. S. EDDINGTON: On the radiative equilibrium of the stars. *Monthly Notices* 77, 1916. Voir aussi EDDINGTON: The internal constitution of the stars.



La solution statique, fournissant les valeurs  $r_i$   $P_i$   $\rho_i$   $T_i$  est celle indiquée au chapitre II.

Posons encore:

$$(13) \quad \chi = \frac{r}{r_0} \quad \begin{array}{l} r_0 = \text{rayon de l'étoile,} \\ \text{à la surface } \chi_0 = 1. \end{array}$$

Il y a lieu de faire, au sujet de cette fonction  $\chi$ , les deux remarques essentielles suivantes:

I. Si les différents rayons de l'étoile varient simultanément dans la même proportion, le rapport  $\chi$  est fonction de  $r$  seul. La pulsation ainsi définie est dite « uniforme ». Dans ce cas, les extrema de la pression  $P$  (ainsi que ceux de  $\rho$  et  $T$ ) ont lieu au même instant que les extrema du rayon  $r$ . La pulsation uniforme ne peut donc conduire à un décalage entre les extrema de  $r$  et ceux de  $P$ .

II. On peut penser, avec G. Tiercy<sup>1</sup>, que ce mécanisme — trop simple — de la pulsation uniforme doit être remplacé par le suivant: les différents rayons de l'étoile atteignent successivement leurs extréma respectifs. Dans cette hypothèse, la pulsation se transmet de proche en proche, du centre de l'étoile à sa surface. Le rapport  $\chi$  est alors fonction du rayon  $r$  et du temps  $t$ . La pulsation ainsi définie est dite « homologue ». La suite de ce travail montrera que cette hypothèse permet de rendre compte des décalages signalés.

Nous admettons que les variations du rayon  $r$  donnant la position d'une particule proviennent uniquement de la pulsation envisagée. Il ne se produit donc aucun courant de matière à l'intérieur de l'étoile. Chaque particule est alors animée d'un mouvement radial de vitesse  $w = \frac{dr}{dt}$ .

Les équations de l'hydrodynamique se réduisent donc à deux: l'équation de continuité et l'équation en  $w$ :

$$(14) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} \right) = 0$$

$$(15) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

dans lesquelles:  $V$  désigne le potentiel de gravitation et  $P$  la pression totale, somme de la pression matérielle et de la pression de radiation.

On sait que l'équation de continuité (14) se ramène à la suivante:

$$(16) \quad \frac{dM_r}{dt} = 0$$

<sup>1</sup> G. TIERCY: *loc. cit.*, chapitre XVII.



qui signifie que la masse intérieure à la sphère de rayon  $r$  est constante.

L'équation (15) intégrée entre les limites  $r$  et  $r_0$  donne:

$$(17) \quad P = \int_r^{r_0} \rho \left( \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{dw}{dt} \right) dr$$

cette intégrale devant être effectuée à temps constant. De plus on a:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = G \frac{M_r}{r^2} \quad G = \text{constante de la gravitation.}$$

## 2. Calcul de la pression.

Posons encore:

$$(18) \quad \tau = \frac{1}{r_0}$$

Cette nouvelle variable  $\tau$ , fonction de  $t$  seulement, se rapporte à la surface de l'étoile. L'intégrale figurant dans (17) doit être effectuée à  $t$  constant, donc à  $\tau$  constant, puisque  $\tau$  est fonction de  $t$  seul.

Transformons l'intégrale en y introduisant la variable  $x$  (définie par 13) au lieu de la variable  $r$ . Grâce à (13) et (18) on a:

$$x = \frac{r}{r_0} \quad r = \frac{x}{\tau}$$

A temps constant il vient:

$$dr = \frac{dx}{\tau}$$

On obtient encore successivement:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = G \frac{M_r}{r^2} = GM_r \frac{\tau^2}{x^2}$$

$$w = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} - \frac{x}{\tau^2} \frac{d\tau}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = x \left[ \frac{2}{\tau^3} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2} \frac{d^2\tau}{dt^2} \right] - \frac{2}{\tau^2} \frac{d\tau}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} \frac{d^2x}{dt^2}$$

De 
$$M_r = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr$$
 on tire :

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial M_r}{\partial r} = \tau^3 \frac{\partial M_r}{\partial x} \frac{1}{4\pi x^2}$$

Avec ces valeurs, l'égalité (17) devient:

$$(19) \quad P = \int_{\kappa}^1 \frac{\tau^3}{4\pi\kappa^2} \frac{\partial M_r}{\partial \kappa} \left\{ \frac{GM_r}{\kappa^2} \tau^2 - \kappa \left[ \frac{2}{\tau^3} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2} \frac{d^2\tau}{dt^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\tau^2} \frac{d\tau}{dt} \frac{d\kappa}{dt} - \frac{1}{\tau} \frac{d^2\kappa}{dt^2} \right\} \frac{d\kappa}{\tau}$$

Posons, pour simplifier l'écriture:

$$(20) \quad \left. \begin{aligned} \varphi(\kappa) &= \int_{\kappa}^1 \frac{GM_r}{4\pi\kappa^4} \frac{\partial M_r}{\partial \kappa} d\kappa \\ \Phi_1(\kappa) &= \int_{\kappa}^1 \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial M_r}{\partial \kappa} d\kappa \\ \Phi_2(\kappa) &= \int_{\kappa}^1 \frac{1}{2\pi\kappa^2} \frac{d\kappa}{dt} \frac{\partial M_r}{\partial \kappa} d\kappa \\ \Phi_3(\kappa) &= \int_{\kappa}^1 \frac{1}{4\pi\kappa^2} \frac{d^2\kappa}{dt^2} \frac{\partial M_r}{\partial \kappa} d\kappa \end{aligned} \right\}$$

Avec ces notations, (19) s'écrit:

$$(21) \quad P = \tau^4 \varphi(\kappa) + \left[ \frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right] \Phi_1(\kappa) + \frac{d\tau}{dt} \Phi_2(\kappa) - \tau \Phi_3(\kappa)$$

Si l'on considère le cas d'une étoile invariable, les vitesses de transformation sont nulles et la pression est donnée par

$$(22) \quad P_i = \tau_i^4 \varphi(\kappa_i) = \frac{1}{r_{0,i}^4} \varphi(\kappa_i)$$

Les grandeurs sont notées maintenant avec l'indice  $i$  puisqu'il s'agit des valeurs statiques. La troisième équation (10) du chapitre II que nous écrivions:

$$P = P_c \psi^4$$

s'écrit avec les nouvelles notations:

$$(23) \quad P_i = P_{c,i} \psi^4$$

La comparaison de (22) et (23) donne:

$$(24) \quad \varphi(\kappa_i) = r_{0,i}^4 P_{c,i} \psi^4$$

Mais revenons aux étoiles pulsantes dont la pression est donnée par (21). Les grandeurs  $\tau$  et  $\kappa$  oscillent autour des valeurs statiques  $\tau_i$  et  $\kappa_i$ . Posons alors:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau &= \tau_i (1 + \tau_1) \\ \kappa &= \kappa_i (1 + \kappa_1) \end{aligned} \right.$$

égalités d'où l'on tire:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \tau_i \frac{d\tau_1}{dt} & \frac{dx}{dt} &= \varkappa_i \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{d^2\tau}{dt^2} &= \tau_i \frac{d^2\tau_1}{dt^2} & \frac{d^2x}{dt^2} &= \varkappa_i \frac{d^2x_1}{dt^2} \end{aligned}$$

Les quatre fonctions  $\varphi(x)$  et  $\Phi_n(x)$  définies par les égalités (20) oscillent autour de leurs valeurs moyennes

$$\varphi(\varkappa_i) \quad \text{et} \quad \Phi_n(\varkappa_i).$$

Développons ces quatre fonctions suivant les puissances croissantes de  $x - \varkappa_i$  c'est-à-dire suivant les puissances de  $\varkappa_1$  puisque

$$x - \varkappa_i = \varkappa_i \varkappa_1$$

2 a. Développement de la fonction  $\varphi(x)$ .

On a:

$$\varphi(x) = \varphi(\varkappa_i + \varkappa_i \varkappa_1) = \int_{\varkappa_i + \varkappa_i \varkappa_1}^1 \frac{GM_r}{4\pi x^4} \frac{\partial M_r}{\partial x} dx$$

Le développement de  $\varphi(x)$  suivant les puissances croissantes de  $\varkappa_1$  est:

$$(26) \quad \varphi(x) = \varphi(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i \varkappa_1}{1} \varphi'(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i^2 \varkappa_1^2}{2!} \varphi''(\varkappa_i) + \dots$$

Or  $\varphi'(\varkappa_i)$ , de même que ses dérivées successives  $\varphi'(\varkappa_i)$   $\varphi''(\varkappa_i)$ , peut se calculer au moyen des tables d'Emden pour la solution polytropicque de classe 3. La valeur de  $\varphi(\varkappa_i)$  est fournie par (24). D'autre part, à cause des notations utilisées dans le problème de l'équilibre radiatif, notations déjà indiquées au chapitre II, on a:

$$r_i = \frac{\xi}{\omega u_c};$$

et  $x = \frac{r}{r_0}$  s'écrit:

$$\varkappa_i = \frac{r_i}{r_{0,i}} = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \text{d'où:}$$

$$d\varkappa_i = \frac{dr_i}{r_{0,i}} = \frac{d\xi}{\xi_0} = \frac{d\xi}{r_{0,i} \omega u_c}$$

On obtient maintenant, à partir de (24):

$$\varphi'(\varkappa_i) = \frac{d}{dx} \left[ r_{0,i}^4 P_{c,i} \psi^4 \right] = \xi_0 \frac{d}{d\xi} \left[ r_{0,i}^4 P_{c,i} \psi^4 \right] \quad \text{ou:}$$

$$(27) \quad \varphi'(\kappa_i) = \xi_0 r_{0,i}^4 P_{c,i} \frac{d(\psi^4)}{d\xi}$$

Rappelons alors les égalités suivantes, données au chapitre II sous les numéros (10) et (11):

$$P_{c,i} = \frac{\pi G}{\omega^2} u_c^4, \quad \omega^3 = \frac{4\pi \mathcal{M}_0}{M}, \quad u_c = \frac{\xi_0}{r_{0,i}} \left( \frac{4\pi \mathcal{M}_0}{M} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(\xi_0 = 6,9 \quad \mathcal{M}_0 = 2,018).$$

Elles permettent de mettre (27) sous la forme:

$$(28) \quad \varphi'(\kappa_i) = \frac{\xi_0^5 G M^2}{4\pi \mathcal{M}_0^2} \psi^3 \frac{d\psi}{d\xi}$$

La table d'Emden pour  $n = 3$  permet de calculer la valeur numérique de  $\varphi'(\kappa_i)$  pour toute valeur de  $\xi$ .

Le calcul de  $\varphi''(\kappa_i)$  se présente de la façon suivante:

$$\varphi''(\kappa_i) = \frac{d}{d\kappa} \left[ \varphi'(\kappa_i) \right] = \xi_0 \frac{d}{d\xi} \left[ \varphi'(\kappa_i) \right]$$

$$(29) \quad \varphi''(\kappa_i) = \frac{\xi_0^6 G M^2}{4\pi \mathcal{M}_0^2} \left[ \psi^3 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 3\psi^2 \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right]$$

Mais l'équation d'Emden (chapitre II, éq. 9) donne:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} - \psi^3$$

en sorte que (29) peut s'écrire:

$$(30) \quad \varphi''(\kappa_i) = \frac{\xi_0^6 G M^2}{4\pi \mathcal{M}_0^2} \left[ 3\psi^2 \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 - \frac{2\psi^3}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} - \psi^6 \right]$$

Sous cette forme,  $\varphi''$  est calculable au moyen des tables d'Emden.

