

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaften beider Basel  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Basel ; Naturforschende Gesellschaft Baselland  
**Band:** 1 (1995)

**Artikel:** Das Phänomen der Zeitgleichung  
**Autor:** Müller, Markus / Müller, Andreas  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-676657>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Das Phänomen der Zeitgleichung

MARKUS MÜLLER, ANDREAS MÜLLER

**Abstract:** The apparent solar motion is not uniform and the length of a solar day is not constant throughout a year. The difference between apparent solar time and mean (regular) solar time is called the equation of time. Two well-known features of our solar system lie at the basis of the periodic irregularities in the solar motion: The angular velocity of the earth relative to the sun varies periodically in the course of a year. The plane of the orbit of the earth is inclined with respect to the equatorial plane. Therefore, the angular velocity of the relative motion has to be projected from the ecliptic onto the equatorial plane before incorporating it into the measurement of time. The mathematical expression of the projection factor for ecliptic angular velocities yields an oscillating function with two periods per year. From both results the equation of time is obtained.

The difference between the extreme values of the equation of time is about half an hour. The response of the equation of time to a variation of its key parameters is analyzed. In order to visualize factors contributing to the equation of time a model has been constructed which accounts for the elliptical orbit of the earth, the periodical changing angular velocity, and the inclined axis of the earth.

**Zusammenfassung:** Der scheinbare Lauf der Sonne ist nicht gleichförmig, und die Länge eines Sonnentages variiert während eines Jahres. Die daraus resultierende Differenz zwischen wahrer Ortszeit (Sonnenszeit) und mittlerer Ortszeit nennt man Zeitgleichung. Sie ist auf zwei bekannte Eigenschaften unseres Sonnensystems zurückzuführen: Erstens schwankt die Winkelgeschwindigkeit der Erde bezüglich der Sonne mit der Periode von einem Jahr. Andererseits ist die Ebene der Erdumlaufbahn gegenüber der Äquatorebene geneigt. Daher muss die Relativbewegung von Sonne und Erde auf die Äquatorebene projiziert werden, bevor sie in die Zeitmessung einbezogen werden kann. Der mathematische Ausdruck, der den Projektionsfaktor für Winkelgeschwindigkeiten auf der Ekliptik beschreibt, ist eine sinusähnliche Funktion mit zwei Perioden pro Jahr. Aus beiden Faktoren kann die Zeitgleichung berechnet werden.

Die Differenz der Extremwerte, die die Zeitgleichung annimmt, beträgt ungefähr eine halbe Stunde. Die Abhängigkeit der Zeitgleichung von ihren Parametern wird nach der Herleitung einer allgemeinen Formel untersucht. Zur Veranschaulichung der oben genannten Ursachen haben wir ein Modell gebaut, das sowohl die elliptische Umlaufbahn der Erde als auch die ändernde Winkelgeschwindigkeit und die Neigung der Erdachse berücksichtigt.

## Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	90
Vorwort	91
Danksagung	91
Zusammenfassung	92
Teil 1	
1. Einführung	
1.1. Über die Zeitbestimmung	92
1.2. Die Periodizitäten im scheinbaren Lauf der Sonne	94
1.3. Die Zeitgleichung	96
2. Die variierende Geschwindigkeit der Erde	
2.1. Die Bewegung der Planeten	96
2.2. Die Berechnung der Planetenbahnen	97
2.3. Die Keplerschen Gesetze	102
3. Die Schiefe der Ekliptik	
3.1. Die Erde im Raum	107
3.2. Die Projektion des Sonnenwinkels	108
4. Die Berechnung der Zeitgleichung	
4.1. Eine einfache Näherung	111
4.2. Ableitung einer genaueren Näherung	113
4.3. Die Zeitgleichung in Abhängigkeit ihrer Parameter	117
Teil 2	
5. Das Modell	
5.1. Einleitung	119
5.2. Die Erdumlaufbahn	119
5.3. Die Rotation	121
5.4. Die Schiefstellung der Erdachse um $23,5^\circ$	123
5.5. Das Modellgehäuse	127
Literaturverzeichnis	129
Anhang	129

## Vorwort

Im Februar 1993 machte mein Biologielehrer Dr. Bernardo J. Gut beiläufig auf das Phänomen der Zeitgleichung aufmerksam und regte mich zu einer genaueren Untersuchung dieser Erscheinung an. Nachdem ich die wesentlichen Elemente der Zeitgleichung gefunden und ein erstes Computerprogramm zu ihrer quantitativen Berechnung geschrieben hatte, machte Herr Gut den Vorschlag, diese Erscheinung ausführlicher zu dokumentieren und eventuell ein Modell zur Veranschaulichung zu bauen. Ich übernahm die mathematisch-theoretische Herleitung, wobei mir eine möglichst eigenständige Entwicklung ein besonderes Anliegen war, um dem Forschungsgedanken auch Rechnung zu tragen. Dementsprechend ist das Literaturverzeichnis auch nicht sehr umfangreich. Für die Konstruktion eines Modelles war hauptsächlich mein Bruder Andreas zuständig. Den Bericht verfassten wir gemeinsam.

Im Interesse der Verständlichkeit achteten wir darauf, den Text möglichst gut bildlich zu illustrieren. Aus diesem Grund ist der Umfang des Projektberichts etwas grösser geworden.

Text und Bilder sind mit Hilfe des Programms Microsoft Word 5.1, die Graphiken mit Microsoft QuickBasic auf einem Apple Macintosh IIvx erstellt worden.

Markus Müller,  
Oktober 1993

## Danksagung

Besonders wollen wir Herrn Dr. B. J. Gut danken, der uns den Ansporn gab, dieses interessante Problem selbständig zu erarbeiten und zu dokumentieren, und uns mit Literatur zur Zeitgleichung und zahlreichen Ratschlägen zur Arbeit unterstützte. Wir schätzten sein Engagement für unser Projekt sehr.

Herrn M. Knecht und Herrn R. von Salis danken wir für die eingehende Durchsicht der Arbeit. Besonders Herrn von Salis, der sich als Experte zur Verfügung gestellt hat, verdanken wir viele nützliche Hinweise zu astronomischen Begebenheiten.

Andreas und Markus Müller,  
Oktober 1993

## Zusammenfassung

### *Das Phänomen der Zeitgleichung*

Im Schulunterricht wurden wir darauf aufmerksam gemacht, dass die Sonne kaum einmal genau um zwölf Uhr ihren Höchststand einnimmt, beziehungsweise dass die Zeitspanne von Sonnenaufgang bis zwölf Uhr meist nicht genau jener von zwölf Uhr bis Sonnenuntergang entspricht, auch dann nicht, wenn man die Uhrzeit auf die (mittlere) Ortszeit (siehe Bild 1.1) berichtigt. Das beruht darauf, dass der scheinbare Lauf der Sonne nicht ganz regelmässig ist. Die so auftretende Differenz zwischen  $\langle$ Sonnenzeit $\rangle$  (Zeitangabe einer Sonnenuhr) und mittlerer Ortszeit nennt man Zeitgleichung. Unsere Arbeit beschäftigt sich mit den Ursachen und dem Ausmass dieser Erscheinung.

Im ersten Teil leiten wir dieses Phänomen auf eigene Weise mathematisch her und diskutieren das Ergebnis. Der unregelmässige Lauf der Sonne ist auf folgende zwei Ursachen zurückzuführen:

1. Nach dem Flächensatz von Kepler variiert die Winkelgeschwindigkeit der Erde bezüglich der Sonne innerhalb eines Jahres. Die Keplerschen Gesetze leiten wir durch eine eigenhändige Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen her. Anschliessend ermitteln wir daraus die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit. Die so gewonnene Funktion hat sinusähnlichen Charakter und weist eine Periode von einem Jahr auf.
2. Die Äquatorebene steht schief zur Ebene der Ekliptik (siehe Bild 1.2). Da die zeitrelevanten Stundenwinkel der Sonne parallel zum Äquator gemessen werden, müssen die Winkel, die scheinbar von der Sonne auf der Ekliptik zurückgelegt werden, auf die Äquatorebene normalprojiziert werden, um in die Zeitmessung einbezogen werden zu können. Die mathematische Darstellung des Projektionsfaktors eines Ekliptikwinkels auf einen Äquatorwinkel zu einem bestimmten Zeitpunkt ist hier etwas einfacher. Man erhält ebenfalls eine Funktion mit sinusförmigem Verlauf, wobei die Periodendauer ein halbes Jahr beträgt.

Die Überlagerung dieser zwei Komponenten liefert einen relativ komplizierten Ausdruck für die Zeitgleichung, welcher durch Reihenentwicklungen und Integration in guter Näherung auf zwei Glieder vereinfacht werden kann. Der Wert der Zeitgleichung erreicht im Oktober ein Maximum von +16 und im Februar ein Minimum von -14 Minuten. Im Mai und im Juli gibt es zwei relative Extrema. Viermal im Jahr stimmt die Sonnenzeit genau mit der Ortszeit überein.

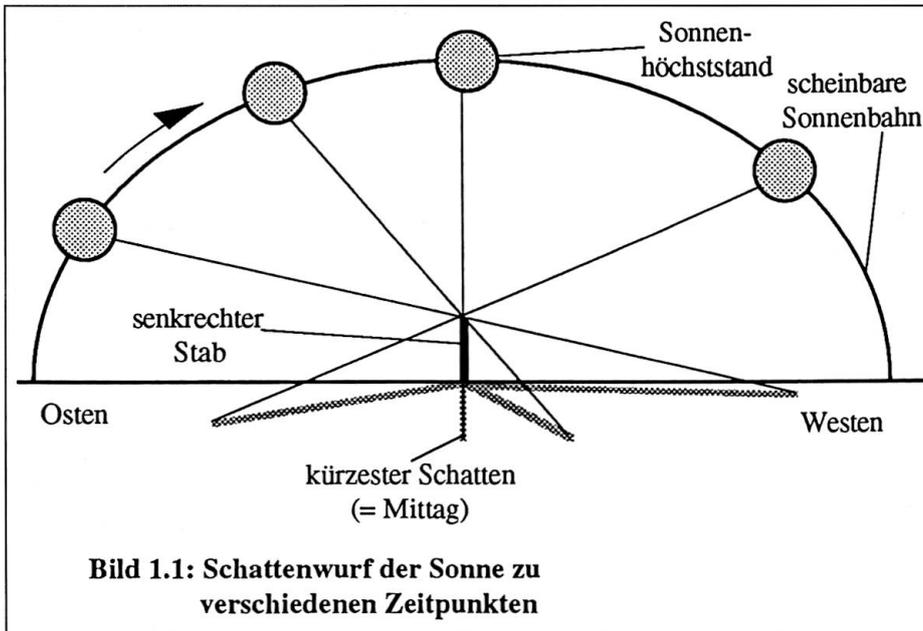
Der zweite Teil der Arbeit ist der Entwicklung eines eigens für die Veranschaulichung der Gegebenheiten im Sonnensystem konstruierten Modells gewidmet. Dieses sollte folgende Bedingungen erfüllen: Die Erde bewegt sich bezüglich der Sonne auf einer elliptischen Bahn, wobei die Lineargeschwindigkeit in Sonnennähe deutlich grösser sein sollte als jene in Sonnenferne. Ausserdem dreht sich die Erde um die eigene schief stehende Achse. Unsere Eigenkonstruktion beruht auf den folgenden mechanischen Elementen: Die elliptische Bahn ergibt sich durch entsprechende Führungsschienen, in denen die Erdachse durch einen kreisenden Stab angestossen wird. Durch die exzentrische Lage des Drehzentrums dieses Stabes erreicht man ausserdem die gewünschten Geschwindigkeitsunterschiede. Der Rotationsantrieb muss an den Revolutionsantrieb gekoppelt sein und zugleich mit der sich bewegenden Erde in Verbindung stehen, was durch eine trickreiche Kettenführung gelöst ist. Die Ekliptikschiefe ist verhältnismässig einfach durch ein Kreuzgelenk an der Erdachse verwirklicht.

## 1. Einführung

### *1.1. Über die Zeitbestimmung*

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Problem der astronomischen Zeitmessung. Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Entwicklung werden hier die Grundbegriffe der Zeitmessung kurz erläutert. Das natürlichste Mass der Zeitbestimmung ist die Rotation der Erde, die sich im täglichen scheinbaren Lauf der Sonne äussert und somit unseren Tagesablauf bestimmt. Einen Tag messen wir als Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Mittagen, wobei wir unter  $\langle$ Mittag $\rangle$  den Zeit-

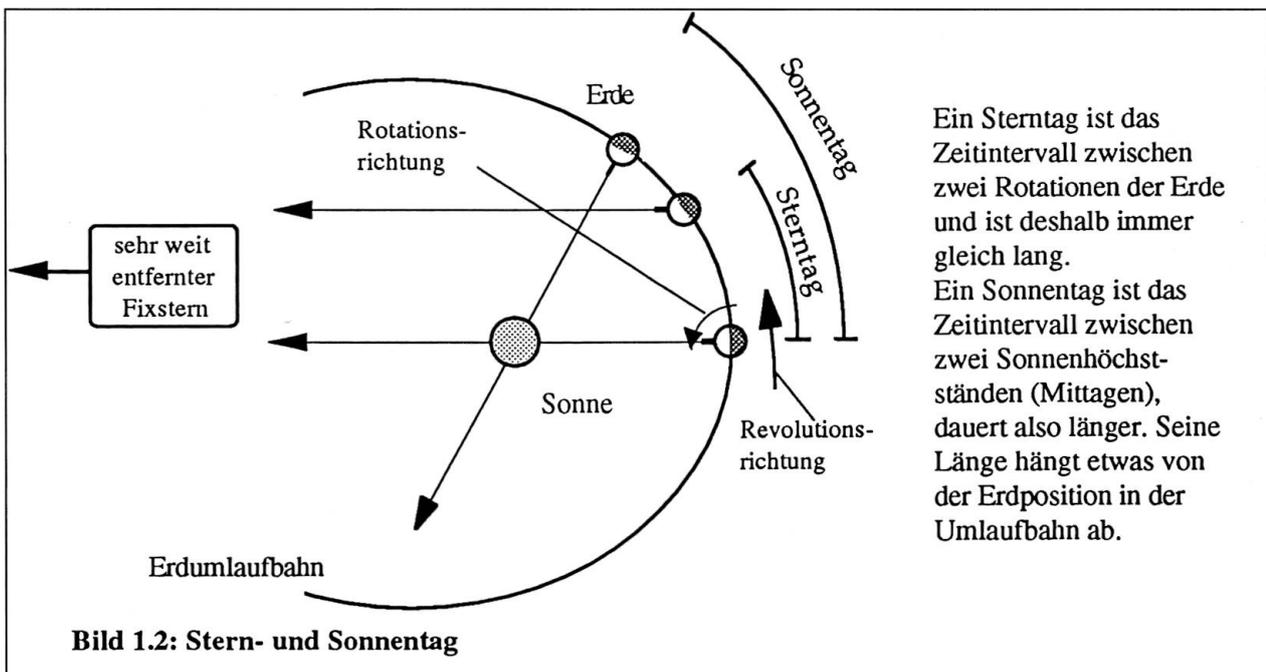
punkt verstehen, an dem die Sonne ihren Höchststand einnimmt. Dies ist zugleich der Moment, in dem ein senkrechter Stab den kürzesten Schatten wirft (Bild 1.1). Dieses Zeitintervall wird Sonnentag genannt, da sich die Messung auf die Sonne bezieht. Die Zeitangabe, für die zwölf Uhr genau Mittag ist und deren Tageslänge jeweils genau dem Sonnentag entspricht, heisst wahre Ortszeit oder auch wahre Sonnenzeit. Sie ist selbstverständlich nur für Orte auf demselben Meridian\* gleich.