On obtiendrait d'une manière analogue des expressions donnant les dérivées suivantes de la fonction  $\varphi$ . Mais les deux premières dérivées suffisent, ainsi qu'on le verra par la suite.

## 2b. Développement de la fonction $\Phi_1(\kappa)$

$$\Phi_1(\kappa) = \int_{\kappa}^1 \frac{\partial M_r}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{4\pi \kappa}$$

A cause de la relation:

$$\rho = \frac{\tau^3}{4\pi \kappa^2} \frac{\partial M_r}{\partial \kappa}$$

$\Phi_1(\kappa)$  peut se mettre sous la forme:

$$\Phi_1(x) = \int_x^1 r_0^3 \rho r dx = r_0 \int_x^1 \rho r dr$$

et par conséquent:

$$\Phi_1(x_i) = r_{0,i} \int_{r_i}^{r_{0,i}} \rho r dr = \frac{\xi_0}{\omega^3} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \xi d\xi$$

En utilisant l'équation d'Emden, et en tenant compte du fait que pour  $\xi_0 = 6,888$  les tables donnent  $\frac{d\psi}{d\xi} = -0,0425$  et  $\psi$  presque nulle, on obtient :

$$\Phi_1(x_i) = \frac{\xi_0}{\omega^3} \left[ \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right]$$

on encore:

$$(31) \quad \Phi_1(x_i) = \frac{\xi_0 M}{4\pi M_0} \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right)$$

L'égalité définissant  $\Phi_1(x)$  permet d'écrire:

$$(32) \quad \begin{aligned} \Phi_1'(x_i) &= -\frac{1}{4\pi x} \frac{\partial M_r}{\partial x} = -\frac{x\rho}{\tau^3} = -r_0^3 \rho r = -r_0^2 \rho r \\ &= -\frac{\xi_0^2}{\omega^3} \psi^3 \xi = -\frac{\xi_0^2 M}{4\pi M_0} \xi \psi^3 \end{aligned}$$

On obtient ensuite:

$$(33) \quad \Phi_1''(x_i) = \xi_0 \frac{d\Phi_1'}{d\xi} = -\frac{\xi_0^3 M}{4\pi M_0} \left( \psi^3 + 3\xi \psi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right)$$

Ces deux premières dérivées suffisent; elles sont à introduire dans le développement

$$\Phi_1(x) = \Phi_1(x_i + x_i x_1) = \Phi_1(x_i) + \frac{x_i x_1}{1} \Phi_1'(x_i) + \frac{x_i^2 x_1^2}{2!} \Phi_1''(x_i) + \dots$$

2 c. Développement de la fonction  $\Phi_2(x)$

$$\Phi_2(x) = \int_x^1 \frac{\partial M_r}{\partial x} \frac{1}{2\pi x^2} \frac{dx}{dt} dx$$

On sait que

$$\frac{\partial M_r}{\partial x} \frac{1}{2\pi x^2} = \frac{2\rho}{\tau^3}$$

il en résulte que:

$$\Phi_2(x) = 2 \int_x^1 \rho r_0^3 \frac{dx}{dt} dx$$

sine à 1 %. Le nombre de polynucléaire est de 4100 par mm<sup>3</sup>.

$$\Phi_2(x_i) = 2r_{0,i}^2 \int_{r_i}^{r_{0,i}} \rho \frac{dx}{dt} dr$$

En tenant compte de:

$$\rho = u_c^3 \psi^3 \quad ru_c = \frac{\xi}{\omega} \quad x_i = \frac{\xi}{\xi_0}$$

on obtient pour  $\Phi_2(x_i)$ :

$$(34) \quad \Phi_2(x_i) = \frac{\xi_0 M}{2\pi \mathcal{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \xi \frac{dx_1}{dt} d\xi$$

Les deux premières dérivées de  $\Phi_2(x_i)$  sont:

$$(35) \quad \Phi_2'(x_i) = - \frac{\xi_0^2 M}{2\pi \mathcal{M}_0} \psi^3 \xi \frac{dx_1}{dt}$$

$$(36) \quad \Phi_2''(x_i) = - \frac{\xi_0^3 M}{2\pi \mathcal{M}_0} \left[ \psi^3 \frac{dx_1}{dt} + 3\xi \psi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \frac{dx_1}{dt} + \psi^3 \xi \frac{d^2 x_1}{dt d\xi} \right]$$

Les expressions précédentes sont à introduire dans le développement:

$$\Phi_2(x) = \Phi_2(x_i) + \frac{x_i x_1}{1} \Phi_2'(x_i) + \frac{x_i^2 x_1^2}{2!} \Phi_2''(x_i) + \dots$$

2d. Développement de la fonction  $\Phi_3(x)$ .

$$\Phi_3(x) = \int_x^1 \frac{\partial M_r}{\partial x} \frac{1}{4\pi x^2} \frac{d^2 x}{dt^2} dx$$

Par des calculs analogues aux précédents, on obtient:

$$(37) \quad \Phi_3(x_i) = \frac{\xi_0 M}{4\pi \mathcal{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \xi \frac{d^2 x_1}{dt^2} d\xi$$

$$(38) \quad \Phi_3'(x_i) = - \frac{\xi_0^2 M}{4\pi \mathcal{M}_0} \psi^3 \xi \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$(39) \quad \Phi_3''(x_i) = - \frac{\xi_0^3 M}{4\pi \mathcal{M}_0} \left[ \psi^3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 3\xi \psi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \psi^3 \xi \frac{d^3 x_1}{dt^2 d\xi} \right]$$

Ces expressions sont à introduire dans le développement:

$$\Phi_3(x) = \Phi_3(x_i) + \frac{x_i x_1}{1} \Phi_3'(x_i) + \frac{x_i^2 x_1^2}{2!} \Phi_3''(x_i) + \dots$$

Les développements des fonctions  $\varphi$  et  $\Phi_n$  étant maintenant

connus, il suffit de les introduire dans la relation (21) pour avoir la valeur de P à un instant donné.

Les considérations qui précèdent ont été données déjà par G. Tiercy, dans son ouvrage: « L'équilibre radiatif dans les étoiles », chapitre XVII.

Les relations des derniers paragraphes contiennent les quantités  $\frac{dx_1}{dt}$  et  $\frac{d^2x_1}{dt^2}$  qu'il est utile d'exprimer en fonction de  $r_{1,0}$

On a:

$$\begin{aligned} r\tau &= x & r_i\tau_i &= x_i \\ r_i(1+r_1)\tau_i(1+\tau_1) &= x_i(1+x_1) \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$(1+r_1)(1+\tau_1) = 1+x_1$$

En dérivant par rapport à  $t$  on obtient:

$$(40) \quad \frac{dx_1}{dt} = (1+\tau_1) \frac{dr_1}{dt} + (1+r_1) \frac{d\tau_1}{dt}$$

Mais

$$\begin{aligned} 1+\tau_1 &= \frac{1}{1+r_{1,0}} = 1 - r_{1,0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3 + \dots \\ \tau_1 &= -r_{1,0} + r_{1,0}^2 - \dots \\ \frac{d\tau_1}{dt} &= \frac{dr_{1,0}}{dt} (-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + \dots) \end{aligned}$$

Introduisons dans (40) les valeurs de  $1+\tau_1$  et de  $\frac{d\tau_1}{dt}$ , il vient:

$$(41) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dr_1}{dt} (1 - r_{1,0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3 + \dots) + \\ &+ \frac{dr_{1,0}}{dt} (-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + \dots) (1+r_1) \end{aligned}$$

et encore:

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{d^2r_1}{dt^2} (1 - r_{1,0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3 + \dots) + \\ &+ 2 \frac{dr_1}{dt} \frac{dr_{1,0}}{dt} (-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + \dots) + \\ &+ \frac{d^2r_{1,0}}{dt^2} (-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + \dots) + \\ &+ \left( \frac{dr_{1,0}}{dt} \right)^2 (2 - 6r_{1,0} + 12r_{1,0}^2 - \dots) (1+r_1) \end{aligned}$$

Il faut remarquer que la variation du rayon  $r_0$  est connue grâce à l'enregistrement de la courbe des vitesses radiales; il en est de même de  $r_{1,0}$ .

Le type de variation le plus simple est:

$$\begin{cases} r_1 = A_i \cos (Nt + N_i) & \text{avec à la surface} \\ r_{1,0} = A_0 \cos Nt \end{cases}$$

égalités dans lesquelles on a posé:

$$N = \frac{2\pi}{\theta}, \quad \theta = \text{période de la pulsation.}$$

Les grandeurs  $A_i$  et  $N_i$  sont fonction de  $r_i$  (donc de  $\xi$ ); ainsi l'amplitude et la phase de la pulsation varient avec la distance au centre. Les égalités précédentes définissent une pulsation harmonique, laquelle entre dans la catégorie des pulsations homologues dont nous parlions au début de ce chapitre.

C'est une pulsation de ce type qu'a étudiée G. Tiercy dans l'ouvrage déjà cité.

Si quelques Céphéides (T Vulpeculae; SU Cassiopeae, par exemple) ont des pulsations du type défini ci-dessus, la plupart des Céphéides, par contre, ont une courbe des vitesses radiales plus compliquée. Il est nécessaire, pour représenter ces pulsations, de prendre pour  $r_{1,0}$  et pour  $r_1$  des expressions de la forme:

$$(43) \quad \begin{cases} r_{1,0} = A_0 \cos Nt + A'_0 \cos (2Nt + N') \\ r_1 = A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) \end{cases}$$

dans lesquelles on a:

$$N = \frac{2\pi}{\theta}, \quad \theta = \text{période de pulsation.}$$

$r_{1,0}$  étant connu grâce à la courbe des vitesses radiales, il s'ensuit que  $A_0$ ,  $A'_0$  et  $N'$  sont des constantes connues. Quant à  $A_i$ ,  $A'_i$ ,  $N_i$ ,  $N'_i$ , ce sont des fonctions de  $r_i$ , donc de  $\xi$ .

Les constantes  $A_0$  et  $A'_0$  (amplitudes de surface) étant au plus de l'ordre de  $\frac{1}{10}$  on ne conservera dans les développements qui suivent que la première puissance de  $A_0$ ,  $A'_0$ ,  $A_i$ ,  $A'_i$ .