Die Astronomen bedienen sich gewöhnlich für die Zeitmessung eines Fixsterns, der nachts sichtbar ist. Hierbei wird ein Tag als das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Höchstständen (Kulminationen) des Sternes definiert. Der so gemessene Sterntag ist um etwa vier Minuten kürzer als der Sonnentag, da durch den jährlichen Umlauf der Erde um die Sonne eine Rotation der Erde aufgewogen wird. (Die Erde dreht sich zwar 366mal, die Sonne

macht aber nur 365mal ihren scheinbaren Lauf.) Die Zeitmessung, die auf dem Sterntag als Zeiteinheit beruht, heisst Sternzeit.

Vergleicht man Stern- und Sonnenzeit, so stellt man aber nicht eine linear wachsende Abweichung fest. Vielmehr unterliegt die Sonnenzeit periodischen Schwankungen, d.h. die Sonne bewegt sich nicht gleichmässig am Himmel. Auch die Länge des Sonnentages ist nicht konstant. Aus praktischen



Ein Sterntag ist das Zeitintervall zwischen zwei Rotationen der Erde und ist deshalb immer gleich lang. Ein Sonnentag ist das Zeitintervall zwischen zwei Sonnenhöchstständen (Mittagen), dauert also länger. Seine Länge hängt etwas von der Erdposition in der Umlaufbahn ab.

\* Längskreis der Erde.

Gründen richten wir uns heute nach Uhren, denen ein streng periodischer Vorgang zugrunde liegt (z.B. Quarz-, Atomuhr). Die Zeiteinheit ist aber so gewählt, dass die Zeitangabe relativ genau mit der Sonnenzeit übereinstimmt. Als Tageslänge gilt nicht mehr der wahre Sonnentag, sondern das Mittel der Tageslängen in einem Jahr, der sogenannte mittlere Sonnentag. Die auf diese Weise festgelegte Zeitangabe heisst mittlere Sonnenzeit, im Gegensatz zur oben beschriebenen wahren Sonnenzeit (auf einem bestimmten Meridian entsprechend wahre und mittlere Ortszeit). Die Differenz dieser beiden Zeitwerte wird Zeitgleichung genannt. Sie beträgt im Februar ungefähr  $-14$  Minuten, im November ungefähr  $+16$  Minuten! Ihr wollen wir uns in dieser Arbeit widmen.

Um den Reise- und Geschäftsverkehr zu erleichtern, hat man die ganze Welt in Zeitzonen mit jeweils gleicher Zeit eingeteilt. Abgesehen von einigen Ausnahmen, wie zum Beispiel Japan oder Indien, gilt für zwei benachbarte Zeitzonen, dass die Zeitangabe der östlichen gegenüber jener der westlichen Zone um eine Stunde fortgeschritten ist. Diese Bestimmung und die zusätzliche Einführung von Sommer- und Winterzeit führen dazu, dass das Phänomen der Zeitgleichung im Alltag übersehen wird, denn die Uhren zeigen nicht die Ortszeit, sondern diejenige eines ausgezeichneten Meridians\* an.

Es scheint nun so, als ob die Zeitgleichung nur für das Ablesen von Sonnenuhren oder die Kenntnis des genauen Sonnenstandes von Bedeutung wäre. Dem ist aber nicht so: Durch exakte Sonnenbeobachtungen kann auf die genaue Bewegung der Erde im Sonnensystem geschlossen werden. Einige Parameter, insbesondere die Schiefe der Ekliptik und die Exzentrizität der Erdumlaufbahn, können aufgrund genauer Analysen des Zeitgleichungsverlaufes bestimmt werden, da sich die Unregelmässigkeiten in der wahren Sonnenzeit von ihnen herleiten. Zudem können Einwirkungen anderer Planeten auf die Erdbahn schliesslich auch nur auf diese Weise experimentell nachgewiesen und überprüft werden.

Im Folgenden wird die Zeitgleichung in Abhängigkeit der oben genannten zwei Parameter hergeleitet. Es wird sich zeigen, wie sie den scheinbaren Lauf der Sonne beeinflussen und wie ihre Werte aus der Sonnenbeobachtung ermittelt werden können. Anschliessend wird ein Modell zur Veranschaulichung der Situation im Sonnensystem entwickelt.

### 1.2. Die Periodizitäten im scheinbaren Lauf der Sonne

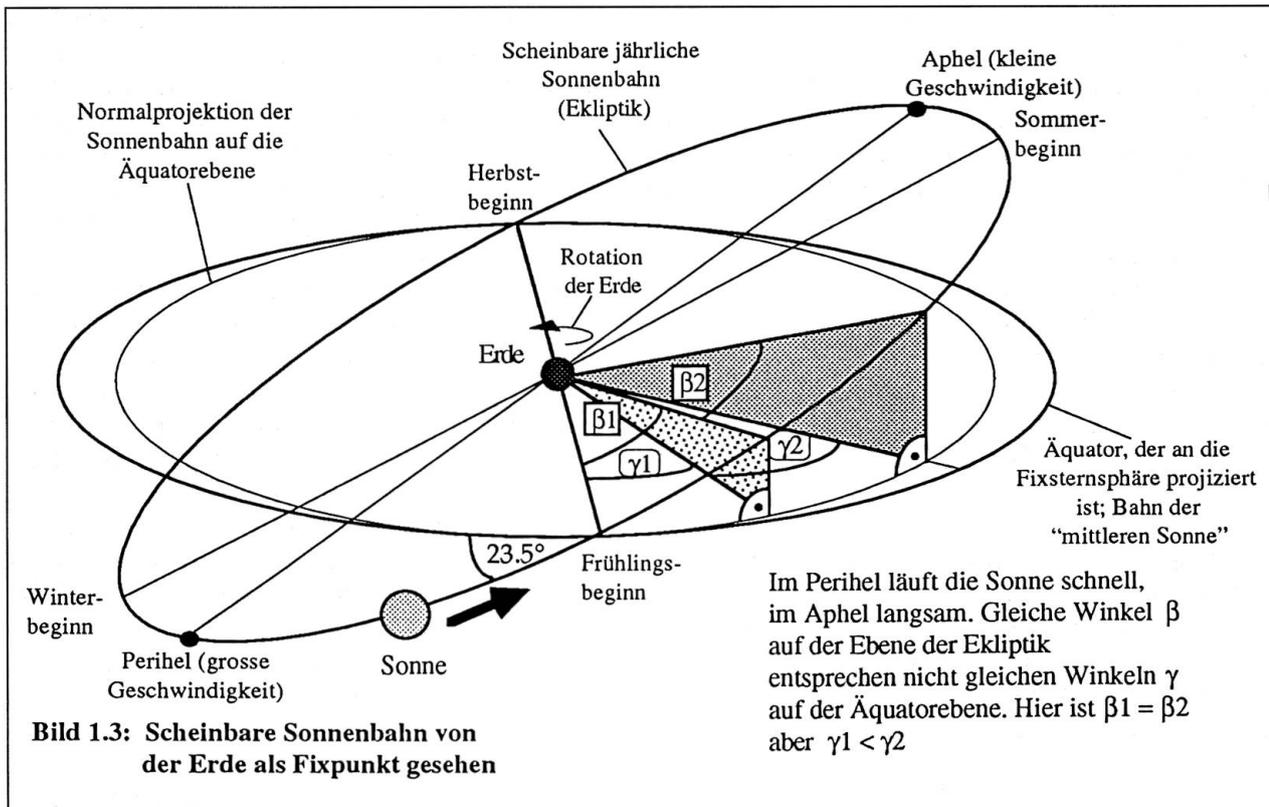
Wie kommt es nun eigentlich, dass die Sonne nicht regelmässig auf- und untergeht, sondern in ihrer Bahn ziemlich grosse Schwankungen aufweist? Dieses Phänomen hat zweierlei Gründe:

1. Einerseits bewegt sich die Erde im Verlaufe einer Umdrehung um die Sonne – einer sogenannten Revolution – nicht immer mit derselben Bahngeschwindigkeit. Im Winter beträgt diese ungefähr  $31\text{km/s}$ , im Sommer dagegen nur  $29\text{km/s}$ , weil die Erde nicht immer gleich weit von der Sonne entfernt ist. Denn wenn sich die Erde der Sonne nähert, wird sie von der Gravitationskraft beschleunigt, entfernt sie sich, wird sie gebremst. Wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Erde ist übrigens der Nordsummer um etwa 7 Tage länger als der Nordwinter (siehe Kapitel 2).
2. Der bedeutendere zweite Faktor rührt von der sogenannten Schiefe der Ekliptik her, die auch die Jahreszeiten verursacht. Die Ekliptik ist die Bahn, die die Sonne innerhalb eines Jahres gegenüber der Fixsternsphäre\*\* beschreibt. Die Ebene dieser Bahn schliesst mit der Ebene des Äquators einen Winkel von  $23\frac{1}{2}^\circ$  ein (Bild 1.3).

---

\* Unsere Zeit bezieht sich auf den Meridian  $15^\circ$  östlicher Länge (Winterzeit), im Sommer eigentlich auf  $30^\circ$  öL  $\rightarrow$  Mitteleuropäische Zeit.

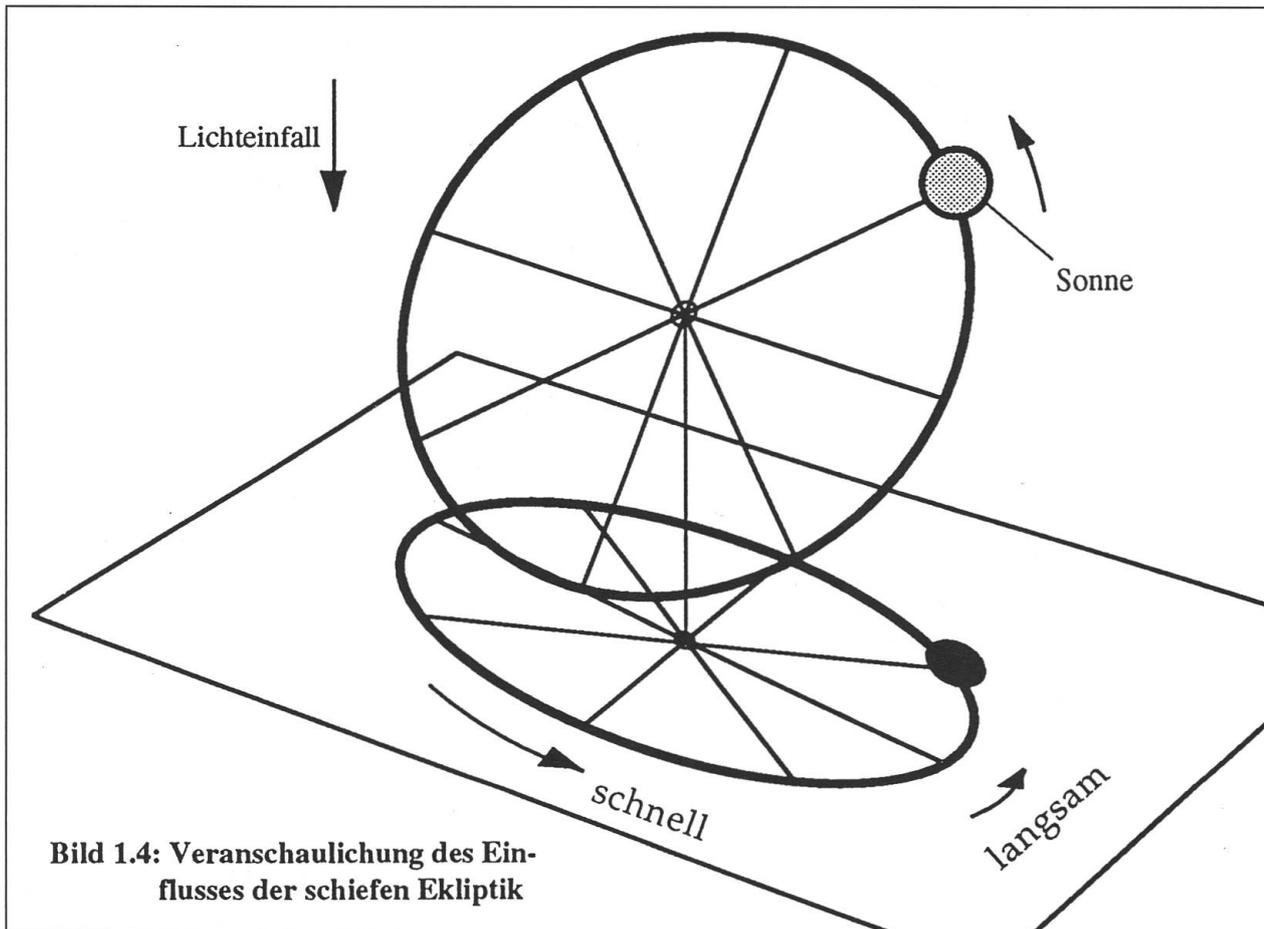
\*\* Die Fixsternsphäre ist der Sternenhimmel, der sich nur aufgrund der Rotation der Erde zu drehen scheint. Da die Sonne der Erde viel näher ist und von ihr im Jahr einmal umkreist wird, haben wir das Gefühl, die Sonne wandere gegenüber den Fixsternen von Westen nach Osten.