## DEUXIÈME PARTIE

### 3. Calcul de la pression P dans le cas d'une pulsation du type (43).

Nous avons établi, sous le n° 21, la relation suivante, que nous récrivons maintenant sous le n° 44:

$$(44) \quad P = \tau^4 \varphi(x) + \left[ \frac{d^2 \tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right] \Phi_1(x) + \frac{d\tau}{dt} \Phi_2(x) - \tau \Phi_3(x)$$



Reprenons les développements des fonctions  $\varphi$  et  $\Phi$  donnés plus haut, en abandonnant les termes  $x_1^2$  qui sont de l'ordre de grandeur de  $A_0^2$ . On obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = \varphi(x_i) + x_i x_1 \varphi'(x_i) \\ \varphi(x_i) = r_{0,i}^4 P_{c,i} \psi^4 = \frac{\xi_0^4 GM^2}{16\pi M_0^2} \psi^4 \\ \varphi'(x_i) = \frac{\xi_0^5 GM^2}{4\pi M_0^2} \psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x) = \Phi_1(x_i) + x_i x_1 \Phi_1'(x_i) \\ \Phi_1(x_i) = \frac{\xi_0 M}{4\pi M_0} \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right) \\ \Phi_1'(x_i) = - \frac{\xi_0 M}{4\pi M_0} \xi \psi^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(x) = \Phi_2(x_i) + x_i x_1 \Phi_2'(x_i) \\ \Phi_2(x_i) = \frac{\xi_0 M}{2\pi M_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi \psi^3 \frac{dx_1}{dt} d\xi \\ \Phi_2'(x_i) = - \frac{\xi_0^2 M}{2\pi M_0} \xi \psi^3 \frac{dx_1}{dt} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_3(x) = \Phi_3(x_i) + x_i x_1 \Phi_3'(x_i) \\ \Phi_3(x_i) = \frac{\xi_0 M}{4\pi M_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi \psi^3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} d\xi \\ \Phi_3'(x_i) = - \frac{\xi_0^2 M}{4\pi M_0} \xi \psi^3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \end{array} \right.$$

Avant de porter toutes ces valeurs dans (44) il faut encore calculer les valeurs de

$$\tau^4 \frac{d^2 \tau}{dt^2} \quad \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{d\tau}{dt}$$

expressions qui figurent dans (44).

On a, grâce à (18) :

$$\tau_i = \frac{1}{r_{0,i}} = \frac{\omega u_c}{\xi_0}$$

Mais, d'après (43) :

$$r_{1,0} = A_0 \cos Nt + A'_0 \cos (2Nt + N')$$

$$1 + \tau_1 = 1 - r_{1,0} = 1 - A_0 \cos Nt - A'_0 \cos (2Nt + N')$$

$$\tau = \tau_i(1 + \tau_1) = \frac{\omega u_c}{\xi_0} \left[ 1 - A_0 \cos Nt - A'_0 \cos (2Nt + N') \right]$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\omega u_c}{\xi_0} \left[ A_0 N \sin Nt + 2A'_0 N \sin (2Nt + N') \right]$$

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{\omega u_c}{\xi_0} \left[ A_0 N^2 \cos Nt + 4A'_0 N^2 \cos (2Nt + N') \right]$$

$$\frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \frac{2\omega u_c}{\xi_0} \frac{[A_0 N \sin Nt + 2A'_0 N \cos (2Nt + N')]^2}{1 - A_0 \cos Nt - A'_0 \cos (2Nt + N')}$$

$$\tau^4 = \tau_i^4(1 + \tau_1)^4 = \frac{\omega^4 u_c^4}{\xi_0^4} \left[ 1 - A_0 \cos Nt - A'_0 \cos (2Nt + N') \right]^4$$

Portons ces valeurs, de même que les développements des fonctions  $\varphi$  et  $\Phi$  dans l'expression (44). En ne conservant que les termes du premier ordre, on obtient:

$$(45)$$

$$\begin{aligned} P = & \frac{\omega^4 u_c}{\xi_0^4} \left[ 1 - 4A_0 \cos Nt - 4A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \left[ \frac{\xi_0^4 G M^2}{16\pi \mathcal{M}_0^2} \psi^4 + \frac{x_1 \xi_0^4 G M^2}{4\pi \mathcal{M}_0^2} \psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} \right] \\ & + \frac{\omega u_c}{\xi_0} \left[ A_0 N^2 \cos Nt + 4A'_0 N^2 \cos (2Nt + N') \right] \left[ \frac{\xi_0 M}{4\pi \mathcal{M}_0} \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right) - \frac{x_1 \xi_0 \xi^2 M}{4\pi \mathcal{M}_0} \psi^3 \right] \\ & + \frac{\omega u_c}{\xi_0} \left[ A_0 N \sin Nt + 2A'_0 N \cos (2Nt + N') \right] \left[ \frac{\xi_0 M}{2\pi \mathcal{M}_0} \int_{\xi_0}^{\xi} \xi \psi^3 \frac{dx_1}{dt} d\xi - \frac{x_1 \xi_0 \xi^2 M}{2\pi \mathcal{M}_0} \psi^3 \frac{dx_1}{dt} \right] \\ & - \frac{\omega u_c}{\xi_0} \left[ 1 - A_0 \cos Nt - A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \left[ \frac{\xi_0 M}{4\pi \mathcal{M}_0} \int_{\xi_0}^{\xi} \xi \psi^3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} d\xi - \frac{x_1 \xi_0 \xi^2 M}{4\pi \mathcal{M}_0} \psi^3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

Cette égalité renferme encore  $x_1 \frac{dx_1}{dt}$  et  $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ .

Or on a:  $x_1 = r_1 + \tau_1 + r_1 \tau_1$

Le dernier terme de cette relation est de l'ordre de  $A_0^2$ ; nous le négligeons. On a alors:

$$(46)$$

$$\begin{aligned} x_1 = & A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (Nt + N'_i) - A_0 \cos Nt - A'_0 \cos (2Nt + N') \\ \frac{dx_1}{dt} = & -A_i N \sin (Nt + N_i) - 2A'_i N \sin (2Nt + N'_i) + A_0 N \sin Nt + 2A'_0 N \sin (2Nt + N') \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = & -A_i N^2 \cos (Nt + N_i) - 4A'_i N^2 \cos (2Nt + N'_i) + A_0 N^2 \cos Nt + 4A'_0 N^2 \cos (2Nt + N') \end{aligned}$$

En introduisant les valeurs (46) dans (45) de nombreux termes disparaissent; et on obtient:

$$\begin{aligned}
 (47) \quad P = & \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{16\pi \mathcal{M}_0^2} \left[ 1 - 4A_0 \cos Nt - 4A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \psi^4 \\
 + & \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{4\pi \mathcal{M}_0^2} \xi \psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} \left[ A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) - A_0 \cos Nt - A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \\
 + & \frac{\omega u_c MN^2}{4\pi \mathcal{M}_0} \left[ A_0 \cos Nt + 4A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right) \\
 - & \frac{\omega u_c MN^2}{4\pi \mathcal{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi \psi^3 \left[ -A_i \cos (Nt + N_i) - 4A'_i \cos (2Nt + N'_i) + A_0 \cos Nt \right. \\
 & \left. + 4A'_0 \cos (2Nt + N') \right] d\xi
 \end{aligned}$$

Pour simplifier le dernier terme de cette expression (47), donnons à  $A_i$ ,  $A'_i$ ,  $N_i$ ,  $N'_i$ , leurs valeurs moyennes dans l'intervalle d'intégration  $\xi - \xi_0$ . Cette approximation est d'autant meilleure que l'intervalle  $\xi - \xi_0$  est petit.

On a :

$$\begin{aligned}
 \text{moyenne de } A_i &= \frac{A_0 + A_i}{2} & \text{moyenne de } N_i &= \frac{N_i}{2} \\
 \text{moyenne de } A'_i &= \frac{A'_0 + A'_i}{2} & \text{moyenne de } N'_i &= \frac{N' + N'_i}{2}
 \end{aligned}$$

$A_i$ ,  $A'_i$ ,  $N_i$ ,  $N'_i$  sont ici les valeurs correspondant à la valeur de  $\xi$  pour le rayon considéré.

Cette simplification permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 (48) \quad P = & \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{16\pi \mathcal{M}_0^2} \left[ 1 - 4A_0 \cos Nt - 4A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \psi^4 + \\
 & \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{4\pi \mathcal{M}_0^2} \xi \psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} \left[ A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) - A_0 \cos (Nt) - A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \\
 & + \frac{\omega u_c MN^2}{4\pi \mathcal{M}_0} \left[ A_0 \cos Nt + 4A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right) \\
 - & \frac{\omega u_c MN^2}{4\pi \mathcal{M}_0} \left[ -\frac{A_0 + A_i}{2} \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) - 4 \frac{A'_0 + A'_i}{2} \cos \left( 2Nt + \frac{N' + N'_i}{2} \right) \right. \\
 & \left. + A_0 \cos Nt + 4A'_0 \cos (2Nt + N') \right] \times \int_{\xi}^{\xi_0} \xi \psi^3 d\xi
 \end{aligned}$$

Posons :

$$(49) \quad \begin{cases} a = P_{c,i} = \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{16\pi \mathcal{M}_0^2} \\ b = \frac{\omega u_c MN^2}{4\pi \mathcal{M}_0} \end{cases} \quad \text{d'où : } \quad \frac{b}{a} = \frac{4N^2 \mathcal{M}_0}{\omega^3 u_c^3 GM}$$

Grâce à (49) l'égalité (48) devient:

$$\begin{aligned}
 (50) \quad P = & a\psi^4 + A_0 \cos Nt \left[ -4a \left( \psi^4 + \xi\psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} \right) + b \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right) - \int_{\xi}^{\xi_0} \xi\psi^3 d\xi \right] \\
 & + A'_0 \cos (2Nt + N') \left[ -4a \left( \psi^4 + \xi\psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} \right) + 4b \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right) - \int_{\xi}^{\xi_0} \xi\psi^3 d\xi \right] \\
 & + \left[ A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) \right] 4a\xi\psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} \\
 & + b \left[ \frac{A_0 + A_i}{2} \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) + 2(A'_0 + A'_i) \cos \left( 2Nt + \frac{N' + N'_i}{2} \right) \right] \int_{\xi}^{\xi_0} \xi\psi^3 d\xi
 \end{aligned}$$

Telle est la valeur de la pression au sein d'une étoile dont la pulsation est définie par (43).

#### 4. Calcul de $P_1$

De  $P = P_i(1 + P_1)$  on tire:

$$P_1 = \frac{P - P_i}{P_i} = \frac{P - a\psi^4}{a\psi^4} \quad \text{car} \quad P_i = P_{c,i}\psi^4 = a\psi^4$$

En tenant compte de ces relations, ainsi que de (50) on obtient:

$$\begin{aligned}
 (51) \quad P_1 = & A_0 \cos Nt \left[ -4 \left( 1 + \frac{\xi}{\psi} \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \frac{b}{a} \left( \frac{\xi}{\psi^4} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{1}{\psi^3} + \frac{0,278}{\psi^4} - \frac{1}{\psi^4} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi\psi^3 d\xi \right) \right] \\
 & + A'_0 \cos (2Nt + N') \left[ -4 \left( 1 + \frac{\xi}{\psi} \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \frac{4b}{a} \left( \frac{\xi}{\psi^4} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{1}{\psi^3} + \frac{0,278}{\psi^4} - \frac{1}{\psi^4} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi\psi^3 d\xi \right) \right] \\
 & + \left[ A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) \right] \frac{4\xi}{\psi} \frac{d\psi}{d\xi} \\
 & + \frac{b}{a} \left[ \frac{A_0 + A_i}{2} \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) + 2(A'_0 + A'_i) \cos \left( 2Nt + \frac{N' + N'_i}{2} \right) \right] \frac{1}{\psi^4} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi\psi^3 d\xi
 \end{aligned}$$

Cette valeur de  $P_1$  est valable quel que soit le rayon.

Il s'agit maintenant de comparer cette valeur de  $P_1$  aux résultats fournis par l'observation. Nous prendrons pour  $\xi_0$

la valeur 6,888; elle correspond en effet à une valeur convenable de la température  $T$ , alors que  $\xi = 6,90$  correspond à  $T = 0$ . Quant à la limite inférieure  $\xi$ , elle est quelconque. Mais rappelons que la formule (51) est basée sur la solution polytropique et que celle-ci ne saurait être appliquée au delà de  $\xi' = 5$ . Nous calculerons donc la valeur de  $P_1$  pour  $\xi' = 5$ , et c'est la valeur ainsi obtenue que nous comparerons à l'expérience.

Notons que pour  $\xi_0 = 6,888$ , les coefficients de (51) sont finis. En effet  $\psi$  (des tables d'Emden) n'est pas nul à cette distance du centre. On a vu que la sphère limitée par  $\xi' = 5$  contient les 99,13 % de la masse totale, de sorte que les conditions qui règnent à cette profondeur ne sauraient différer sensiblement des conditions valables pour  $\xi_0$ ; le  $P_1$  que nous obtiendrons pourra effectivement être confronté avec l'observation.

Pour  $\xi' = 5$  les tables d'Emden donnent:

$$\begin{aligned} \psi &= 0,11110 & \psi^3 &= 0,0013713 & \psi^4 &= 0,00015235 \\ \frac{d\psi}{d\xi} &= -0,08003 & \xi \frac{d\psi}{d\xi} &= -0,40015 & \frac{\xi}{\psi} \frac{d\psi}{d\xi} &= -3,602 \end{aligned}$$

Ces valeurs permettent de calculer les coefficients des termes de (51). On trouve:

$$\begin{aligned} &\text{coefficient de } A_0 \cos Nt = \\ &= 10,408 + \frac{b}{a} (-72,4942 - 42,4242) = 10,408 - 114,9184 \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\text{Coefficient de } A'_0 \cos (2Nt + N') = 10,408 - 459,6736 \frac{b}{a}$$

$$\text{Coefficient de } A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) = -14,408$$

$$\text{Coefficient du dernier crochet de (51)} = 42,4242 \frac{b}{a}$$

Avec ces valeurs, (51) devient:

$$\begin{aligned} (52) \quad P_1 &= \left( 10,408 - 114,9184 \frac{b}{a} \right) A_0 \cos Nt \\ &+ \left( 10,408 - 459,6736 \frac{b}{a} \right) A'_0 \cos (2Nt + N') \\ &- 14,408 \left[ A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) \right] \\ &+ 42,4242 \frac{b}{a} \left[ \frac{A_0 + A_i}{2} \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) + 2(A'_0 + A'_i) \cos \left( 2Nt + \frac{N' + N'_i}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

On a posé précédemment:

$$\frac{b}{a} = \frac{4N^2 \mathcal{M}_0}{\omega^3 u_c^2 GM} \quad (\text{égalité 49})$$

$$\text{mais } \omega^3 = \frac{4\pi M_0}{M} \quad (\text{égalité (11) chap. II})$$

par conséquent :

$$\frac{b}{a} = \frac{N^2}{\pi u_c^3 G} = \frac{N^2}{\pi \rho_c G} \quad \text{car } u_c^3 = \rho_c$$

Montrons que ce quotient  $\frac{b}{a}$  est approximativement constant pour toutes les Céphéides.

Eddington a montré<sup>1</sup> que :

$$\theta \sqrt{\rho_c} = \text{constante (approximativement)}$$

mais 
$$\theta = \frac{2\pi}{N}$$

par conséquent : 
$$\frac{\sqrt{\rho_c}}{N} = \text{const.} \quad \text{ou : } \frac{N^2}{\rho_c} = \text{const.}$$

Cette dernière égalité entraîne la constance (approximative) du quotient  $\frac{b}{a}$ .

L'égalité (52) est donc valable pour toutes les Céphéides.

La valeur de cette constante  $\frac{b}{a}$  est mal connue. L'incertitude régnant à son sujet provient de l'incertitude de la valeur de  $\rho_c$ . D'un tableau dressé par Eddington<sup>2</sup> on peut déduire comme valeur moyenne de  $\frac{b}{a}$ , pour 16 Céphéides :

$$\frac{b}{a} = 0,031625$$

Les valeurs extrêmes, d'après le même tableau, sont :

$$\frac{b}{a} (\text{min.}) = 0,021 \quad \text{pour RR Lyrae.}$$

$$\frac{b}{a} (\text{max.}) = 0,042 \quad \text{pour SU Cygni.}$$

D'autre part, G. Tiercy qui utilise d'autres formules que Eddington pour le calcul de  $\rho_c$  trouve :

$$\frac{b}{a} = 0,01287 \quad \text{pour Y Sagittarii.}$$

Nous prenons dans ce travail la valeur

$$(53) \quad \frac{b}{a} = 0,02264$$

<sup>1</sup> EDDINGTON : The internal constitution of the stars, p. 192.

<sup>2</sup> EDDINGTON : *ibid.*, p. 182.

Cette valeur a l'avantage d'annuler le coefficient de

$$A'_0 \cos(2Nt + N')$$

dans l'égalité (52). Nous reviendrons, dans une remarque finale, sur ce choix de la valeur de  $\frac{b}{a}$ .

Par le moyen de (53), la valeur  $P_1$  donnée par (52) devient:

$$(54) \quad P_1 = 7,808 A_0 \cos Nt - 14,408 [A_i \cos(Nt + N_i) + A'_i \cos(2Nt + N'_i)] \\ + 0,960 \left[ \frac{A_0 + A_i}{2} \cos\left(Nt + \frac{N_i}{2}\right) + 2(A'_0 + A'_i) \cos\left(2Nt + \frac{N' + N'_i}{2}\right) \right]$$

Cette dernière relation, correspondant à  $\xi' = 5$ , jouera un rôle essentiel dans les chapitres suivants.

Toutefois, avant de l'appliquer à des Céphéides particulières, il y a lieu de faire la remarque suivante :

Soit  $t = t_0$  l'époque d'un extremum de  $r_1$ . Comme on a posé:

$$r_1 = A_i \cos(Nt + N_i) + A'_i \cos(2Nt + N'_i)$$

cette valeur  $t_0$  est racine de l'équation:

$$(55) \quad A_i \sin(Nt + N_i) + 2A'_i \sin(2Nt + N'_i) = 0$$

A la même époque  $t = t_0$  on a:

$$(56) \quad \left(\frac{dP_1}{dt}\right)_{t_0} = -7,808 A_0 N \sin Nt_0 + 14,408 \left[ A_i \sin(Nt_0 + N_i) + 2A'_i \sin(2Nt_0 + N'_i) \right] \\ - 0,960 N \left[ \frac{A_0 + A_i}{2} \sin\left(Nt_0 + \frac{N_i}{2}\right) + 4(A'_0 + A'_i) \sin\left(2Nt_0 + \frac{N' + N'_i}{2}\right) \right]$$

Le premier crochet de (56) étant nul en vertu de (55) il reste:

$$(57) \quad \left(\frac{dP_1}{dt}\right)_{t_0} = -7,808 A_0 N \sin Nt_0 - 0,960 N \times \\ \left[ \frac{A_0 + A_i}{2} \sin\left(Nt_0 + \frac{N_i}{2}\right) + 4(A'_0 + A'_i) \sin\left(2Nt_0 + \frac{N' + N'_i}{2}\right) \right]$$

$t = t_0$  étant racine de (55), cette valeur  $t_0$  n'annule pas, en général, le deuxième membre de (57); ce qui nous montre que les extrema de la pression ne sont en général pas simultanés avec les extrema du rayon.

Les relations obtenues jusqu'ici sont donc parfaitement compatibles avec l'existence d'un décalage entre les extrema de la pulsation et ceux de la pression.

## CHAPITRE IV

## Etude de S Sagittae.

$$N' = 0$$

La pulsation a été définie au chapitre III par les égalités (43) qui seront les égalités (58) de ce présent chapitre:

$$(58) \quad \begin{cases} r_{1,0} = A_0 \cos Nt + A'_0 \cos (2Nt + N') \\ r_1 = A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) \end{cases}$$

Une pulsation de ce type entraîne pour  $P_1$  la valeur

$$(59) \quad P_1 = 7,808 A_0 \cos Nt - 14,408 \left[ A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) \right] \\ + 0,960 \left[ \frac{A_0 + A_i}{2} \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) + 2(A'_0 + A'_i) \cos \left( 2Nt + \frac{N' + N'_i}{2} \right) \right]$$

qui est celle donnée sous le n° 54 du chapitre précédent.

Cette valeur de  $P_1$  étant obtenue pour  $\xi' = 5$ .

Les grandeurs  $A_0$   $A'_0$   $N$  et  $N'$  qui figurent dans (58) sont des constantes relatives à la surface de l'étoile, constantes connues grâce à la courbe des vitesses radiales.

Si  $A'_0 = 0$  l'ondulation secondaire disparaît. Ce cas a été étudié par G. Tiercy<sup>1</sup>. Mais en général la pulsation n'est pas harmonique, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer au chapitre III; par conséquent  $A_0$  et  $A'_0$  sont différents de zéro tous deux. Ce cas général peut présenter une alternative, suivant que  $N'$  est nul ou non.

Le présent chapitre est consacré à l'étude de S Sagittae, étoile pour laquelle  $N' = 0$ .

### 1. Introduction des données d'observation.

Nous avons donné au chapitre I la courbe des vitesses radiales de S Sagittae. La variation du rayon indiquée par cette courbe est représentée par

$$(60) \quad r_{1,0} = \frac{1}{16} \cos Nt - \frac{1}{48} \cos 2Nt$$

La comparaison de la première équation (58) avec (60) donne:

$$A_0 = \frac{1}{16} \quad A'_0 = -\frac{1}{48} \quad N' = 0$$

<sup>1</sup> G. TIERCY : *loc. cit.*, chapitre XVII.



D'autre part on sait que la période  $\theta$  vaut :

$$\theta = \frac{2\pi}{N} = 8,381615 \text{ jours}$$

Dans (60) les coefficients  $\frac{1}{16}$  et  $\frac{1}{48}$  sont fixés par les considérations suivantes:

1. le rapport  $\left| \frac{A_0}{A'_0} \right|$  doit être égal à 3 pour obtenir l'allure de la courbe observée.

2. la valeur absolue maximum de  $r_{1,0}$  doit être d'environ  $\frac{1}{12}$ . Cette valeur  $\frac{1}{12}$  résulte du calcul de l'amplitude de la pulsation<sup>1</sup>.

Il faut encore fixer la valeur des coefficients  $A_i$  et  $A'_i$  de la deuxième équation (53), pour  $\xi' = 5$ .