Dies hat zur Folge, dass gleiche Winkel, die die Sonne auf ihrer zum Äquator geneigten Bahn am Himmel zurücklegt, nicht gleichen Winkeln entsprechen, die wir parallel zur Äquatorebene messen und die für die Zeitbestimmung massgebend sind. In Bild 1.3 ist die Situation verdeutlicht: Auf der nördlichen Halbkugel haben wir den Eindruck, die Sonne vollführe einmal im Jahr relativ zum Fixsternhimmel eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn. Dabei steht sie einmal nördlicher, einmal südlicher. Wir messen ihre Position in Horizontalwinkel, auch Stundenwinkel genannt parallel zum Äquator (in Bild 1.3:  $\gamma_1$ ) und in Vertikalwinkel senkrecht zur Äquatorebene (in Bild 1.3: Spitze Winkel der schraffierten Dreiecke). Die Zeit definieren wir wie schon erwähnt anhand der Rotation der Erdachse, denn durch sie scheint die Sonne regelmässig ihren Horizontalwinkel bezüglich eines festen Punktes auf dem Äquator zu ändern, d.h. sie wandert von Ost nach West. Dem überlagert sich nun aber die jährliche Bewegung der Sonne im entgegengesetzten Sinn. Deshalb muss ein auf der schrägen Ekliptikebene liegender Winkel in Horizontal- und Vertikalwinkel konvertiert werden, wobei aus Bild 1.3 folgt, dass die Horizontalwinkel  $g$  sich nicht gleichmässig mit den schrägen Winkeln  $b$  ändern. Folglich wäre die wahre Sonnenzeit auch kein regelmässiges Zeitmass, wenn die Sonne ihre Bahn mit stetiger Geschwindigkeit abliefe (siehe Kapitel 3).

Den Effekt durch die schräge Ekliptik kann man sich auch wie folgt veranschaulichen:

Man denke sich die Sonne am Ende einer Speiche eines langsam, aber gleichmässig drehenden Rades, das geneigt zum Untergrund aufgehängt ist, der die Projektionsebene des Äquators widerspiegelt (Bild 1.4). Das Licht, das senkrecht auf den Untergrund einfällt, wirft einen elliptischen Schatten des Rades. Läge das Rad parallel zur Unterlage, so würde sich der Schatten der Sonne regelmässig bewegen. Da aber das Rad eine schiefe Lage einnimmt, bewegt sich der Sonnenschatten an den Hauptscheiteln der Ellipse langsam und im Bereich der Nebenscheiteln ziemlich schnell. Hinzu kämen nun noch die oben angedeuteten Schwankungen in der Drehgeschwindigkeit des Rades, die die Projektionsunterschiede überlagern.



### 1.3. Die Zeitgleichung

Es gilt nun, die zwei erkannten Periodizitäten der scheinbaren Sonnenbewegung zu untersuchen und ein möglichst einfaches Verfahren anzugeben, durch das der Wert der Zeitgleichung ermittelt werden kann. Die Zeitgleichung ist definiert als die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Ortszeit, häufig auch kurz WOZ - MOZ (Wahre Ortszeit / Mittlere Ortszeit) geschrieben. Ist ihr Wert für einen Zeitpunkt bekannt, so erhält man die wahre Ortszeit durch Addition des Zeitgleichungswerts zur mittleren Ortszeit – der jeweiligen Uhrzeit – bzw. die mittlere Ortszeit resultiert aus der Differenz von wahrer Ortszeit und Zeitgleichungswert.

$$\text{Zeitgleichungswert} = \text{WOZ} - \text{MOZ}$$

## 2. Die variierende Geschwindigkeit der Erde

### 2.1. Die Bewegung der Planeten

Nachdem wir oben die zwei ausschlaggebenden Faktoren der Zeitgleichung identifiziert haben, sollen sie nun mathematisch formuliert und ausgewertet werden. Zunächst gilt es, die Behauptung, dass die Erde in ihrer Umlaufbahn um die Sonne (Revolution) keine konstante Geschwindigkeit habe, auf eine solide Basis zu stellen. Dazu müssen wir uns mit der Planetenbewegung auseinandersetzen, die

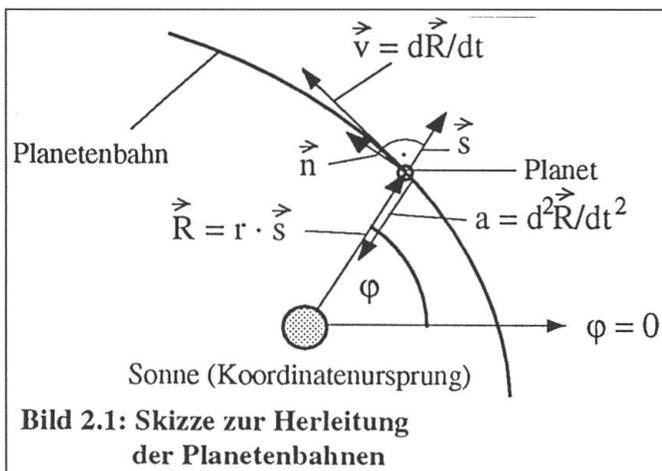
besonders von Johannes Kepler (1571-1630) untersucht wurde. Die drei Gesetze\* Keplers, die die Bahnen und Bewegungen der Planeten beschreiben, konnten später von Isaac Newton (1643-1727) aus der von ihm entdeckten Gravitationskraft\*\* abgeleitet werden. Die allgemeine Relativitätstheorie\*\*\* von Albert Einstein (1879-1955) brachte zwar einen Wandel in der Anschauung, doch sind die an Newtons Resultaten anzubringenden Korrekturen so klein, dass sie für uns nicht von Interesse sind. Im folgenden sollen also die Keplerschen Gesetze auf der Grundlage des Gravitationsgesetzes hergeleitet werden. Dieses besagt, dass zwei Körper sich mit einer Kraft anziehen, die direkt proportional zu ihren Massen und indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes der Körper ist. Denn gemäss einem Modell von M. Faraday nimmt man an, dass das Gravitationsfeld durch Ausenden von Kraftträgerteilchen der Masse entsteht. In jeder Kugelschale mit Zentrum in der aussendenden Masse muss zu jeder Zeit ein konstanter Betrag solcher Teilchen vorhanden sein. Demnach nimmt die Teilchendichte und damit die Kraftstärke proportional zur Schalenfläche, also zum Radiusquadrat ab.

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Dabei ist:

- $\vec{F}$  die Gravitationskraft
- $G$  die Gravitationskonstante ( $\approx 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nkg}^2/\text{m}^2$ )
- $m_1$  die eine Masse, nachher  $m = \text{Planetenmasse}$
- $m_2$  die andere Masse, nachher  $m_S = \text{Sonnenmasse}$
- $\vec{r}$  der Vektor Sonne-Planet,  $r = |\vec{r}|$

## 2.2. Die Berechnung der Planetenbahnen



In einem Zentralkraftfeld benutzen wir vorzugsweise die Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  des Planeten in Bezug auf die Sonne, die wir als fest im Koordinatenursprung annehmen (Bild 2.1). Eine dritte Dimension ist unnötig, da die Umlaufbahn in einer Ebene liegt.  $\mathbf{R}$  steht für den Vektor Sonne-Erde mit der Länge  $r$  und der Richtung  $\varphi$ .  $\mathbf{s}$  ist der Einheitsvektor in Richtung von  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{n}$  ist der Einheitsvektor orthogonal zu  $\mathbf{s}$ . Die Gravitationskraft wirkt in entgegengesetzter Richtung von  $\mathbf{R}$ , ist also ein Vielfaches des Vektors  $\mathbf{s}$ . Der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  ist tangential zur Planetenbahn. Er ist die erste Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{R}$  nach der Zeit. Die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  ist nach

dem Gravitationsgesetz antiparallel zu  $\mathbf{R}$ . Sie entspricht der zweiten Ableitung von  $\mathbf{R}$  nach der Zeit.

\* Von Kepler publiziert in «Astronomia nova» (1609) und «Harmonice mundi libri V» (1619).

\*\* Von Newton veröffentlicht in «Philosophiae naturalis principia mathematica» (1687).

\*\*\* Von Einstein begründet 1914/15.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \dot{r} = \frac{dr}{dt}; \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}; \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ gesetzt ist.}$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi - \dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi + \dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} = \mathbf{s} \cdot (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \mathbf{n} \cdot (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$$

$$\text{mit } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom und dem Gravitationsgesetz gilt:

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{s} \cdot \frac{-G \cdot m_s}{r^2} \quad \left( \begin{array}{l} \mathbf{a} = \text{Beschleunigung; } \mathbf{F} = \text{Gravitationskraft; } G = \text{Gravitationskonstante} \\ m_s = \text{Sonnenmasse; } m = \text{Planetenmasse} \end{array} \right).$$

Wir ersetzen die zweite Ableitung von  $\mathbf{R}$  wie oben:

$$\mathbf{s} \cdot \frac{-G \cdot m_s}{r^2} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{s} \cdot (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \mathbf{n} \cdot (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$$

Skalare Multiplikation mit  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{n}$  liefert

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{-G \cdot m_s}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \end{array} \right|, \quad \text{da } \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1; \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad \begin{array}{l} (1a) \\ (1b) \end{array}$$

(siehe Bild 2.1: die Kraft wirkt nur in Richtung Planet-Sonne)

Gleichung 1b lässt sich einfach integrieren:

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2\frac{\dot{r}}{r}.$$

Wir substituieren folgendermassen:

$$u = \ln \dot{\varphi}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}, \quad v = \ln r, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\dot{r}}{r} \quad \text{und erhalten damit}$$

$$\frac{du}{dt} = -2\frac{dv}{dt}. \quad \text{Wir integrieren nach } dt \text{ und erhalten:}$$

$$u = -2v + \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \ln \dot{\varphi} + 2 \ln r = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad r^2 \dot{\varphi} = e^{\text{const.}} = C = \frac{L}{m}.$$

Dieses Resultat ist nichts anderes als der bekannte Satz der Erhaltung des Drehimpulses. Denn wenn man mit der Masse multipliziert,

$$\text{erhält man gerade den Drehimpuls. } \left( L = |\mathbf{R} \times \mathbf{p}| = m|\mathbf{R} \times \mathbf{v}| = m|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}| = m[r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)] = mr^2 \dot{\varphi} \right)$$

$$r^2 \dot{\varphi} m = L \quad \left( L: \text{Drehimpuls, } m: \text{Planetenmasse, } \dot{\varphi}: \text{momentane Winkelgeschwindigkeit} \right) \quad (2)$$

Gleichung 1a ist schwieriger zu lösen. Wir ersetzen zuerst  $\dot{\varphi}$  durch den eben gefundenen Drehimpuls  $\left(\dot{\varphi} = \frac{L}{m \cdot r^2}\right)$ .

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r \frac{L^2}{m^2 r^4} = \frac{-Gm_S}{r^2} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{Gm_S}{r^2} .$$

Nun multiplizieren wir mit  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$

$$\ddot{r} \cdot \dot{r} = \left( \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{Gm_S}{r^2} \right) \cdot \dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{r}^2}{2} \right) = \left( \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{Gm_S}{r^2} \right) \cdot \frac{dr}{dt}$$

und integrieren nach  $dt$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \int \left( \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{Gm_S}{r^2} \right) \cdot \frac{dr}{dt} \cdot dt = \int \left( \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{Gm_S}{r^2} \right) \cdot dr = -\frac{L^2}{2m^2 r^2} + \frac{Gm_S}{r} + \text{const.} \quad (3)$$

Die Integrationskonstante bestimmen wir am besten mit der Energie des Systems :

$$E = E_K + E_P = m \frac{v^2}{2} - \frac{Gm_S m}{r} , \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned} v^2 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} = (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} . \end{aligned}$$

Damit wird

$$E = \frac{m}{2} \cdot \left( \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{Gm_S m}{r} \text{ oder } \dot{r}^2 = 2 \frac{Gm_S}{r} + 2 \frac{E}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} .$$

Dieses Resultat ist identisch mit Gleichung (3), wenn man  $\text{const.} = \frac{E}{m}$  setzt.

Da wir an der Abhängigkeit zwischen  $r$  und  $\varphi$  interessiert sind, eliminieren wir die Zeit, indem wir setzen

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{L}{mr^2} .$$

Dies setzen wir in der eben gewonnenen Gleichung ein

$$\dot{r}^2 = \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \cdot \frac{L^2}{m^2 r^4} = 2 \frac{Gm_S}{r} + 2 \frac{E}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} .$$

Durch Wurzelziehen erhält man

$$\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{L}{mr^2} = \sqrt{\frac{2Gm_S m^2 r + 2Emr^2 - L^2}{m^2 r^2}} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{L} \sqrt{2Gm_S m^2 r + 2Emr^2 - L^2} .$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int d\varphi = \int \frac{L}{r\sqrt{2Gm_s m^2 r + 2Emr^2 - L^2}} dr$$

$$\varphi + \omega = \int \frac{L}{r\sqrt{2Gm_s m^2 r + 2Emr^2 - L^2}} dr \quad (\omega = \text{const.}) .$$

Um den Faktor  $r$  im Nenner zum Verschwinden zu bringen und alleine eine Wurzel aus einer quadratischen Funktion zu erhalten, substituieren wir

$$z = \frac{1}{r} , \quad dz = -\frac{1}{r^2} dr \Rightarrow dr = -r^2 dz = -\frac{dz}{z^2} .$$

Nun ist

$$\varphi + \omega = \int \frac{-Lz}{z^2 \sqrt{\frac{2Gm_s m^2}{z} + \frac{2Em}{z^2} - L^2}} dz$$

$$= \int \frac{-1}{\sqrt{\frac{2Gm_s m^2}{L^2} z + \frac{2Em}{L^2} - z^2}} dz = \int \frac{-1}{\sqrt{\frac{2Em}{L^2} - \left(z - \frac{Gm_s m^2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{Gm_s m^2}{L^2}\right)^2}} dz$$

Diesen Integranden schreiben wir vereinfacht mit

$$a = \frac{Gm_s m^2}{L^2} , \quad n = \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{Gm_s m^2}{L^2}\right)^2} = \frac{Gm_s m^2}{L^2} \sqrt{\frac{2EL^2}{G^2 m_s^2 m^3} + 1} .$$

$$\varphi + \omega = \int \frac{-1}{\sqrt{n^2 - (z - a)^2}} dz = \text{Arccos}\left(\frac{z - a}{n}\right)$$

$$\varphi + \omega = \text{Arc cos} \left( \frac{\frac{1}{r} - \frac{Gm_s m^2}{L^2}}{\frac{Gm_s m^2}{L^2} \sqrt{\frac{2EL^2}{G^2 m_s^2 m^3} + 1}} \right) = \text{Arc cos} \left( \frac{\frac{1}{r} \frac{L^2}{Gm_s m^2} - 1}{\sqrt{\frac{2EL^2}{G^2 m_s^2 m^3} + 1}} \right) . \quad (4)$$

Umgeformt ergibt dies

$$\frac{1}{r} = \frac{Gm_s m^2}{L^2} \left\{ 1 + \cos(\varphi + \omega) \sqrt{\frac{2EL^2}{G^2 m_s^2 m^3} + 1} \right\} . \quad (5)$$

Die letzte Gleichung lässt sich kurz in der Form  $\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\varphi + \omega)}{p}$  schreiben, der allgemeinen

Kegelschnittgleichung in Polarkoordinaten in Bezug auf einen Brennpunkt als Ursprung

$r, \varphi$	Polarkoordinaten des Planets bezüglich der Sonne.
$e = \sqrt{\frac{2EL^2}{G^2 m_s^2 m^3} + 1}$	Exzentrizität des Kegelschnitts.
$p = \frac{L^2}{Gm_s m^2}$	Halbparameter des Kegelschnitts.
$\omega$	Winkel zwischen der grossen Halbachse des Kegelschnitts und der Nullrichtung des Koordinatensystems.