On sait, grâce à la théorie générale établie par Eddington, que l'amplitude de la pulsation diminue quand on s'éloigne de la surface de l'étoile. G. Tiercy trouve<sup>2</sup> que si à la surface on a  $A_0 = \frac{1}{12}$  alors pour  $\xi' = 5$  on a:

$$A_i = \frac{1}{14} ; \quad \frac{A_i}{A_0} = \frac{6}{7}$$

En admettant le même rapport pour les coefficients qui nous occupent ici, on obtient:

$$A_i = \frac{3}{56} = 0,054 \quad \text{pour } \xi' = 5$$

Cette valeur de  $A_i$  correspond à

$$A_0 = \frac{1}{16} \text{ à la surface.}$$

On sait, toujours par le calcul des amplitudes, que  $A'_i < 0$  (de même que  $A'_0 < 0$ ). Mais la pulsation, pour  $\xi' = 5$ , est inconnue.

On peut alors faire l'une des trois hypothèses suivantes:

$$1^0 \quad \left| \frac{A_i}{A'_i} \right| = \left| \frac{A_0}{A'_0} \right|$$

Ce qui revient à dire que la pulsation se transmet sans changements (à part la diminution d'amplitude) de  $\xi' = 5$  jusqu'à la surface.

<sup>1</sup> EDDINGTON : The internal constitution of the stars. Chap. VIII.

<sup>2</sup> G. TIERCY : *loc. cit.*, chap. XII.

G. TIERCY : *loc. cit.*, chap. XVII.

$$2^0 \quad \left| \frac{A_i}{A'_i} \right| < \left| \frac{A_0}{A'_0} \right|$$

Ce qui indique que pour  $\xi' = 5$ , l'ondulation secondaire est relativement plus importante qu'à la surface.

$$3^0 \quad \left| \frac{A_i}{A'_i} \right| > \left| \frac{A_0}{A'_0} \right|$$

Dans ce cas, l'ondulation secondaire serait relativement plus importante à la surface qu'à l'intérieur.

Ces trois hypothèses sont étudiées dans les pages qui suivent; mais nous pouvons remarquer dès maintenant que c'est la première qui semble devoir être retenue, et pour la raison suivante: nous avons dit (chap. II, § 2) que la partie périphérique de l'étoile (de  $\xi' = 5$  à  $\xi_0 = 6,90$ ) ne contient que 0,87 % de la masse totale. Cette partie de l'étoile a donc très peu d'importance, et la pulsation doit s'y transmettre sans modifications sensibles.

$$2. \text{ 1}^{\text{re}} \text{ hypothèse.} \quad \left| \frac{A_i}{A'_i} \right| = \left| \frac{A_0}{A'_0} \right| = 3$$

Puisque  $A_i = 0,054$  et que  $A'_i$  est de signe contraire à  $A_i$ , cette hypothèse donne  $A'_i = -0,018$ .

Les 4 coefficients figurant dans (58) ont donc les valeurs suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{16} = 0,063 \\ A'_0 = -\frac{1}{48} = -0,021 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i = 0,054 \\ A'_i = -0,018 \end{array} \right.$$

de plus:  $N' = 0$

Avec ces valeurs, les égalités (58) et (59) deviennent:

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{1,0} = 0,063 \cos Nt - 0,021 \cos 2Nt \\ r_1 = 0,054 \cos (Nt + N_i) - 0,018 \cos (2Nt + N'_i) \end{array} \right.$$

$$(62) \quad P_1 = 0,49 \cos Nt - 0,78 \cos (Nt + N_i) + 0,26 \cos (2Nt + N'_i) \\ + 0,056 \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) - 0,074 \cos \left( 2Nt + \frac{N_i}{2} \right)$$

Nous écrivons les coefficients avec deux chiffres significatifs; de même les calculs numériques qui suivent sont effectués à la même précision relative. Cette précision est suffisante, si l'on songe aux approximations admises pour établir l'égalité (59).

2 a. Calcul de  $N_i$  et  $N'_i$ .

Nous devons encore déterminer la valeur de  $N_i$  et  $N'_i$ . Utilisons pour cela le fait suivant: l'examen des courbes du chapitre I montre que la luminosité — et par conséquent la pression du moins en première approximation — est extrema à peu près au moment où le rayon atteint sa valeur moyenne. La simultanéité de ces deux événements n'est pas parfaite; toutefois elle est suffisante pour que nous puissions l'admettre, en première approximation.

Le rayon  $r$  atteint sa valeur moyenne quand  $r_{1,0}=0$ . On a donc, d'après (61):

$$0,063 \cos Nt - 0,021 \cos 2Nt = 0$$

$$\text{d'où l'on tire aisément: } \begin{cases} Nt' = 106^\circ \\ Nt'' = 254^\circ \end{cases}$$

A ces instants  $t'$  et  $t''$ , le rayon atteint sa valeur moyenne, et la pression est approximativement extrema. On a donc les deux équations approchées suivantes pour déterminer  $N_i$  et  $N'_i$ :

$$\left(\frac{dP_1}{dt}\right)_{t'} = 0 \quad \left(\frac{dP_1}{dt}\right)_{t''} = 0$$

En dérivant (62) on obtient:

$$(63) \quad \frac{1}{N} \frac{dP_1}{dt} = -0,49 \sin Nt + 0,78 \sin Nt \cos N_i + 0,78 \cos Nt \sin N_i \\ - 0,52 \sin 2Nt \cos N'_i - 0,52 \cos 2Nt \sin N'_i - 0,056 \sin Nt \cos \frac{N_i}{2} \\ - 0,056 \cos Nt \sin \frac{N_i}{2} + 0,15 \sin 2Nt \cos \frac{N'_i}{2} + 0,15 \cos 2Nt \sin \frac{N'_i}{2}$$

En faisant successivement

$$t = t' \quad \text{et} \quad t = t''$$

(63) donne les deux équations:

$$(64) \quad \begin{cases} -0,47 + 0,75 \cos N_i - 0,22 \sin N_i + 0,28 \cos N'_i + 0,44 \sin N'_i \\ - 0,054 \cos \frac{N_i}{2} + 0,016 \sin \frac{N_i}{2} - 0,080 \cos \frac{N'_i}{2} - 0,13 \sin \frac{N'_i}{2} = 0 \\ 0,47 - 0,75 \cos N_i - 0,22 \sin N_i - 0,28 \cos N'_i + 0,44 \sin N'_i \\ + 0,054 \cos \frac{N_i}{2} + 0,016 \sin \frac{N_i}{2} + 0,080 \cos \frac{N'_i}{2} - 0,13 \sin \frac{N'_i}{2} = 0 \end{cases}$$

Tel est le système qui détermine pratiquement  $N_i$  et  $N'_i$ . En additionnant — puis en soustrayant — membre à membre les équations qui le composent, on obtient :

$$(65) \left\{ \begin{array}{l} -0,44 \sin N_i + 0,88 \sin N'_i + 0,032 \sin \frac{N_i}{2} - 0,26 \sin \frac{N'_i}{2} = 0 \\ -0,94 + 1,5 \cos N_i + 0,56 \cos N'_i - 0,11 \cos \frac{N_i}{2} - 0,16 \cos \frac{N'_i}{2} = 0 \end{array} \right.$$

Il est permis de négliger le terme  $0,032 \sin \frac{N_i}{2}$ , dont le coefficient est au plus égal à  $\frac{1}{10}$  des autres coefficients. Le système (65) peut alors s'écrire plus simplement:

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} \sin N_i = 2 \sin N'_i - 0,59 \sin \frac{N'_i}{2} \\ -94 + 150 \cos N_i + 56 \cos N'_i - 11 \cos \frac{N_i}{2} - 16 \cos \frac{N'_i}{2} = 0 \end{array} \right.$$

Nous résolvons ce système (66) de la manière suivante: ayant choisi une certaine valeur pour  $N'_i$ , nous en déduisons, par le moyen de la première équation (66), la valeur correspondante de  $N_i$ . Les deux valeurs ainsi obtenues doivent alors vérifier la deuxième équation (66).

On obtient de cette façon:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_i = -61^\circ \\ N'_i = -32^\circ \end{array} \right.$$

Il est évident que le système (66) admet d'autres solutions que (67). Mais il n'est pas nécessaire, pour le but que nous poursuivons, d'obtenir toutes les solutions de (66). Nous cherchons à retrouver les décalages signalés au chapitre I. Si la solution (67) le permet, le but sera atteint, et les autres solutions, mathématiquement admissibles, ne conduiraient pas au résultat physique attendu. Il reste donc à voir si ces valeurs (67) permettent de vérifier la loi de variation de P.

*2 b. Calcul des décalages.* — Introduisons les valeurs données par (67) dans (62). On obtient:

$$P_1 = 0,49 \cos Nt - 0,78 \cos (Nt - 61) + 0,26 \cos (2Nt - 32) \\ + 0,056 \cos (Nt - 30\frac{1}{2}) - 0,074 \cos (2Nt - 16)$$

Calculons les instants des extrema de  $P_1$ . Ils sont donnés par

$$\frac{dP_1}{dt} = 0$$

Si l'on pose:  $\sin Nt = x$  l'équation  $\frac{dP_1}{dt} = 0$  peut s'écrire, tous calculs faits:

$$(69) \quad 58x^4 + 93x^3 - 12x^2 - 86x - 37 = 0$$

Deux racines de cette équation sont imaginaires; les deux autres valent:

$$x_1 = 0,84 \qquad x_2 = -0,73$$

d'où l'on déduit:

$$(70) \quad \begin{cases} Nt_1 = 58^\circ \\ Nt_2 = 122^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} Nt_3 = -47^\circ \\ Nt_4 = -133^\circ \end{cases}$$

$t_1 t_2 t_3 t_4$  sont les instants des extrema de  $P_1$ , dont les principaux sont  $t_2$  et  $t_4$ , proches respectivement de  $t'$  et  $t''$ .

*Calcul de la valeur de  $P_1$  au moment des extrema.*

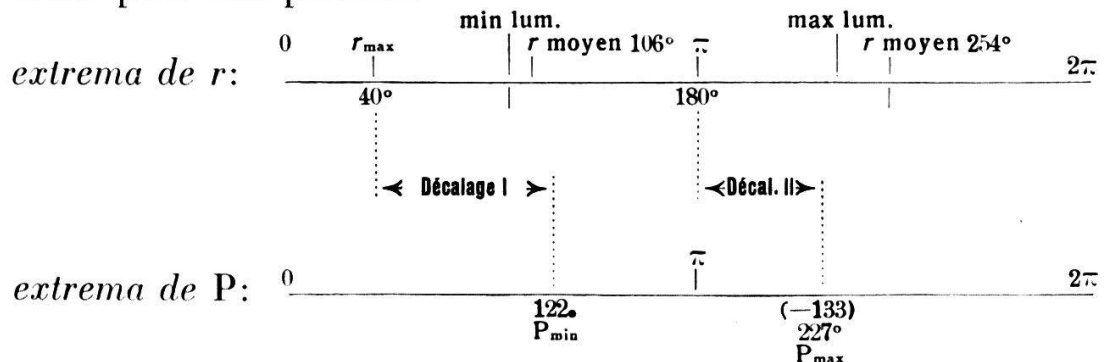
En introduisant les valeurs (70) dans (68) on obtient les résultats suivants :

$$\begin{array}{lll} P_1 = -0,42 & \text{pour } Nt = 58^\circ & \\ P_1 = -0,80 & \text{pour } Nt = 122^\circ & \text{P minimum} \\ P_1 = 0,49 & \text{pour } Nt = -133^\circ & \text{P maximum} \\ P_1 = 0,46 & \text{pour } Nt = -47^\circ & \end{array}$$

Il résulte de là que la pression est minimum pour  $Nt = 122^\circ$  et qu'elle est maximum pour  $Nt = -133^\circ$ .

D'autre part, il résulte de (61) que  $r_0$  est maximum pour  $Nt = 40^\circ$  et minimum pour  $Nt = 180^\circ$ .

Les résultats précédents sont portés sur le schéma suivant, établi pour une période:



Le schéma fait apparaître les deux décalages signalés au chapitre I.

Ces décalages ont pour valeur:

$$\text{Décalage I} = 122^\circ - 40^\circ = 82^\circ \text{ ou } \frac{41}{180} \theta = 0,23 \theta$$

$$\text{Décalage II} = 227^\circ - 180^\circ = 47^\circ \text{ ou } \frac{47}{360} \theta = 0,13 \theta$$

Or les courbes d'observation donnent, ainsi que nous le disions au chapitre I:

$$\text{Décalage I} = 0,20 \theta$$

$$\text{Décalage II} = 0,12 \theta$$

Ainsi donc l'hypothèse envisagée à la page 221 est admissible. Les calculs faits jusqu'ici confirment le fait déjà signalé que la partie périphérique de l'étoile (de  $\xi' = 5$  jusqu'à la surface) a peu d'importance sur les phénomènes intéressant l'étoile entière. En particulier, la pulsation traverse cette couche périphérique sans subir d'autres modifications appréciables qu'une diminution d'amplitude.

3. 2<sup>e</sup> hypothèse.

Nous avons indiqué précédemment les trois hypothèses possibles au sujet du rapport  $\left| \frac{A_i}{A'_i} \right|$

Voyons à quelles conclusions on est conduit par l'adoption de la deuxième hypothèse:

$$\left| \frac{A_i}{A'_i} \right| < \left| \frac{A_0}{A'_0} \right|$$

Supposons par exemple que:

$$\left| \frac{A_i}{A'_i} \right| = 2$$

Les quatre coefficients des relations (58) ont alors les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} A_0 = 0,063 & \{ A_i = 0,054 \\ A'_0 = -0,021 & \{ A'_i = -0,027 \end{cases}$$

avec, comme dans le cas précédent,  
 $N' = 0$ .

Les relations (58) et (59) deviennent:

$$(71) \quad \begin{cases} r_{1,0} = 0,063 \cos Nt - 0,021 \cos 2Nt \\ r_1 = 0,054 \cos (Nt + N_i) - 0,027 \cos (2Nt + N'_i) \end{cases}$$

$$(72) \quad P_1 = 0,49 \cos Nt - 0,78 \cos (Nt + N_i) + 0,40 \cos (2Nt + N'_i) \\ + 0,057 \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) - 0,096 \cos \left( 2Nt + \frac{N'_i}{2} \right)$$

Pour déterminer  $N_i$  et  $N'_i$  nous procédons comme nous l'avons déjà fait lors du calcul dans le cas de la première hypothèse.

Le système déterminant  $N_i$  et  $N'_i$  peut se mettre sous la forme:

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin N_i = 3 \sin N'_i - 0,74 \sin \frac{N'_i}{2} \\ -94 + 150 \cos N_i + 84 \cos N'_i - 11 \cos \frac{N_i}{2} - 20 \cos \frac{N'_i}{2} = 0 \end{array} \right.$$

ce système (73) correspondant au système (66) du numéro précédent.

Une solution de (73) est:

$$\begin{cases} N_i = -77^\circ \\ N'_i = -21\frac{1}{2}^\circ \end{cases}$$

La valeur de  $P_1$  donnée par (72) devient alors:

$$(74) P_1 = 0,49 \cos Nt - 0,78 \cos (Nt - 77) + 0,40 \cos (2Nt - 21\frac{1}{2}) \\ + 0,057 \cos (Nt - 38\frac{1}{2}) - 0,096 \cos (2Nt - 11)$$

Les instants des extrema de  $P$  sont donnés par l'équation:

$$\frac{dP_1}{dt} = 0$$

En posant  $\sin Nt = x$  l'équation précédente prend la forme:

$$39x^4 - 22x^3 - 33x^2 + 24x - 4 = 0$$

Les deux racines réelles de cette équation ont pour valeur:

$$x = 0,90 \quad x = -1$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} Nt_1 &= 65^\circ & Nt_3 &= -\frac{\pi}{2} \\ Nt_2 &= 115^\circ \end{aligned}$$

$t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont les instants des extrema de  $P$ . A ces instants,  $P_1$  a les valeurs suivantes, calculées au moyen de (74):

$$\begin{aligned} P_1 &= -0,58 & \text{pour } Nt_1 &= 65^\circ \\ P_1 &= -1,09 & \text{pour } Nt_2 &= 115^\circ \\ P_1 &= 0,52 & \text{pour } Nt_3 &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Le minimum de  $P$  se produit donc pour  $Nt_2 = 115^\circ$   
et le maximum pour  $Nt_3 = 270^\circ$

Un schéma analogue à celui de la page 224, et qu'il est inutile de répéter ici, montrerait les résultats suivants:

$$\text{Décalage I} = 115^\circ - 40^\circ = 75^\circ \text{ ou } \frac{75}{360} \theta = 0,21 \theta$$

$$\text{Décalage II} = 270^\circ - 180^\circ = 90^\circ \text{ ou } \frac{\theta}{4} = 0,25 \theta$$

Les résultats précédents sont inadmissibles pour les deux raisons suivantes:

1° Pour toutes les Céphéides, et pour S Sagittae en particulier, le décalage II est plus petit que le décalage I.

2° L'égalité définissant  $P_1$ :

$$P = P_i(1 + P_1)$$

exige que  $|P_1| \leq 1$

Or pour  $Nt_2 = 115^\circ$  on a obtenu:

$$P_1 = -1,09$$

La deuxième hypothèse, envisagée dans ce n° 3, ne peut donc être admise.

4. 3<sup>e</sup> hypothèse :  $\left| \frac{A_i}{A'_i} \right| > \left| \frac{A_0}{A'_0} \right|$

Supposons par exemple que

$$\left| \frac{A_i}{A'_i} \right| = 4$$

Les quatre coefficients de (58) ont alors les valeurs:

$$\begin{cases} A_0 = 0,063 & A_i = 0,054 \\ A'_0 = -0,021 & A'_i = -0,014 \end{cases}$$

La valeur de  $P_1$  devient:

$$P_1 = 0,49 \cos Nt - 0,78 \cos (Nt + N_i) + 0,20 \cos (2Nt + N'_i) \\ + 0,057 \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) - 0,067 \cos \left( 2Nt + \frac{N'_i}{2} \right)$$

Le système déterminant  $N_i$  et  $N'_i$  est:

$$\begin{cases} \sin N_i = 1,5 \sin N'_i - 0,50 \sin \frac{N'_i}{2} \\ -94 + 150 \cos N_i + 42 \cos N'_i - 11 \cos \frac{N_i}{2} - 14 \cos \frac{N'_i}{2} = 0 \end{cases}$$

dont une solution est:

$$\begin{cases} N_i = -55^\circ \\ N'_i = -42^\circ \end{cases}$$

La valeur de  $P_1$  est alors la suivante:

$$P_1 = 0,49 \cos Nt - 0,78 \cos (Nt - 55) + 0,20 \cos (2Nt - 42) \\ + 0,057 \cos (Nt - 27\frac{1}{2}) - 0,067 \cos (2Nt - 21)$$

Les dates des extrema de  $P$  sont déterminées par l'équation:

$$32x^4 + 53x^3 + 6x^2 - 48x - 32 = 0$$

dans laquelle on a posé  $\sin Nt = x$ .

La pression  $P$  est extrema aux quatre instants  $t_1 t_2 t_3 t_4$  déterminés par:

$$\begin{array}{ll} Nt_1 = 81^\circ & Nt_3 = -70^\circ \\ Nt_2 = 99^\circ & Nt_4 = -110^\circ \end{array}$$

Le minimum absolu a lieu pour:

$$Nt_2 = 99^\circ$$

et le maximum absolu pour:

$$Nt_4 = -110^\circ$$

Les décalages ont alors les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{l} \text{Décalage I} = 0,17 \theta \\ \text{Décalage II} = 0,20 \theta \end{array}$$

L'hypothèse envisagée maintenant conduit, comme la précédente, à un décalage II plus grand que le décalage I. Cette troisième hypothèse doit donc être rejetée.



5. *Remarque.*

Dans le calcul précédent, nous avons été amené à donner la valeur  $-3$  au rapport  $\frac{A_i}{A'_i}$ , tandis que les valeurs  $-2$  et  $-4$  sont à écarter parce qu'elles conduisent à un décalage II plus grand que le décalage I. Nous nous proposons de chercher, dans cette remarque, quel est le domaine admissible, autour de  $-3$ , pour le rapport en question.

Nous posons:

$$\frac{A_i}{A'_i} = \frac{-3}{\varepsilon} \quad \varepsilon \text{ voisin de } 1$$

d'où l'on tire:

$$(75) \quad \begin{cases} A_i = 0,054 \\ A'_i = -0,018\varepsilon \end{cases}$$

en tenant compte des données du § 1 du présent chapitre.

Le tableau suivant résume les résultats obtenus dans les pages précédentes.

<i>I<sup>re</sup> hypothèse</i>	<i>II<sup>e</sup> hypothèse</i>	<i>III<sup>e</sup> hypothèse</i>
$\frac{A_i}{A'_i} = -3 \quad \varepsilon = 1$	$\frac{A_i}{A'_i} = -2 \quad \varepsilon = \frac{3}{2}$	$\frac{A_i}{A'_i} = -4 \quad \varepsilon = \frac{3}{4}$
$\begin{cases} N_i = -61^0 \\ N'_i = -32^0 \end{cases}$	$\begin{cases} N_i = -77^0 \\ N'_i = -21\frac{1}{2}^0 \end{cases}$	$\begin{cases} N_i = -55^0 \\ N'_i = -42^0 \end{cases}$

Les grandeurs  $N_i$  et  $N'_i$  sont fonction de  $\varepsilon$ , fonctions prenant les valeurs indiquées ci-dessus, pour  $\varepsilon = \frac{3}{2}$ ;  $\varepsilon = 1$  et  $\varepsilon = \frac{3}{4}$ . On peut, sans erreur sensible, interpoler en représentant  $N_i$  et  $N'_i$  par des polynomes du deuxième degré en  $(\varepsilon - 1)$ . On obtient:

$$(76) \quad \begin{cases} N_i = -61 - 26(\varepsilon - 1) - 11(\varepsilon - 1)^2 = -46 - 4\varepsilon - 11\varepsilon^2 \\ N'_i = -32 + 33(\varepsilon - 1) - 27(\varepsilon - 1)^2 = -92 + 87\varepsilon - 27\varepsilon^2 \end{cases}$$

Portons les valeurs (75) et (76) dans (59),  $P_1$  devient:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0,49 \cos Nt - 0,78 \cos (Nt - 46 - 4\varepsilon - 11\varepsilon^2) \\ &+ 0,26\varepsilon \cos (2Nt - 92 + 87\varepsilon - 27\varepsilon^2) + 0,06 \cos (Nt - 23 - 2\varepsilon - 5\varepsilon^2) \\ &\quad - (0,04 + 0,03\varepsilon) \cos (2Nt - 46 + 44\varepsilon - 14\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Cette valeur de  $P_1$  se réduit à celle donnée sous le n° (68) pour  $\varepsilon = 1$ .