Im Folgenden wird  $\omega = 0$  gesetzt.

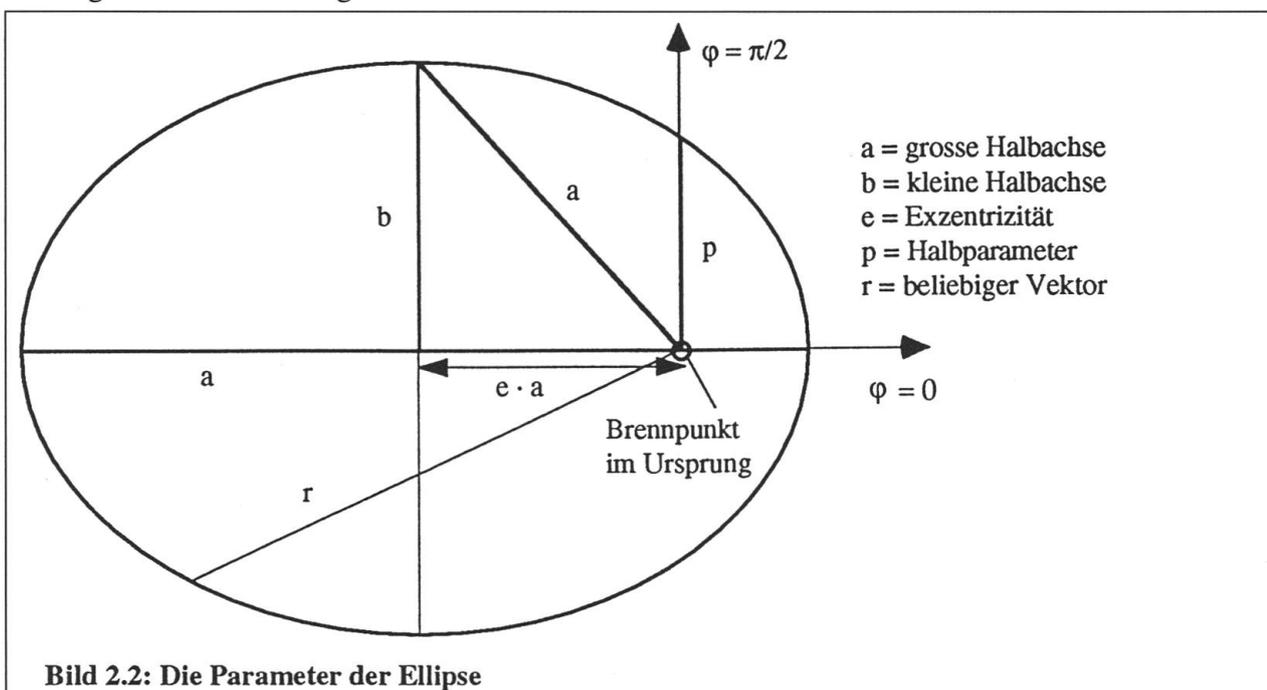


Bild 2.2 verdeutlicht die Bedeutung der Parameter: ( $\omega = 0$ )

Die (numerische) Exzentrizität bestimmt die Art des Kegelschnitts: Im Bild ist  $e < 1$ , es entsteht eine Ellipse, für  $e = 1$  erhält man eine Parabel und für  $e > 1$  Hyperbeln. Beim Spezialfall  $e = 0$  ist nach der Kegelschnittgleichung  $r = \text{const.}$ , was einen Kreis darstellt. In der Ellipse ist  $e$  der Quotient zwischen dem Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt und der langen Halbachse. Je kleiner sie ist, desto kreisähnlicher wird die Ellipse. (Für die Erde ist  $e \approx 0,0167$ ). Aus der Skizze ersieht man folgende Beziehung:

$$(e \cdot a)^2 + b^2 = a^2 \text{ bzw. } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Der Halbparameter  $p$  gibt die halbe Länge der Sehne an, die im Brennpunkt senkrecht zur grossen Halbachse steht. Für ihn gilt  $p = \frac{b^2}{a}$ .

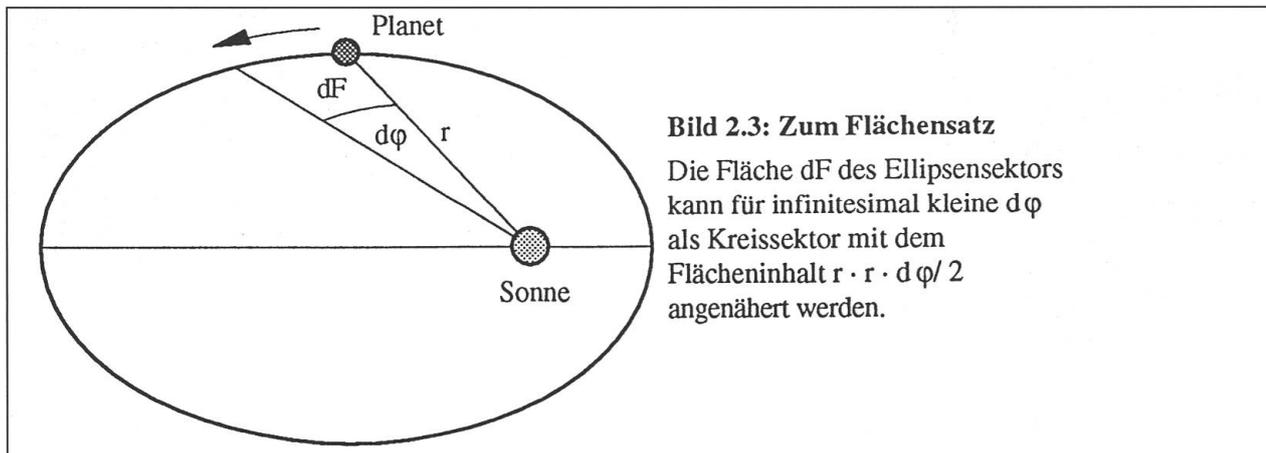
### 2.3. Die Keplerschen Gesetze

Keplers erstes Gesetz besagt, dass die Planeten sich in elliptischen Bahnen um die Sonne bewegen, wobei diese in einem der beiden Brennpunkte steht. Dies folgt unmittelbar aus Gleichung (5). Denn alle Planeten kommen nach gleichen Zeiträumen wieder an denselben Ort im Raum, was nur bei geschlossenen Kegelschnitten der Fall sein kann, also bei Kreisen oder Ellipsen. Kreise sind zwar nicht ausgeschlossen, bedingen aber, dass die Exzentrizität 0 ist und damit ganz spezielle Beziehungen zwischen Energie und Drehimpuls oder gegebenenfalls anderen Anfangsbedingungen bestehen. Diese sind für keinen der Planeten im Sonnensystem gegeben, so dass alleine Ellipsen als Bahnkurven übrigbleiben (Exzentrizität  $< 1$ ).

Das zweite Keplersche Gesetz beschreibt die Bewegungsgeschwindigkeit der Planeten. Es wird oft auch als Flächensatz bezeichnet und ist direkt aus Gleichung 2 zur Erhaltung des Drehimpulses ersichtlich:

**Die Verbindungslinie Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleich grosse Flächen. (Bild 2.3)**

(Denn das Flächenelement pro Zeiteinheit ergibt sich zu  $\frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2 \cdot m}$ , ist also konstant.)



Der Vollständigkeit halber sei noch das dritte Keplersche Gesetz erwähnt. Es beschreibt die Gemeinsamkeit der Planeten eines Sonnensystems:

Für alle Planeten eines Sonnensystems gilt  $\frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$ , wenn  $a$  die grosse Halbachse der Bahn-

ellipse und  $T$  die Umlaufzeit bedeuten. Diese Beziehung lässt sich ohne weiteres aus den obigen Gleichungen gewinnen.

Nach dem Flächensatz gilt

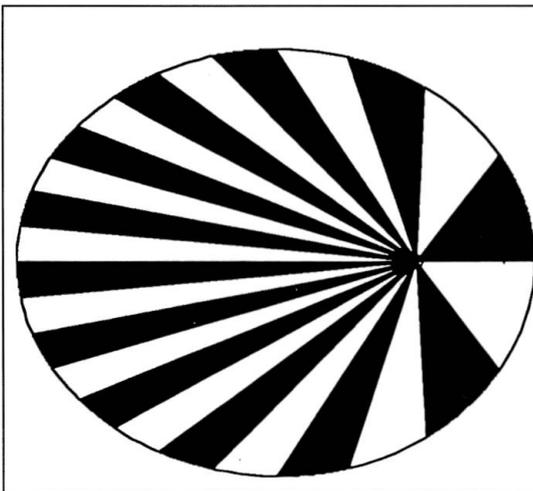
$$\frac{F_{\text{Ellipse}}}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m} \quad \text{oder} \quad T = \frac{2\pi abm}{L}, \quad \text{und damit gilt} \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{a^3 L^2}{4\pi^2 a^2 b^2 m^2} = \frac{a L^2}{4\pi^2 b^2 m^2}$$

$$\text{Mit} \quad \frac{b^2}{a} = p = \frac{L^2}{Gm_s m^2} \quad \text{erhält man schliesslich} \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{a L^2}{4\pi^2 b^2 m^2} = \frac{L^2 Gm_s m^2}{4\pi^2 m^2 L^2} = \frac{Gm_s}{4\pi^2} = \text{const.}$$

Hiermit wäre nun der eine Faktor der Zeitgleichung hinreichend mathematisch analysiert und beschrieben. Nachstehend sind die für das weitere entscheidenden Ergebnisse nochmals zusammengefasst:

- Die Planeten, insbesondere die Erde, umkreisen die Sonne in elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- In der Zeit  $t$  überstreicht der Vektor Erde-Sonne die Fläche  $\frac{t}{T} \cdot \pi a b$ .

Der zweite Punkt ist von besonderem Interesse. Aus ihm folgt, dass die Erde in Sonnennähe pro Zeiteinheit grössere Winkel zurücklegt als in Sonnenferne und sich auch mit grösserer Geschwindigkeit bewegt (siehe Bild 2.4: Die Erde wandert entlang der Ellipse, wobei sie nach gleichen Zeitabschnitten eine Sektorgrenze überschreitet). Dadurch ergeben sich unterschiedliche Winkelgeschwindigkeiten bezüglich der Sonne.



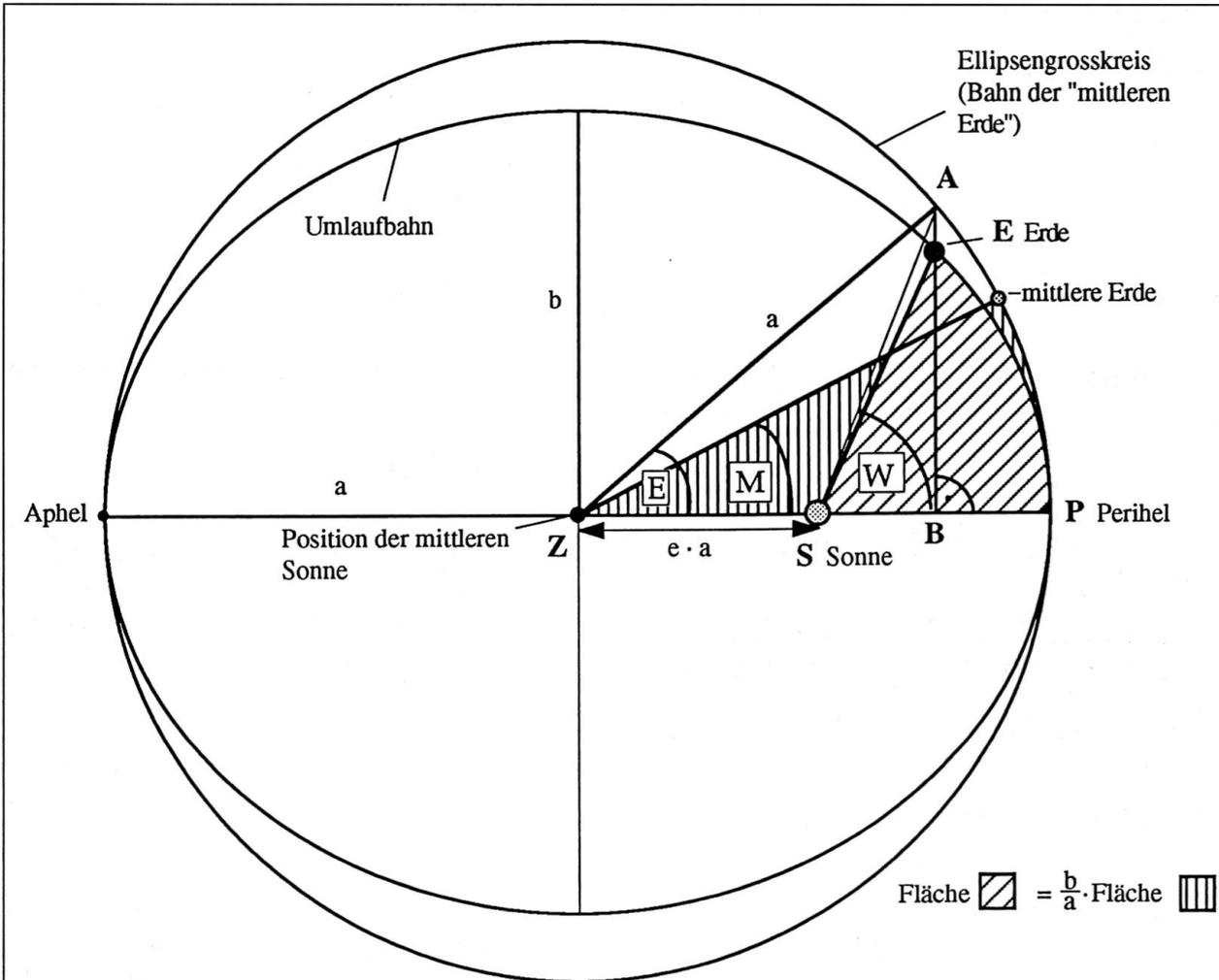
**Bild 2.4: Veranschaulichung des Flächensatzes von Kepler**

Die Verbindungslinie Sonne-Erde überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächenstücke. Im Bild bedeutet das, dass die Erde jeweils nach gleichen Zeitabschnitten die Grenze zwischen zwei Sektoren überschreitet. Daraus wird deutlich, dass die Winkelgeschwindigkeit in der Nähe der Sonne grösser ist als jene in Sonnenferne (Im Perihel, dem sonnennächsten Punkt, beträgt sie ca.  $1.02^\circ/\text{Tag}$ , im Aphel, dem sonnenfernsten Punkt, ca.  $0.95^\circ/\text{Tag}$ . Auch die Bahngeschwindigkeit ist natürlich unterschiedlich. In Wirklichkeit beträgt sie in Sonnennähe  $30.3 \text{ km/s}$  und in Sonnenferne  $29.3 \text{ km/s}$ .