Nous calculons, comme nous l'avons déjà fait à trois reprises, les dates des extrema de  $P_1$ , cela pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Nous en déduisons ensuite les valeurs des décalages I et II. On obtient les résultats suivants:

$$\begin{array}{l} \frac{\varepsilon = 1,2}{\frac{A_i}{A'_i} = -2,5} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Décalage I} = 0,18 \theta \\ \text{Décalage II} = 0,25 \theta \end{array} \right. \\ \frac{\varepsilon = 1,1}{\frac{A_i}{A'_i} = -2,7} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Décalage I} = 0,18 \theta \\ \text{Décalage II} = 0,10 \theta \end{array} \right. \\ \frac{\varepsilon = 0,95}{\frac{A_i}{A'_i} = -3,15} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Décalage I} = 0,18 \theta \\ \text{Décalage II} = 0,17 \theta \end{array} \right. \\ \frac{\varepsilon = 0,90}{\frac{A_i}{A'_i} = -3,3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Décalage I} = 0,18 \theta \\ \text{Décalage II} = 0,20 \theta \end{array} \right. \end{array}$$

Seuls les décalages correspondant à  $\varepsilon = 1,1$  ont des valeurs sensiblement égales aux valeurs d'observation. La meilleure valeur pour  $\varepsilon$  paraît être comprise entre 1 et 1,1; ce qui permet de penser que l'ondulation secondaire s'atténue légèrement en passant de  $\xi' = 5$  à la surface.

Les résultats précédents mettent en évidence un autre fait: le décalage I ne dépend pas (en première approximation tout au moins) de  $\varepsilon$ . C'est donc l'ondulation principale qui détermine ce décalage.

### CHAPITRE V.

#### Etude de W Sagittarii.

$$N' \neq 0$$

##### 1. Introduction des données d'observation.

Nous avons donné au chapitre I la courbe des vitesses radiales de cette étoile. La variation du rayon indiquée par cette courbe est représentée par:

$$(77) \quad r_{1,0} = 0,083 \cos Nt - 0,018 \cos \left( 2Nt + \frac{\pi}{3} \right)$$

La comparaison de (77) avec la première des équations (78)

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{1,0} = A_0 \cos Nt + A'_0 \cos (2Nt + N') \\ r_1 = A_i \cos (Nt + N_i) + A'_i \cos (2Nt + N'_i) \end{array} \right.$$

permet d'écrire:

$$A_0 = 0,083 \quad A'_0 = -0,018 \quad N' = \frac{\pi}{3}$$

Pour déterminer les coefficients  $A_i$  et  $A'_i$ , on procède comme nous l'avons indiqué au début du chapitre IV. On trouve:

$$A_i = 0,067 \quad A'_i = -0,015$$

Les coefficients  $A_0$  et  $A'_0$  ont été choisis de manière que la valeur absolue maximum de  $r_{1,0}$  soit environ  $\frac{1}{10}$ . C'est en

effet la valeur admise pour l'amplitude de la pulsation de l'étoile qui nous occupe<sup>1</sup>.

Quant au coefficient  $A'_i$ , il a été calculé en admettant la première hypothèse du chapitre IV. Les développements du chapitre IV ont montré en effet que pour rendre compte des décalages observés, il fallait supposer que la pulsation se transmet sans modifications importantes de  $\xi' = 5$  jusqu'à la surface, en vertu du fait que la sphère de rayon  $\xi' = 5$  contient les 99,13% de la masse totale.

Les valeurs indiquées pour  $A_0$ ,  $A'_0$ ,  $A_i$  et  $A'_i$  conduisent à l'expression suivante:

$$(79) \quad P_1 = 0,65 \cos Nt - 0,95 \cos (Nt + N_i) + 0,22 \cos (2Nt + N'_i) \\ + 0,07 \cos \left( Nt + \frac{N_i}{2} \right) - 0,06 \cos \left( 2Nt + \frac{N_i}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$$

qui se déduit de la relation (54) du chapitre III.

Telle est la valeur de  $P_1$  qui va nous permettre de retrouver les décalages signalés au chapitre I, pour W Sagittarii.

Nous traitons ce cas de deux manières différentes. Dans la première partie de ce chapitre, nous utilisons la méthode qui nous a servi déjà au chapitre précédent, dans le cas de S Sagittae. Ce fait nous dispense d'entrer dans tous les détails du calcul; aussi ne donnons-nous, dans cette première partie, que les résultats principaux.

Nous emploierons, dans la deuxième partie de ce chapitre, un autre procédé de calcul.

## 2. Premier calcul.

Pour déterminer  $N_i$  et  $N'_i$ , nous avons supposé, au début du chapitre IV, que les instants de luminosité extrema coïncidaient avec les instants du rayon moyen. En faisant maintenant la même hypothèse, les deux inconnues  $N_i$  et  $N'_i$  sont déterminées par le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dP_1}{dt} \right)_{r'} = 0 \\ \left( \frac{dP_1}{dt} \right)_{r''} = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec: } \left\{ \begin{array}{l} Nt' = 98^\circ \\ Nt'' = 260^\circ \end{array} \right.$$

où  $t'$  et  $t''$  sont les instants du rayon moyen, c'est-à-dire les instants où  $r_{1,0}$  s'annule. Le système précédent se simplifie et se ramène au suivant:

<sup>1</sup> G. TIERCY : *loc. cit.*, p. 452.

$$\sin N_i = 2,1 \sin N'_i - 0,53 \sin \frac{N'_i}{2} - 0,26 \cos \frac{N'_i}{2}$$

$$- 127 + 185 \cos N_i + 6 \sin N_i + 34 \cos N'_i - 14 \cos \frac{N_i}{2} - 8 \cos \frac{N'_i}{2} + 4 \sin \frac{N'_i}{2} = 0$$

dont une solution est:  $\begin{cases} N_i = -46^\circ \\ N'_i = -33^\circ \end{cases}$

Ces valeurs approchées sont à introduire dans (79), qui devient :

$$(80) \quad P_1 = 0,65 \cos Nt - 0,95 \cos (Nt - 46) + 0,22 \cos (2Nt - 33) + 0,07 \cos (Nt - 23) - 0,06 \cos (2Nt + 13\frac{1}{2})$$

Les dates des extrema de  $P_1$  sont données par l'équation

$$95 \sin^4 Nt + 116 \sin^3 Nt - 44 \sin^2 Nt - 119 \sin Nt - 45 = 0$$

dont les deux racines réelles sont :

$$\sin Nt = 0,994 \qquad \sin Nt = -0,67$$

d'où l'on tire:

$$\begin{cases} Nt_1 = 84^\circ \\ Nt_2 = 96^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} Nt_3 = -42^\circ \\ Nt_4 = -138^\circ \end{cases}$$

La relation (80) fournit ensuite les résultats suivants:

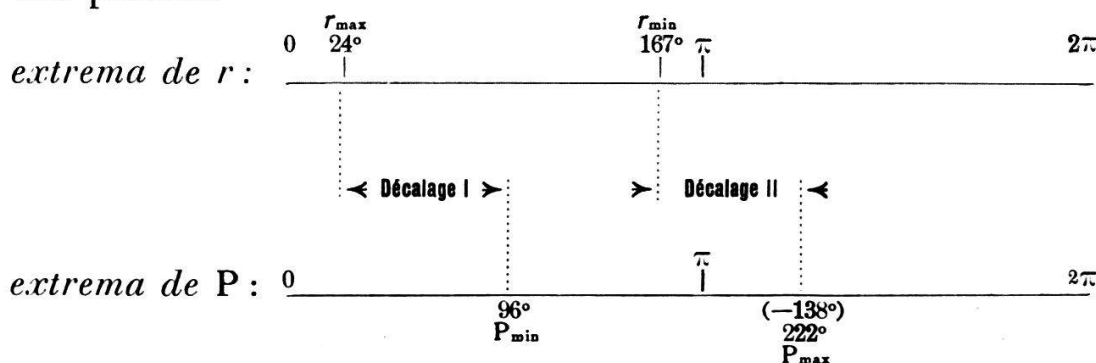
$$\begin{aligned} P_1 &= -0,75 && \text{pour } Nt_1 = 84^\circ \\ P_1 &= -0,80 && \text{pour } Nt_2 = 96^\circ && P \text{ min.} \\ P_1 &= -0,36 && \text{pour } Nt_3 = -42^\circ \\ P_1 &= 0,53 && \text{pour } Nt_4 = -138^\circ && P \text{ max.} \end{aligned}$$

Les instants  $t_2$  et  $t_4$  sont proches respectivement des instants  $t'$  et  $t''$  donnant les rayons moyens. ( $r_{1,0} = 0$ ).

Les instants des extrema du rayon sont:

$$\begin{cases} Nt'_m = 24^\circ && \text{pour } r_{1,0} \text{ maximum} \\ Nt''_m = 167^\circ && \text{pour } r_{1,0} \text{ minimum} \end{cases}$$

Ces résultats sont portés sur le schéma suivant, établi pour une période:



$$\begin{cases} \text{Décalage I} = 96^\circ - 24^\circ = 72^\circ && \text{ou } 0,20 \theta \\ \text{Décalage II} = 222^\circ - 167^\circ = 55^\circ && \text{ou } 0,15 \theta \end{cases}$$

Rappelons que les courbes d'observation données au chapitre I mettent en évidence les décalages suivants:

$$\begin{cases} \text{Décalage I} = 0,18 \theta \\ \text{Décalage II} = 0,14 \theta \end{cases}$$

L'accord, on le voit, est satisfaisant. Il n'y a pas lieu de retoucher les valeurs de  $N_i$  et  $N'_i$ .

### 3. Deuxième calcul.

Nous avons admis, dans les pages précédentes, la simultanéité entre les instants des extrema lumineux et les instants du rayon moyen. Ce n'est là qu'une indication approximative.

Pour une seconde approximation, nous prendrons, comme valeurs de  $t'$  et  $t''$  conduisant à la détermination de  $N_i$  et  $N'_i$  les phases  $t_2$  et  $t_4$  trouvées dans le calcul précédent pour les extrema de P. On a ainsi:

$$\begin{cases} Nt' = 96^\circ \\ Nt'' = 222^\circ \end{cases}$$

Ces deux époques sont d'ailleurs à très peu près celles des extrema lumineux, comme on peut facilement s'en rendre compte en construisant la courbe de pulsation, et en comparant celle-ci à la courbe de lumière.

La pression étant extrema aux époques  $t'$  et  $t''$  ci-dessus indiquées, la dérivée de  $P_1$  s'annule lorsqu'on y fait:

$$\begin{cases} Nt' = 96^\circ \\ Nt'' = 222^\circ \end{cases}$$

Les deux équations déterminant  $N_i$  et  $N'_i$  sont donc:

$$(81) \quad \left( \frac{dP_1}{dt} \right)_{t'} = 0 \quad \left( \frac{dP_1}{dt} \right)_{t''} = 0$$

$P_1$  étant déterminé par la relation (79).