Nun geht es darum, die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit darzustellen. Es hat sich historisch eingebürgert, den Winkel, den die Erde seit Periheldurchgang bezüglich der Sonne zurückgelegt hat, wahre Anomalie zu nennen (siehe [1]). Wir wollen ihn im folgenden mit  $W$  abkürzen. Der Winkel, den die Erde in der gleichen Zeit zurückgelegt hätte, wenn sie sich das ganze Jahr hindurch mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit fortbewegen würde, wird mittlere Anomalie genannt. Wir bezeichnen ihn hier mit  $M$ . In Bild 2.5 ist  $M$  von der Mitte der Ellipse aus abgetragen, da man sich für die fiktive mittlere Sonnenzeit die Sonne in der Mitte einer kreisförmigen Umlaufbahn denken muss, auf der sich die Erde mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Der Winkel  $M$  ist also direkt

$$M = \frac{t}{T} \cdot 2\pi \quad , \quad \text{wobei } T \text{ die Umlaufzeit ist.}$$

Es hat sich gezeigt, dass es viel Rechenarbeit erspart, wenn man einen weiteren Winkel einführt, sozusagen als Zwischenglied zwischen wahrer und mittlerer Anomalie (Bild 2.5). Er ist folgendermassen definiert: Der rechte Schenkel ist wiederum die Perihelrichtung, den linken Schenkel erhält man, indem man das Lot vom Planetenort (E) auf die grosse Halbachse der Ellipse nach hinten verlängert und mit dem zur Ellipse gehörigen Grosskreis schneidet. Der erhaltene Punkt A liegt auf dem linken Schenkel des bezeichneten Winkels. Dieser wurde von Johannes Kepler eingeführt und heisst exzentrische Anomalie (siehe [1]). Im weiteren ist er mit  $E$  abgekürzt.



**Bild 2.5: Winkel W, M und E zu einem bestimmten Zeitpunkt**

Die wahre Anomalie W bezeichnet den tatsächlich zurückgelegten Winkel vom Perihel her gezählt. Die mittlere Anomalie M stellt den Winkel einer fiktiven, gleichmässig auf einer Kreisbahn laufenden Erde dar, die dieselbe Umlaufzeit wie die wahre Erde hat. Die exzentrische Anomalie E ist eine Hilfsgrösse zwischen W und M. Zwischen Ellipsengrosskreis und Bahnellipse besteht eine normale Affinität, der Affinitätsfaktor beträgt  $\frac{b}{a}$ . Dies kann ausgenutzt werden, wenn Ellipsenflächen bestimmt werden müssen.

Die schraffierten Flächen stehen ebenfalls im Verhältnis 1 : b/a, denn für eine gleichmässig laufende Erde gilt der Flächensatz ebenso wie für die wahre Erde. Nur überstreicht der Fahrstrahl in einer Umdrehung bei der mittleren Erde den Grosskreis, bei der wahren aber die Ellipse.

Aus Bild 2.5 ergeben sich nun einige Beziehungen zwischen W und E:

$$\tan W = \frac{\overline{EB}}{\overline{SB}} = \frac{b/a \cdot \overline{AB}}{\overline{ZB} - \overline{ZS}} = \frac{b/a \cdot a \cdot \sin E}{a \cdot \cos E - e \cdot a} = \frac{b \cdot \sin E}{a \cos E - e} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin E}{\cos E - e}$$

$$\cos W = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 W}} = \sqrt{\frac{(\cos E - e)^2}{(\cos E - e)^2 + (1 - e^2) \cdot \sin^2 E}} = \sqrt{\frac{(\cos E - e)^2}{\cos^2 E - 2e \cos E - e^2 + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E}} = \sqrt{\frac{(\cos E - e)^2}{1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E}} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$$\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos W}{1 + \cos W}} = \sqrt{\frac{1 - e \cos E - \cos E + e}{1 - e \cos E + \cos E - e}} = \sqrt{\frac{(1+e) \cdot (1 - \cos E)}{(1-e) \cdot (1 + \cos E)}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

Mit Hilfe der Fourierentwicklung im Anhang kann  $W$  nach  $E$  entwickelt werden:

$$\frac{W}{2} = \frac{E}{2} + k \cdot \sin E + \frac{k^2}{2} \cdot \sin 2E + \frac{k^3}{3} \cdot \sin 3E + \dots + \frac{k^n}{n} \cdot \sin nE + \dots \quad W(E=0) = 0 .$$

$$\text{Mit } k = \frac{1 - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{1 + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{1 - 2\sqrt{\frac{1-e}{1+e} + \frac{1-e}{1+e}}}{1 - \frac{1-e}{1+e}} = \frac{1+e+1-e-2\sqrt{1-e^2}}{1+e-1+e} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} \approx \frac{1 - \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right)}{e} = \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} \text{ ergibt sich}$$

$$W \approx E + 2\left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{8}\right) \sin E + \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{8}\right)^2 \sin 2E + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{8}\right)^3 \sin 3E + \dots \approx E + \left(e + \frac{e^3}{4}\right) \sin E + \frac{e^2}{4} \sin 2E + \frac{e^3}{12} \sin 3E .$$

Der Winkel  $E$  ist deshalb so praktisch, weil durch ihn die vom Strahl Sonne-Erde überstrichene Fläche  $F$  unter Ausnutzung der Affinität von Kreis und Ellipse leicht zu beschreiben ist:

$$F = \text{Ellipsensektor SEP} = \frac{b}{a} \cdot (\text{Sektor ZAP} - \text{Dreieck ZAS}) \quad \frac{b}{a} \text{ ist der Affinitätsfaktor.}$$

$$F = \frac{b}{a} \cdot \left( \frac{E}{2\pi} \cdot \text{Fläche}_{\text{Grosskreis}} - \frac{\overline{ZS} \cdot \overline{AB}}{2} \right) = \frac{b}{a} \cdot \left( \frac{E}{2} a^2 - \frac{(a \cdot e) \cdot (a \cdot \sin E)}{2} \right) = \frac{b}{a} \cdot \left( \frac{E}{2} a^2 - a^2 \frac{e \sin E}{2} \right) = \frac{ab}{2} \cdot (E - e \sin E) \quad (6)$$

Die überstrichene Fläche lässt sich aber nach dem Flächensatz auch durch die Zeit ausdrücken, beziehungsweise durch den mittleren Winkel  $M$ , der linear von der Zeit abhängt:

$$F = \frac{t}{T} \pi ab ; \text{ mit } M = \frac{t}{T} 2\pi \text{ erhält man } F = \frac{Mab}{2} .$$

Daraus ergibt sich durch Vergleich mit (6)

$$M = E - e \cdot \sin E$$

$$E = M + e \cdot \sin E \quad (7)$$

Gleichung (7) ist die sogenannte Keplersche Gleichung. Sie lässt sich nicht elementar nach  $E$  auflösen; d.h. die Position der Erde, gegeben durch  $E$ , kann nur näherungsweise durch die Zeit – mit Hilfe von  $M$  – ausgedrückt werden. Das Reversionstheorem von Lagrange ermöglicht es uns, beliebige Funktionen von  $E$  nach  $M$  zu entwickeln, insbesondere natürlich auch  $E$  selbst. Es geht aus von einer Gleichung der allgemeinen Form

$$z = y + x \cdot f(y) .$$

Es soll eine beliebige Funktion  $g(z)$  nach den unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$  entwickelt werden. Nach Lagrange (siehe [1]) ergibt sich die Lösung

$$g(z) = g(y) + x \cdot g'(y) \cdot f(y) + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left\{ g'(y) \cdot [f(y)]^2 \right\} + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ g'(y) \cdot [f(y)]^3 \right\} + \dots \quad (8)$$

Im Falle der Keplerschen Gleichung können wir setzen:

$$z = E \quad y = M \quad x = e \quad f(z) = \sin E \quad f(y) = \sin M .$$

Um  $E$  nach  $M$  zu entwickeln, setzen wir  $g(z) \equiv z$  und damit  $g(y) \equiv y$  ;  $g'(y) = 1$  .

In (8) eingesetzt ergibt dies

$$E = M + e \cdot \sin M + \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial M} (\sin^2 M) + \frac{e^3}{6} \cdot \frac{\partial^2}{\partial M^2} (\sin^3 M) + \dots = M + e \cdot \sin M + \frac{e^2}{2} \cdot \sin 2M + \frac{e^3}{8} \cdot \{3 \sin 3M - \sin M\} + \dots$$

Um  $W$  in  $M$  auszudrücken, entwickeln wir noch die Sinuswerte der Vielfachen von  $E$  so weit als nötig:

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sin M + \frac{e}{2} \cdot \sin 2M + \frac{e^2}{8} \cdot \{3 \sin 3M - \sin M\} + \dots$$

$$\sin 2E = \sin 2M + e \cdot \sin M \cdot 2 \cos 2M + \dots = \sin 2M + e \cdot (\sin 3M - \sin M) + \dots$$

$$\sin 3E = \sin 3M + \dots$$

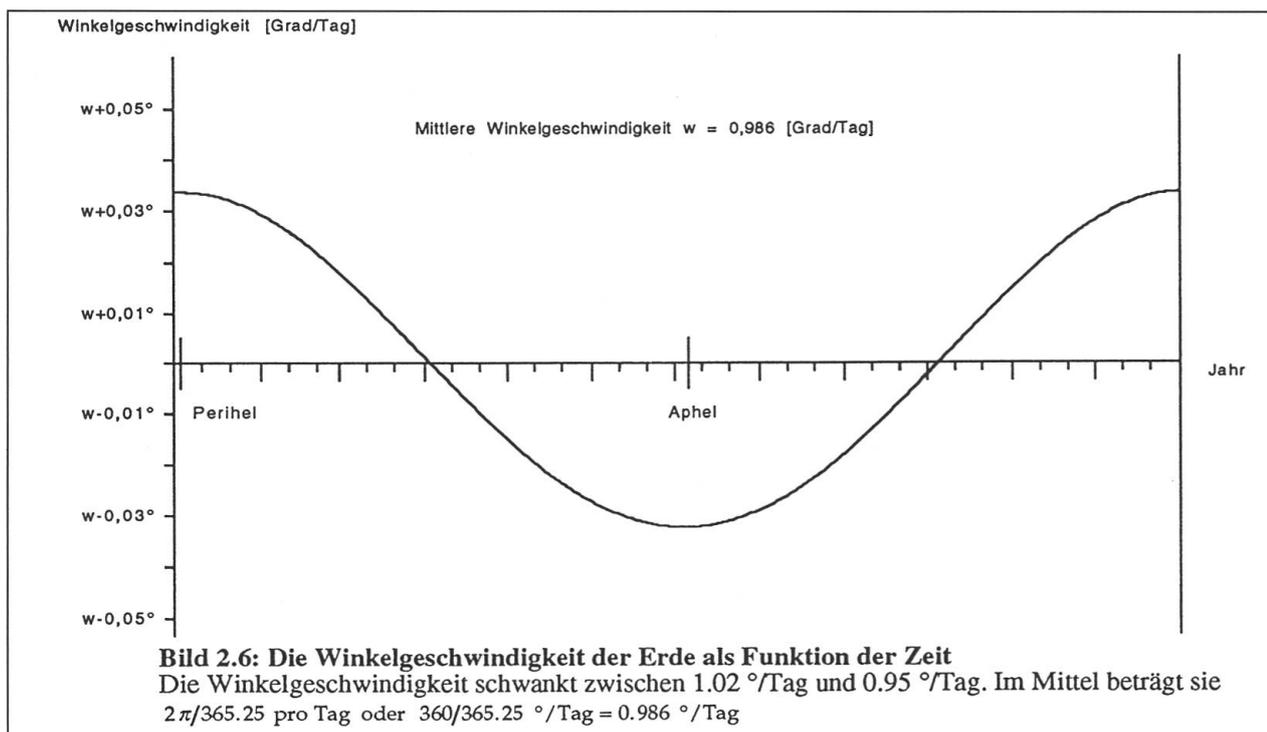
Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} W &\approx E + \left(e + \frac{e^3}{4}\right) \sin E + \frac{e^2}{4} \sin 2E + \frac{e^3}{12} \sin 3E = M + \left(2e + \frac{e^3}{4}\right) \sin E + \frac{e^2}{4} \sin 2E + \frac{e^3}{12} \sin 3E \\ &\approx M + \left(2e + \frac{e^3}{4}\right) \cdot \left(\sin M + \frac{e}{2} \cdot \sin 2M + \frac{e^2}{8} \cdot \{3 \sin 3M - \sin M\}\right) + \frac{e^2}{4} (\sin 2M + e \cdot (\sin 3M - \sin M)) + \frac{e^3}{12} \sin 3M \\ &= M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left(-\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M\right) + e^4 \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Es wurden in der ganzen Entwicklung immer Glieder bis zur Grössenordnung  $e^3$  berücksichtigt, was schon eine sehr genaue Näherung liefert, da  $e \approx 0.0167$  ist. Betrachten wir nun die Winkelgeschwindigkeit der Erde bezüglich der Sonne als Funktion der Zeit, so ergibt sich mit  $M = 2\pi \frac{t}{T}$ :

$$\omega(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dM} \frac{dM}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{dW}{dM} \approx \frac{2\pi}{T} \cdot \left(1 + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M + e^3 \left(-\frac{1}{4} \cos M + \frac{13}{4} \cos 3M\right)\right) \quad (10)$$