Le système (81) peut se mettre sous la forme simplifiée suivante:

$$(82) \quad \begin{cases} \cos N_i = 0,68 - 0,15 \cos N'_i - 0,47 \sin N'_i + 0,10 \cos \frac{N'_i}{2} + 0,08 \sin \frac{N'_i}{2} \\ -2 + 3 \cos N_i - 8 \sin N_i - 3,5 \cos N'_i + 0,6 \sin \frac{N'_i}{2} - 1,4 \sin \frac{N'_i}{2} = 0 \end{cases}$$

Une solution de ce système (82) est:

$$\begin{cases} N_i = -22\frac{1}{2}^\circ \\ N'_i = -40^\circ \end{cases}$$

La valeur de  $P_1$  donnée par (79) devient alors:

$$(83) P_1 = 0,65 \cos Nt - 0,95 \cos (Nt - 22\frac{1}{2}) + 0,22 \cos (2Nt - 40) \\ + 0,07 \cos (Nt - 11) - 0,06 \cos (2Nt + 10)$$

Cette valeur de  $P_1$  étant obtenue en considérant des pha-

ses  $t'$  et  $t''$  meilleures que celles des rayons moyens, doit redonner ces instants  $t'$  et  $t''$  comme instants des extrema de  $P_1$ .

*Vérification.* — Ces instants sont solutions de l'équation:

$$\frac{dP_1}{dt} = 0$$

qui, grâce à (83), peut s'écrire:

$$(84) \quad 55 \sin^4 Nt + 13 \sin^3 Nt - 41 \sin^2 Nt - 22 \sin Nt - 3,3 = 0$$

Cette équation (84) a deux racines réelles:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin Nt = 0,989 \\ \sin Nt = -0,66 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où l'on tire: } \left\{ \begin{array}{l} Nt_1 = 82^\circ \\ Nt_2 = 98^\circ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Nt_3 = -41^\circ \\ Nt_4 = -139^\circ \end{array} \right.$$

La relation (83) permet de calculer les valeurs de  $P_1$  à ces quatre instants  $t_1, t_2, t_3, t_4$ . Seules les valeurs de  $P_1$  indiquant le minimum absolu et le maximum absolu de  $P$  sont utiles pour le but que nous poursuivons. Ces valeurs sont:

$$\begin{array}{ll} P_1 = -0,48 \text{ pour } Nt_2 = 98^\circ & P \text{ min.} \\ P_1 = 0,51 \text{ pour } Nt_4 = -139^\circ (\text{ou } +221^\circ) & P \text{ max.} \end{array}$$

Nous retrouvons ici, à très peu près, les instants  $t'$  et  $t''$  introduits plus haut. La vérification est donc bonne.

### Remarques finales.

#### I Le rapport $\frac{b}{a}$ .

Les analyses des chapitres IV et V sont basées essentiellement sur la relation (54) du chapitre III. La valeur de  $P_1$  donnée par (54) est valable pour toutes les Céphéides à condition d'admettre la constance du rapport  $\frac{b}{a}$ . Nous avons démontré (chap. III § 4) la constance approximative de ce rapport, en utilisant le résultat suivant, établi par Eddington: le produit  $\theta\sqrt{\rho_c}$  est approximativement constant pour toutes les Céphéides. Eddington a calculé les valeurs suivantes<sup>1</sup>:

Etoile.	Type.	$\theta\sqrt{\rho_c}$	Etoile.	Type.	$\theta\sqrt{\rho_c}$
l Car.	F <sub>8</sub> — G <sub>9</sub>	0,74	Y Sgr.	F <sub>4</sub> — G <sub>4</sub>	0,67
Y Oph.	F <sub>5</sub> — G <sub>3</sub>	0,92	δ Cep.	F <sub>0</sub> — G <sub>2</sub>	0,89
X Cyg.	F <sub>5</sub>	1,38	T Vul.	A <sub>9</sub> — G <sub>1</sub>	0,92
ξ Gém.	G <sub>0</sub>	0,71	SU Cyg.	A <sub>6</sub> — F <sub>7</sub>	1,23
S Sge.	F <sub>4</sub> — G <sub>3</sub>	0,79	RT Aur.	A <sub>7</sub> — G <sub>1</sub>	0,95
W Sgr.	A <sub>8</sub> — G <sub>2</sub>	1,10	SZ Tau.	A <sub>9</sub> — G <sub>0</sub>	0,83
η Aql.	A <sub>8</sub> — G <sub>5</sub>	0,94	SU Cas.	A <sub>9</sub> — F <sub>5</sub>	0,82
X Sgr.	F <sub>1</sub> — G <sub>5</sub>	0,80	RR Lyr.	B <sub>9</sub> — F <sub>2</sub>	0,62

<sup>1</sup> Eddington n'emploie pas les mêmes unités que nous pour exprimer la valeur de  $\theta\sqrt{\rho_c}$ .

Les valeurs extrêmes de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$  sont entre elles comme 1 est à 2.

Pour nous rendre compte si ces valeurs de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$  étaient fonction du type spectral de l'étoile, nous avons établi un graphique (qu'il est inutile de reproduire ici) en portant en ordonnées les valeurs de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$  et en abscisses le type spectral, suivant l'ordre évolutif: B — A — F — G — K.

Les points représentatifs sont dispersés assez irrégulièrement: cependant on observe une diminution de la valeur moyenne de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$  du côté des spectres avancés. On a par exemple:

Valeur moyenne de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$  pour les étoiles dont les spectres moyens sont compris entre  $F_0$  et  $F_5 = 1,0$ .

Pour les spectres compris entre  $F_5$  et  $G_0$  la valeur moyenne de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$  est 0,83 et pour les spectres compris entre  $G_0$  et  $G_5$  cette valeur est de 0,72.

La diminution de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$  est nette. Il faut remarquer cependant que les spectres des étoiles que nous utilisons n'occupent qu'un faible intervalle du domaine spectral. D'autre part on sait<sup>1</sup> que plus le type spectral est avancé, plus la période  $\theta$  est longue. Y a-t-il une corrélation entre ces deux phénomènes?

Quoi qu'il en soit, nous n'avons pas jugé nécessaire d'introduire dans notre travail ces variations de  $\theta\sqrt{\bar{\rho}_c}$ , qui entraînent des variations de  $\frac{b}{a}$ . On se rend aisément compte que le premier coefficient de (52) n'est pas sensiblement modifié par de petites variations de  $\frac{b}{a}$ . Quant au dernier coefficient de (52), c'est sa petitesse qui rend négligeables ses variations éventuelles.

## II. La couche périphérique.

Nous avons comparé, dans ce travail, les courbes de lumière et des vitesses radiales. La première de ces courbes est obtenue par des mesures photométriques, elle est donc relative à la photosphère de l'étoile envisagée; tandis que la courbe des vitesses radiales, obtenue spectroscopiquement, concerne la couche renversante. Peut-on, dans ces conditions, comparer ces deux courbes?

G. Tiercy montre<sup>2</sup> que cela est légitime, et les raisons qu'il donne dans le cas d'une pulsation du type :

<sup>1</sup> SHAPLEY — *Astrophysical Journal*, t. XL, 1914.

<sup>2</sup> G. TIERCY : *loc. cit.*, p. 456 et suivantes.



$$(88) \quad \begin{cases} r_{1,0} = A_0 \cos Nt \\ r_1 = A_i \cos (Nt + N_i) \end{cases}$$

sont encore valables pour la pulsation du type (43) envisagé dans ce travail. Cela tient, en dernier ressort, à la très faible masse de la couche périphérique, fait déjà signalé au chapitre III § 4. Cependant les cas (43) et (88) ne se présentent pas de la même manière.

Dans le cas d'une pulsation du type (88), on ne peut admettre que  $N$  tende vers 0 quand  $\xi$  tend vers  $\xi_0$ , car dans cette supposition on aurait:

$$P_{1,0} = -0,2 \cos Nt \quad ^1$$

et les extrema de  $P_{1,0}$  se produiraient alors en même temps que ceux de  $r_{1,0}$ , ce qui n'est pas le cas.

Cette difficulté ne se présente pas de la même façon dans le cas d'une pulsation du type (43). En effet, pour:

$$\begin{cases} A_i \rightarrow A_0 \\ A'_i \rightarrow A'_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_i \rightarrow 0 \\ N'_i \rightarrow N' \end{cases}$$

on a :  $r_1 \rightarrow r_{1,0}$ . Mais, dans ces conditions, la relation fondamentale (54) montre que les dates des extrema de  $P_{1,0}$  sont différentes de celles de  $r_{1,0}$ . Il conviendra cependant de tenir compte du fait que la photosphère se prolonge par une atmosphère, dont la partie inférieure est justement la couche renversante observée, laquelle donne les indications sur les vitesses radiales. Et, lorsque  $\xi \rightarrow \xi_0$ , on sera amené à considérer que  $N_i$  et  $N'_i$  tendent vers d'autres valeurs que 0 et  $N'$ .

### III. Conclusion.

L'hypothèse des pulsations a permis à Eddington de rendre compte des caractéristiques essentielles des Céphéides. Mais, ainsi que le remarque J. Bosler: « l'interprétation des détails nécessiterait cependant des recherches ultérieures ». Parmi ces détails, le plus frappant est certainement celui des décalages qui font l'objet de cette étude. L'hypothèse des pulsations nous ayant permis de retrouver les décalages observés, nous pensons que ce travail apporte un fait de plus en faveur de cette hypothèse.

<sup>1</sup> G. TIERCY : *loc. cit.*, p. 458.



### Table des matières.

	Pages
CHAPITRE I. — <i>Les Céphéides.</i>	
1. Données d'observation . . . . .	193
2. Hypothèses . . . . .	195
3. Les décalages . . . . .	196
CHAPITRE II. — <i>L'équilibre radiatif dans les étoiles.</i>	
1. Equilibres polytropiques . . . . .	197
2. Equilibre radiatif . . . . .	199
CHAPITRE III. — <i>Les sphères pulsantes.</i>	
1 <sup>re</sup> partie :	
1. Notations. Equations fondamentales . . . . .	202
2. Calcul de la pression . . . . .	204
2 a. Développement de la fonction $\varphi(\kappa)$ . . . . .	206
2 b.       »       »       » $\Phi_1(\kappa)$ . . . . .	207
2 c.       »       »       » $\Phi_2(\kappa)$ . . . . .	208
2 d.       »       »       » $\Phi_3(\kappa)$ . . . . .	209
2 <sup>e</sup> partie :	
3. Calcul de la pression dans le cas d'une pulsation du type (43) . . . . .	211
4. Calcul de $P_1$ . . . . .	215
CHAPITRE IV. — <i>Etude de S Sagittae, N' = 0.</i>	
1. Introduction des données d'observation . . . . .	219
2. Première hypothèse . . . . .	221
2 a. Calcul de $N_i$ et de $N'_i$ . . . . .	222
2 b. Calcul des décalages . . . . .	223
3. Deuxième hypothèse . . . . .	225
4. Troisième hypothèse . . . . .	227
5. Remarque . . . . .	228
CHAPITRE V. — <i>Etude de W Sagittarii, N' ≠ 0.</i>	
1. Introduction des données d'observation . . . . .	229
2. Premier calcul . . . . .	230
3. Deuxième calcul . . . . .	232
REMARQUES FINALES.	
1. Le rapport $\frac{b}{a}$ . . . . .	233
2. La couche périphérique . . . . .	234
3. Conclusion . . . . .	235