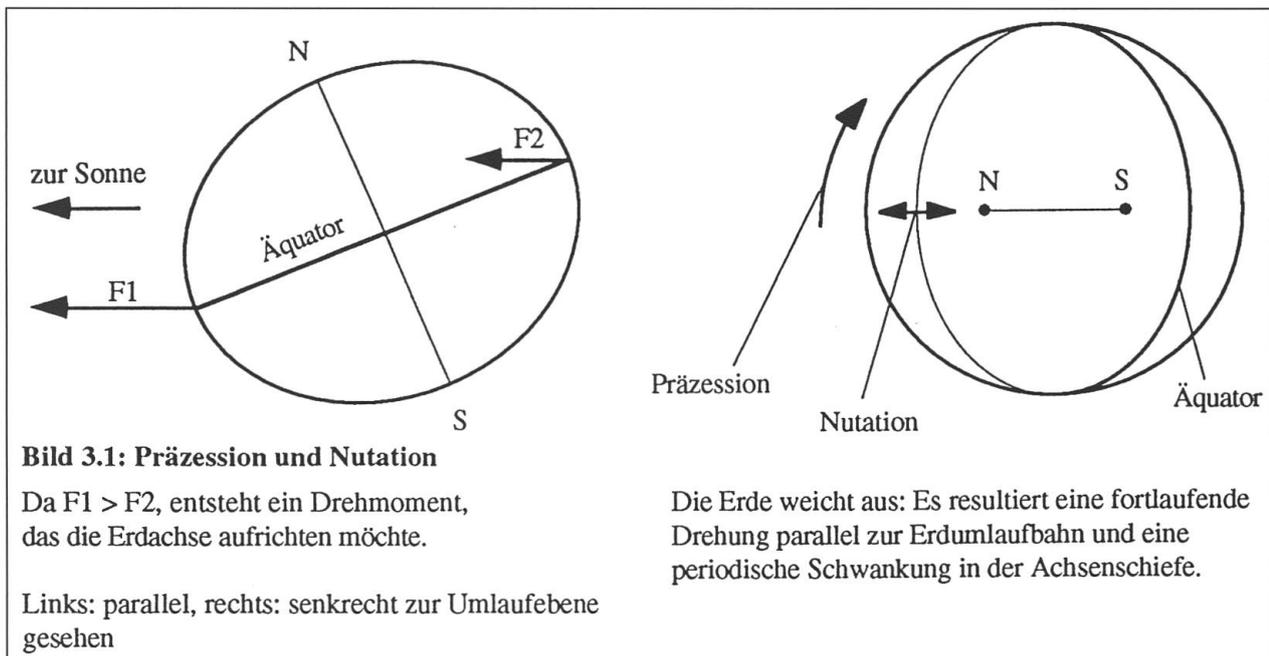
In Bild 2.6 ist diese Funktion aufgetragen. Sie ist im Wesentlichen durch die einfache Kosinusfunktion des ersten Gliedes der Entwicklung bestimmt. Der Faktor  $\frac{2\pi}{T}$  bedeutet die mittlere Winkelgeschwindigkeit (im Bogenmass). Die Abweichungen von  $\pm 3.5\%$  ( $\approx 2e$ ) gegenüber diesem Wert erscheinen kaum beachtenswert, hingegen werden sie merklich, wenn die Winkelgeschwindigkeit über längere Zeit über- oder unterdurchschnittlich gross ist.



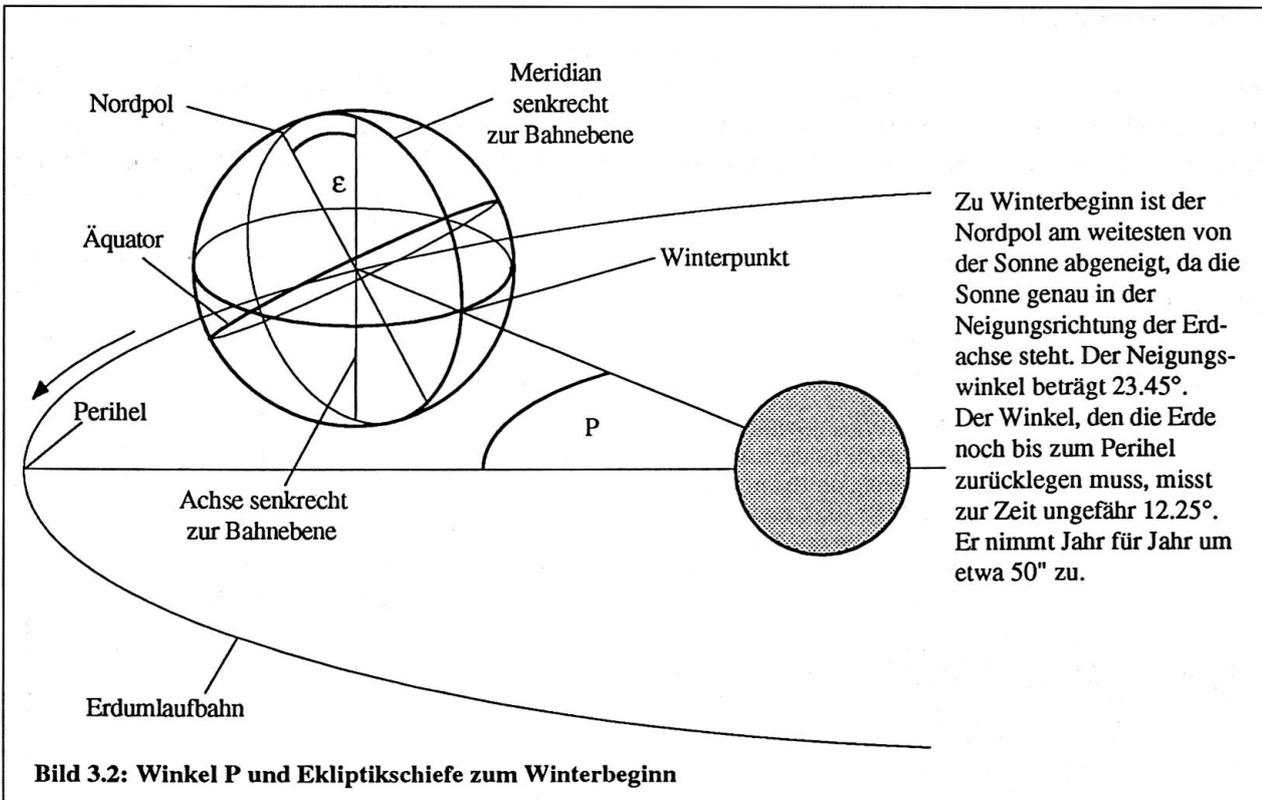
### 3. Die Schiefe der Ekliptik

#### 3.1. Die Erde im Raum

Die eingangs schon relativ ausführlich geschilderten Einflüsse der schrägen Lage der Erdachse gegenüber der Ebene der Erdumlaufbahn sollen hier noch mathematisch beschrieben werden. Zuerst ist zu erwähnen, dass die Erdachse immer ungefähr in dieselbe Richtung im Raum zeigt. Dadurch ist einmal die Nordhalbkugel, einmal die Südhalbkugel der Sonne zugeneigt. Allerdings löst die Gravitationskraft der Sonne ein Drehmoment auf die Erde aus, das durch die Abplattung der Kugelform der Erde an den Polen und die inhomogene Massenverteilung in der Erde zustande kommt. Das Drehmoment (Bild 3.1 links) versucht, die Erde so aufzurichten, dass ihre Achse senkrecht auf der Umlaufebene stehen würde. Die rotierende Erde reagiert aber wie ein Kreisel und führt eine Drehung senkrecht zur einwirkenden Kraft und der eigenen Rotationsachse aus. Dadurch ist die Erdachse nicht raumfest (Bild 3.1 rechts). Sie unterliegt einerseits periodischen Schwankungen im Winkel, den sie mit der Umlaufebene einschliesst (Nutation), andererseits ändert sich der Winkel zwischen der auf die Umlaufebene normalprojizierten Erdachse und der Verbindungslinie Sonne-Perihel stetig, d.h. er wächst immerzu mit ca. 50" pro Jahr (Präzession). Weitere Ursachen liegen bei Störungen durch Planeten und besonders bei der Nutation durch den Mond. Das Ausmass der Präzession ist jedoch nicht derart, dass sie innerhalb Jahresfrist zu berücksichtigen wäre, ausserdem ist die Präzessionsgeschwindigkeit keine Konstante. Im folgenden werden wir also beide oben erwähnten Winkel und damit die ganze Erdachse als fest betrachten.



Zur Zeit schliesst die Äquatorebene mit der Ebene der Erdumlaufbahn einen Winkel von  $23.45^\circ$  oder  $23^\circ 27'$  ein, den wir  $\epsilon$  nennen. Der Winkel zwischen der projizierten Erdachse und der Richtung von der Sonne zum Perihel beträgt ungefähr  $12.25^\circ$  oder  $12^\circ 15'$ . (Dies ist der Winkel, den die Erde von der Sonne aus gesehen zwischen Winterbeginn, ca. 21. Dezember, und Periheldurchgang, ca. 2. Januar, zurücklegt). Bezeichnen wir ihn mit  $P$ . Bild 3.2 zeigt die Erde im Winterpunkt am 21. Dezember.  $\epsilon$  ist als Winkel zwischen Erdachse und Bahnnormalen eingezeichnet, der natürlich gleich gross wie der Winkel zwischen den zugehörigen Ebenen ist.



3.2. Die Projektion des Sonnenwinkels

Der Winkel, der scheinbar von der Sonne bezüglich der Erde zurückgelegt wird, entspricht genau jenem, der von der Erde tatsächlich relativ zur Sonne zurückgelegt wird. Für die Zeitgleichung benötigen wir aber den auf den Äquator bezogenen Winkel (Horizontalwinkel); d.h. der auf der Umlaufebene liegende Winkel muss auf den Äquator normalprojiziert werden. Dabei wird er entweder gestreckt oder gestaucht. Der Faktor der Streckung eines infinitesimalen Winkels ist eindeutig bestimmt durch die Größen  $e$  und  $\varphi$  in Bild 3.3 und 3.4.

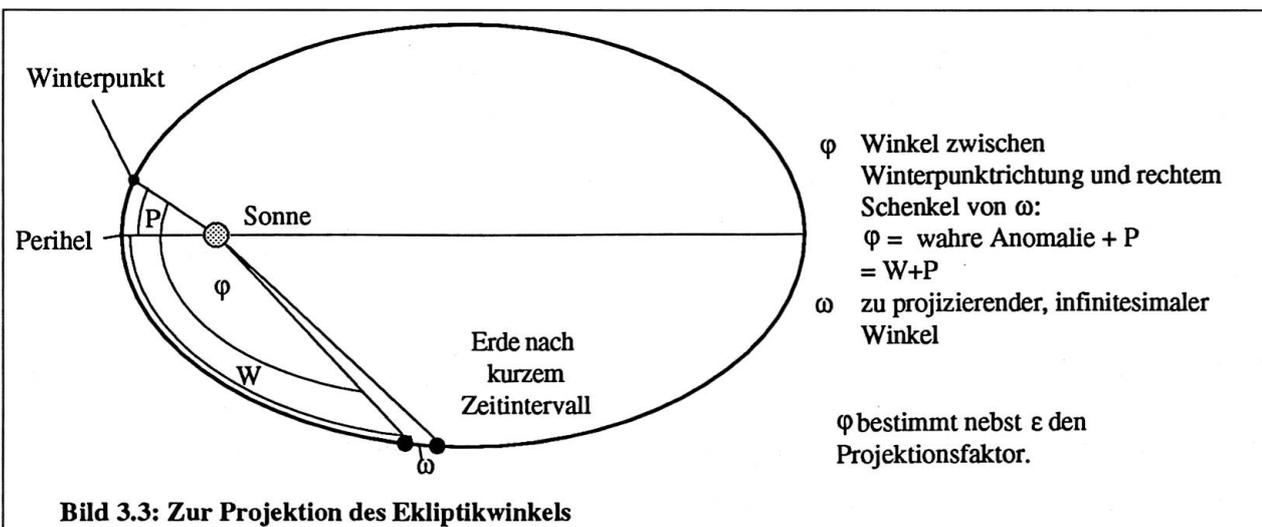
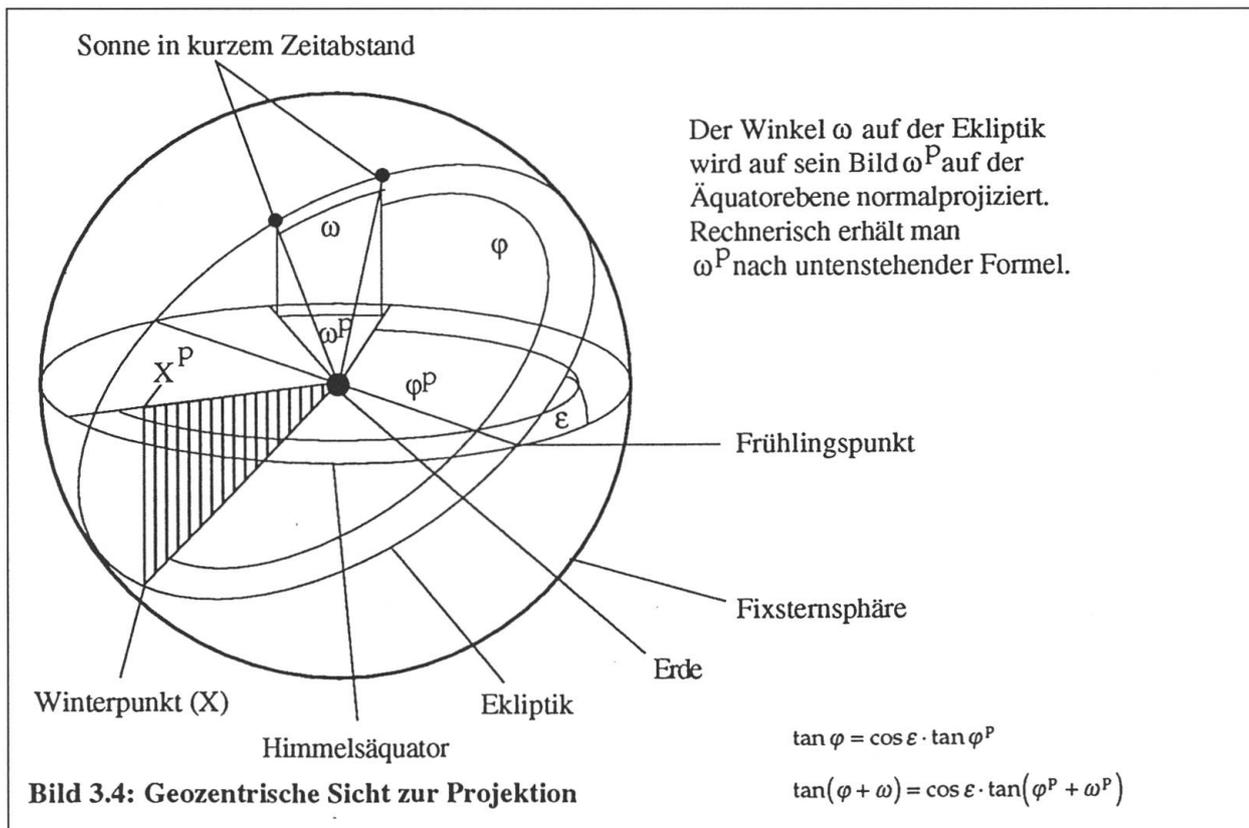


Bild 3.3 zeigt die Situation im Sonnensystem (kurz vor Sommerbeginn), Bild 3.4 die Ansicht von der Erde aus an den Fixsternhimmel projiziert (Spätsommer).  $\varphi$  ist vom Winterpunkt aus gemessen, auf den wir uns im folgenden beziehen wollen. Strecken parallel zur Richtung Erde-Frühlingspunkt werden nicht verkürzt, jene senkrecht dazu hingegen werden mit dem Faktor  $\cos \varepsilon$  gekürzt, was in Bild 3.4 durch das schraffierte Projektionsdreieck anschaulich dargestellt ist ( $\{\text{Erde-Winterpunkt}\} \cdot \cos \varepsilon = \{\text{Erde-X}^P\}$ ). Demnach wird der Tangens eines Winkels, der vom Winterpunkt gemessen wird, mit dem Faktor  $1/\cos \varepsilon$  vergrößert (da die Gegenkathete unverändert bleibt, die Ankathete jedoch verkürzt wird).



Für einen sehr kleinen Winkel ergibt sich damit der Projektionsfaktor f:

$$f(\varphi) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{\omega^P}{\omega} \right\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{\text{Arctan}\left(\frac{\tan(\varphi + \omega)}{\cos \varepsilon}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{\tan \varphi}{\cos \varepsilon}\right)}{\omega} \right\} = \frac{d}{d\varphi} \left\{ \text{Arctan}\left(\frac{\tan \varphi}{\cos \varepsilon}\right) \right\} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan \varphi}{\cos \varepsilon}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{\cos^2 \varepsilon}{(\cos^2 \varepsilon + \tan^2 \varphi) \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos^2 \varphi} = \frac{\cos \varepsilon}{(\cos^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{\cos \varepsilon}{(\cos^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \varphi + 1 - \cos^2 \varphi)} = \frac{\cos \varepsilon}{(1 - \cos^2 \varphi \cdot \{1 - \cos^2 \varepsilon\})} = \frac{\cos \varepsilon}{1 - \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varepsilon}$$

Mit einer Fourierreihenentwicklung (s. Anhang) erhält man die rasch konvergente Form:

$$f(\varphi) = 1 + 2 \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 2\varphi + 2 \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 4\varphi + 2 \tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 6\varphi + \dots \quad (11)$$

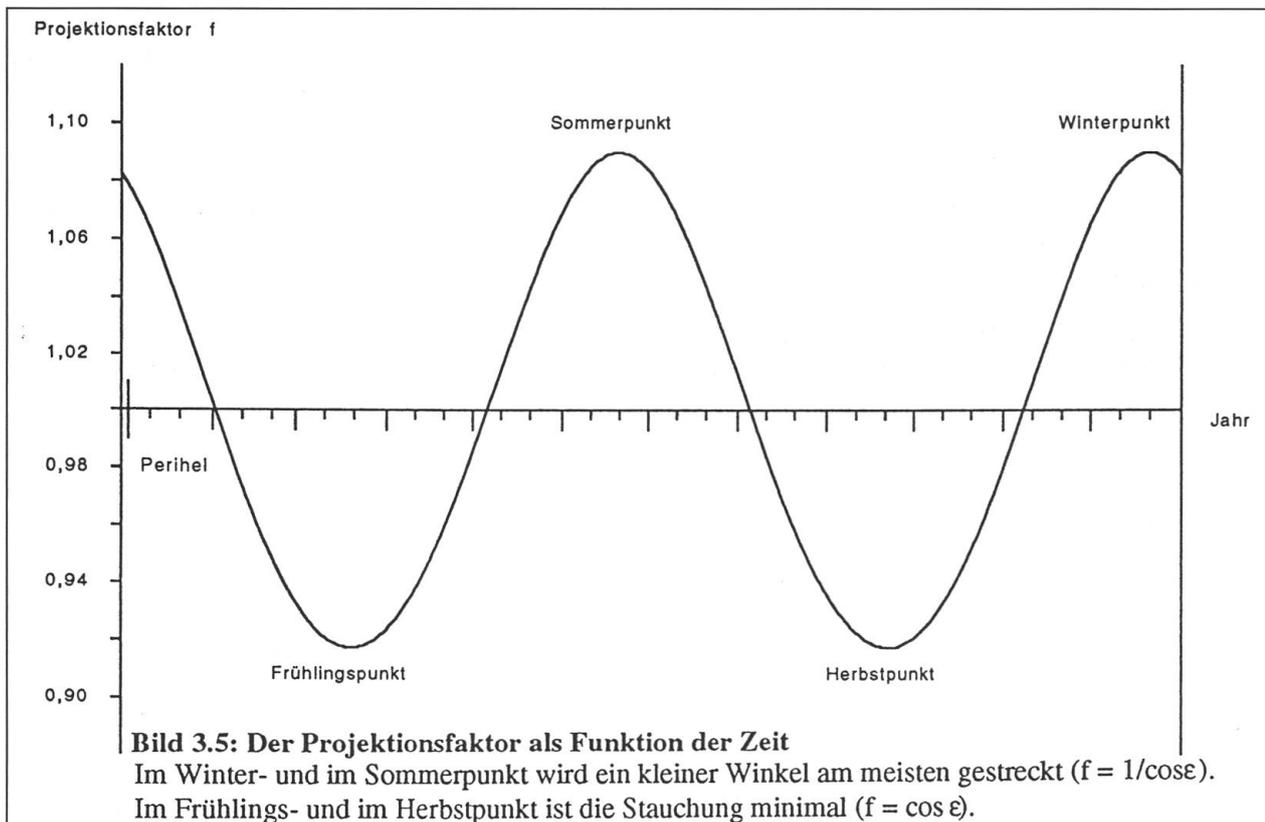
Oder mit  $\varphi = W + P$  ist entsprechend

$$f(\varphi) = f(W + P) = 1 + 2 \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 2(W + P) + 2 \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 4(W + P) + 2 \tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 6(W + P) + \dots$$

Für eine grobe Näherung kann man  $W \approx M$  setzen und erhält

$$f(\varphi) = f(W(t) + P) \approx f(M + P) \approx 1 + 2 \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 2(M + P).$$

Für die Dauer eines Jahres kann der Projektionsfaktor  $f$  als Funktion der Zeit, beziehungsweise des mittleren Winkels  $M$  aufgetragen werden (Bild 3.5). Wir erhalten einen Graphen, der hauptsächlich vom ersten Glied der obigen Näherung bestimmt wird. Die Amplitude der Doppelschwankung ist hier mit  $\pm 81/2\%$  ( $\approx 2 \tan^2 \frac{\varepsilon}{2}$ ) jedoch grösser als bei den Winkelgeschwindigkeiten.



Die Extrema liegen jeweils zu Beginn einer Jahreszeit. Im Sommer- bzw. im Winterpunkt steht die Sonne am nördlichsten bzw. am südlichsten, ein Ekliptikwinkel wird am stärksten gestreckt. Im Frühlings- oder im Herbstpunkt (Tag- und Nachtgleiche) steht sie senkrecht über dem Äquator, Ekliptikwinkel werden am stärksten verkürzt.

## 4. Die Berechnung der Zeitgleichung

### 4.1. Eine einfache Näherung

Wir wollen nun die beiden Ursachen der Zeitgleichung – die verschiedenen Geschwindigkeiten in der Revolution und die Projektionsunterschiede – verknüpfen. Wir wollen berechnen, um welchen Winkel die wahre Sonne (in der Äquatorebene gemessen) von der mittleren, gleichmässig umlaufenden Sonne abweicht. Dazu müssten wir zuerst festlegen, wann die mittlere Sonne mit der wahren koinzidiert. Diese Definition soll vorerst noch offen gelassen und die Schwankungen der Zeitgleichung nur bis auf einen konstanten Wert berechnet werden, der dann durch diese Festlegung noch zu bestimmen ist. Zu gegebener Zeit soll noch auf die allgemein verwendete Definition der mittleren Sonne eingegangen werden.

Wir nehmen den Periheldurchgang als Zeitnullpunkt ( $t = 0$ ) an und betrachten nun den Stand der beiden Sonnen zur Zeit  $t_1$ . Die mittlere Sonne hat bis dahin den Winkel  $M_1 = 2\pi \frac{t_1}{T}$  ( $T = \text{Umlaufzeit} = 365.25 \text{ Tage}$ ) in der Ekliptik zurückgelegt, die Erde hat sich mittlerweile

$$x_{\text{Rotation}} = \frac{t_1}{T} \cdot 366.25 = \frac{M_1}{2\pi} \cdot 366.25 \text{ mal gedreht (Dieser Wert sei nur zur besseren Übersicht gegeben;}$$

man wird weiter unten sehen, dass die Rotationszahl die Zeitgleichung nicht beeinflusst). Die mittlere Sonne hat bis dahin am Himmel also einen Winkel von

$$\text{Sonnenwinkel}_m = 2\pi \cdot x_{\text{Rotation}} - M_1 = 366.25 \cdot M_1 - M_1 = 365.25 \cdot M_1$$

zurückgelegt. Der Winkel  $M_1$  wird subtrahiert, weil die Sonne jeden Tag ihren Lauf von Ost nach West beschreibt, innerhalb eines Jahres aber gegenüber dem Fixsternhimmel von West nach Ost, also entgegengesetzt wandert.

Die wahre Sonne hingegen bewegt sich nicht regelmässig. Zu einer beliebigen Zeit  $t$  hat die Erde nach Gleichung (10) näherungsweise die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) \approx \frac{2\pi}{T} \cdot (1 + 2e \cos M)$$

Um die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Äquatorebene zu erhalten, ist dies noch mit dem Projektionsfaktor  $f(t)$  im Zeitpunkt  $t$  zu multiplizieren. Dieser ist nach Gleichung (11) ungefähr

$$f(t) = f(W(t) + P) \approx f(M + P) \approx 1 + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2(M + P) \quad , \quad \text{wobei } W \approx M \text{ gesetzt wird.}$$

Man erhält also

$$\omega_{\text{Äquator}} = \omega(t) \cdot f(t) \approx \frac{2\pi}{T} \cdot \{1 + 2e \cos M\} \cdot \left\{1 + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2(M + P)\right\} \approx \frac{2\pi}{T} \cdot \left\{1 + 2e \cos M + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2(M + P)\right\} .$$

Die wahre auf den Äquator projizierte Anomalie  $W_p$  bis zur Zeit  $t_1$  berechnet sich bis auf eine Konstante, die noch durch die Beziehung zwischen wahrer und mittlerer Sonne definiert werden muss, zu

$$\begin{aligned} W^p &= \int_0^{t_1} \omega_{\text{Äquator}} dt \approx \int_0^{t_1} \frac{2\pi}{T} \cdot \left\{1 + 2e \cos M + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2(M + P)\right\} dt = \int_0^{M_1} \left\{1 + 2e \cos M + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2(M + P)\right\} dM \\ &= \left\{M + 2e \sin M + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(M + P)\right\}_0^{M_1} = M_1 + 2e \sin M_1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(M_1 + P) - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2P + \text{const.} . \end{aligned}$$

Schlägt man  $-\tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2P$  zur Konstanten, so ist  $W^p \approx M_1 + 2e \sin M_1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(M_1 + P) + \text{const.}$  .

Für den genäherten Winkel der wahren Sonne erhält man insgesamt

$$\text{Sonnenwinkel}_w = 2\pi \cdot x_{\text{Rotation}} - W^P \approx 366.25 \cdot M_1 - \left\{ M_1 + 2e \sin M_1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(M_1 + P) \right\} + \text{const.}$$

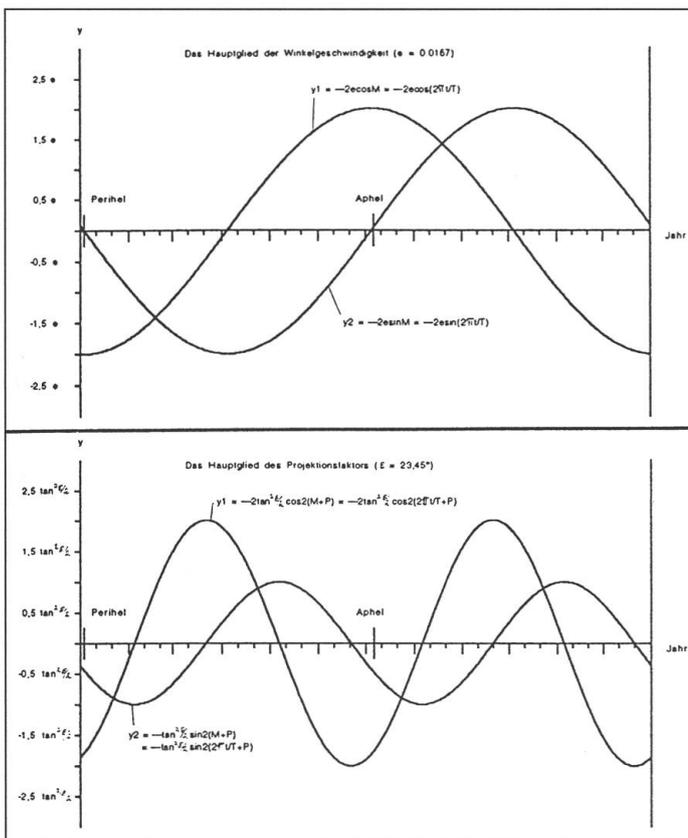
$$\text{Sonnenwinkel}_w \approx \text{Sonnenwinkel}_m - \left\{ 2e \sin M_1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(M_1 + P) \right\} + \text{const.}, \text{ und damit wird}$$

$$\text{Zeitgleichung} = \text{Sonnenwinkel}_w - \text{Sonnenwinkel}_m \approx - \left\{ 2e \sin M_1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(M_1 + P) \right\} + \text{const.}$$

Man sieht, dass die Rotation der Erde die Differenz von wahren und mittlerem Sonnenwinkel nicht beeinflusst. Die Zeitgleichung ist nun der Zeitwert, der der Differenz zwischen wahrer projizierter und mittlerer Anomalie entspricht. Diesen Wert erhält man durch Konvertierung des Bogenmasses in Minuten und Sekunden. 24 Stunden entsprechen einer vollen Umdrehung, also  $2\pi$  im Bogenmass.

$$\text{Zeitgleichung} \approx - \frac{24 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} \cdot \left\{ 2e \sin M_1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(M_1 + P) \right\} + \text{const.} \quad [\text{sec}] \quad (12)$$

Im wesentlichen besteht die Zeitgleichungsfunktion aus der Überlagerung der Stammfunktionen der ersten Glieder der Entwicklungen für die Winkelgeschwindigkeit der Erde bezüglich der Sonne und des Projektionsfaktors. Diese zwei ausschlaggebenden Glieder sind in den folgenden Graphiken (4.1 a/b) nochmals mit ihren Stammfunktionen eingezeichnet.



**Bild 4.1 a: Das Hauptglied der Winkelgeschwindigkeit**

$y_2$  stellt die Stammfunktion von  $y_1$  dar, dem ersten Glied der Entwicklung für die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Das Vorzeichen ist wie in der Näherung (12) negativ gewählt. Die Extremalstellen der Funktion  $y_1$  und damit die Nullstellen der Stammfunktion befinden sich nach wie vor im Perihel und im Aphel.

**Bild 4.1 b: Das Hauptglied des Projektionsfaktors**

Auch hier stellt  $y_2$  die Stammfunktion von  $y_1$  dar, dem ersten Glied der Entwicklung für den Projektionsfaktor von der Ekliptik auf den Äquator. Das Vorzeichen ist ebenfalls negativ. Die Extremalstellen der Funktion  $y_1$  fallen zusammen mit den Nullstellen der Stammfunktion in den Beginn der Jahreszeiten.

Die Summe der beiden Stammfunktionen ist schon eine gute Approximation der Zeitgleichung (vgl. Bild 4.3)

#### 4.2. Ableitung einer genaueren Näherung

Um zu einer exakteren Näherung zu gelangen, gehen wir folgendermassen vor:

$$W^P = \int dW^P = \int f(W+P) dW \quad dW \text{ multipliziert mit dem Projektionsfaktor ergibt das Differential der projizierten Anomalie}$$

Der Projektionsfaktor  $f(W+P)$  ist nach Gleichung (11) gegeben durch

$$f(W+P) = 1 + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2(W+P) + 2 \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 4(W+P) + 2 \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 6(W+P) + \dots \quad \text{Damit ist}$$

$$\begin{aligned} W^P &= \int dW^P = \int f(W+P) dW = \int \left\{ 1 + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2(W+P) + 2 \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 4(W+P) + 2 \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 6(W+P) + \dots \right\} dW \\ &= W + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2(W+P) + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 4(W+P) + \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 6(W+P) + \dots + \text{const.} \end{aligned} \quad (13)$$

Die Integrationskonstante wird nachher bestimmt. Nach Gleichung (9) können wir  $W$  durch  $M$  ersetzen:

$$W \approx M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left( -\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M \right).$$

Hiermit ist

$$\begin{aligned} W^P &= M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left( -\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M \right) + \dots \\ &+ \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin \left\{ 2(M+P) + 2 \left( 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left( -\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M \right) + \dots \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin \left\{ 4(M+P) + 4 \left( 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left( -\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M \right) + \dots \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin \left\{ 6(M+P) + 6 \left( 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left( -\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M \right) + \dots \right) \right\} + \dots + \text{const.} \end{aligned}$$

Die entstehenden Winkelfunktionen  $\sin\{2n(M+P)+x\}$  werden nun umgeformt:

$$\begin{aligned} \sin\{2n(M+P)+x\} &= \sin 2n(M+P) \cos x + \cos 2n(M+P) \sin x, \text{ und da } x \text{ sehr klein ist, wird mit } \sin x \approx x; \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \\ \sin\{2n(M+P)+x\} &\approx \sin 2n(M+P) \cdot \left\{ 1 - \frac{x^2}{2} \right\} + \cos 2n(M+P) \cdot x. \end{aligned}$$

Dadurch entstehende Produkte von Winkelfunktionen werden anschliessend goniometrisch in Summen umgeformt und gleiche Terme gruppiert. Hier ist das Schlussresultat mit allen berücksichtigten Gliedern der Grösse nach aufgeführt.

$$\begin{aligned} W^P &\approx M + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} (1 - 4e^2) \cdot \sin 2(M+P) + 2e \cdot \sin M - 2e \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(M+2P) + 2e \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(3M+2P) + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \sin 4(M+P) \\ &+ \frac{5}{4} e^2 \cdot \sin 2M - 2e \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(3M+4P) + 2e \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(5M+4P) + \frac{13}{4} e^2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(4M+2P) + \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 6(M+P) + \text{const.} \end{aligned}$$

Für die Zeitgleichung gilt nun

$$\begin{aligned} \text{Zeitgleichung} &= \text{Wahrer Sonnenwinkel} - \text{Mittlerer Sonnenwinkel} \quad (\text{geozentrische Sicht}) \\ &= -(\text{Wahre, projizierte Anomalie} - \text{Mittlere Anomalie}) \quad (\text{heliozentrische Sicht}) \end{aligned}$$

Mit obigen Beziehungen entsprechend

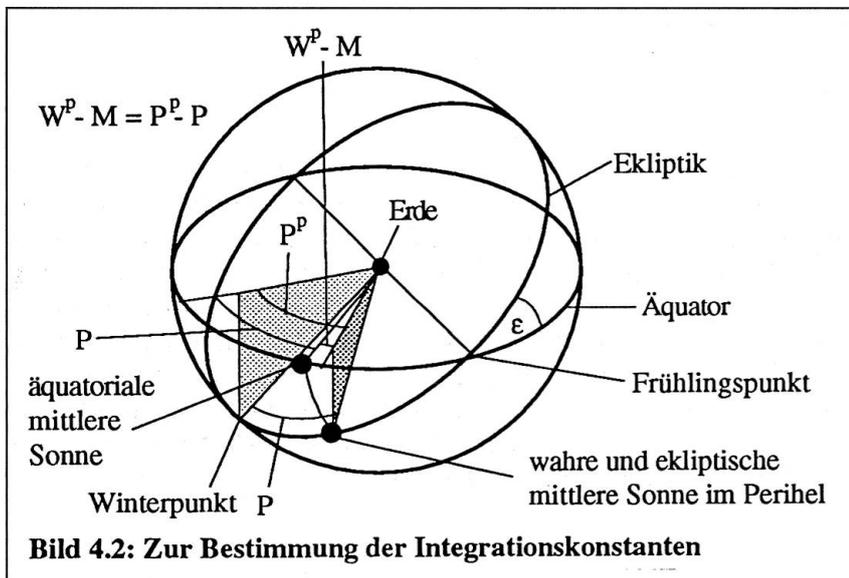
Zeitgleichung =  $M - W^P$

$$\approx - \left\{ \tan^2 \frac{\epsilon}{2} (1 - 4e^2) \cdot \sin 2(M + P) + 2e \cdot \sin M - 2e \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(M + 2P) + 2e \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(3M + 2P) + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \sin 4(M + P) \right\} \\ - \left\{ \frac{5}{4} e^2 \cdot \sin 2M - 2e \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(3M + 4P) + 2e \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(5M + 4P) + \frac{13}{4} e^2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin(4M + 2P) + \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 6(M + P) \right\} + \text{const. .}$$

Berechnet man die Koeffizienten mit  $\epsilon = 23.45^\circ$  und  $e = 0.0167$  und konvertiert das Bogenmass noch in Zeiteinheiten (Sekunden), so ergibt sich:

$$\text{Zeitgleichung} \approx -591.7 \cdot \sin 2(M + P) - 459.6 \cdot \sin M + 19.8 \cdot \sin(M + 2P) - 19.8 \cdot \sin(3M + 2P) - 12.8 \cdot \sin 4(M + P) \\ - 4.8 \cdot \sin 2M + 0.9 \cdot \sin(3M + 4P) - 0.9 \cdot \sin(5M + 4P) - 0.5 \cdot \sin(4M + 2P) - 0.4 \cdot \sin 6(M + P) + \text{const.} \quad [\text{sec}].$$

Zur Zeit misst der Winkel  $P$  etwa  $12.25^\circ$ .



Nun ist noch die Integrationskonstante zu bestimmen. Nach einer allgemein verwendeten Definition soll die mittlere Sonne genau dann im Frühlingspunkt ankommen, wenn eine gedachte <dynamische> Sonne, die mit gleichmässiger Geschwindigkeit in der Ekliptik läuft und mit der wahren Sonne das Perihel verlässt, dort anlangt (siehe [2]). Deshalb sind die Winkel der beiden gedachten regelmässig laufenden Sonnen bezüglich des Frühlingspunkts immer gleich. Folglich ist in der Zeichnung der Winkel  $P$  der ekliptischen Sonne zum Winterpunkt gleich dem Winkel der äquatorialen Sonne zur projizierten Winterpunktsrichtung. Wir wollen nun die Integrationskonstante anhand des Periheldurchgangs ermitteln (Bild 4.2). Dort ist:

$$M - W^P = P - P^P = P - \int_0^P f(\varphi) d\varphi = P - \int_0^P \left( 1 + 2 \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2\varphi + 2 \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 4\varphi + 2 \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 6\varphi + \dots \right) d\varphi \\ = P - P - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2P - \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 4P - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 6P - \dots = - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2P - \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 4P - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 6P - \dots$$

Mit Gleichung (13) erhält man aber:

$$M(t=0) - W^P(t=0) = 0 - W^P(W=0) = - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 2P - \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \cdot \sin 4P - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 6P - \dots + \text{const.}$$

Der Vergleich ergibt, dass die Integrationskonstante verschwindet. Beschränken wir uns auf die sechs wesentlichsten Glieder, so ist schliesslich

$$\text{Zeitgleichung} \approx -591.7 \cdot \sin 2(M+P) - 459.6 \cdot \sin M + 19.8 \cdot \sin(M+2P) - 19.8 \cdot \sin(3M+2P) - 12.8 \cdot \sin 4(M+P) - 4.8 \cdot \sin 2M \quad [\text{sec}].$$

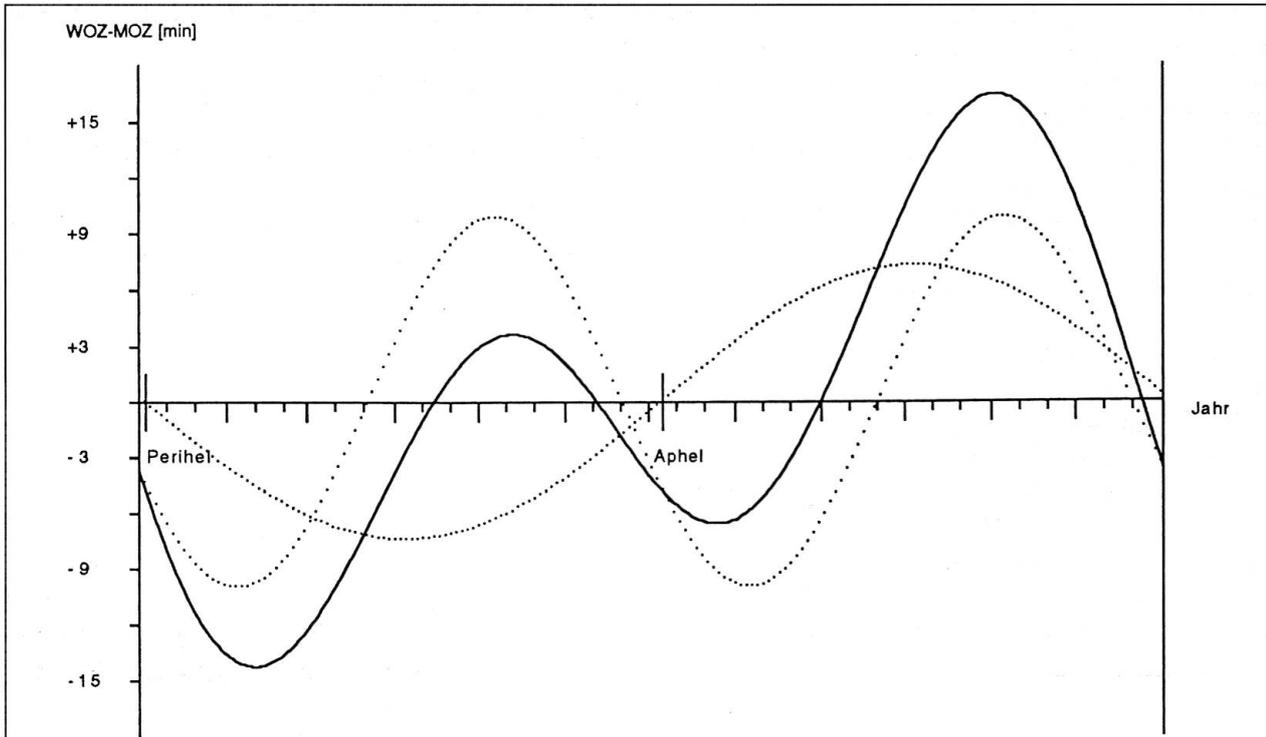
Um die Qualität dieser Näherung zu überprüfen, haben wir ein Computerprogramm geschrieben, das die Zeitgleichungswerte so genau wie möglich berechnet und mit den Ergebnissen dieser Näherung vergleicht. (Durch Iterationsverfahren [  $E_0 = M$  ;  $E_n = M - e \cdot \sin E_{n-1}$  ] gewinnt man E aus M [anstelle

des Reversionstheorems]. W ergibt sich nach Kapitel 2 zu:  $W = 2 \text{Arc tan} \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right)$ . Die Beziehung in Bild 3.4 ergibt  $W^P + \text{const.} = \text{Arc tan} \left( \frac{\tan\{W+P\}}{\cos \epsilon} \right)$ .

$\Rightarrow$  Zeitgleichung =  $M - W^P = M - \text{Arc tan} \left( \frac{\tan\{W+P\}}{\cos \epsilon} \right) + \text{const.}$  Die Konstante wird am Periheldurchgang oder am Frühlingspunkt bestimmt: Da hier

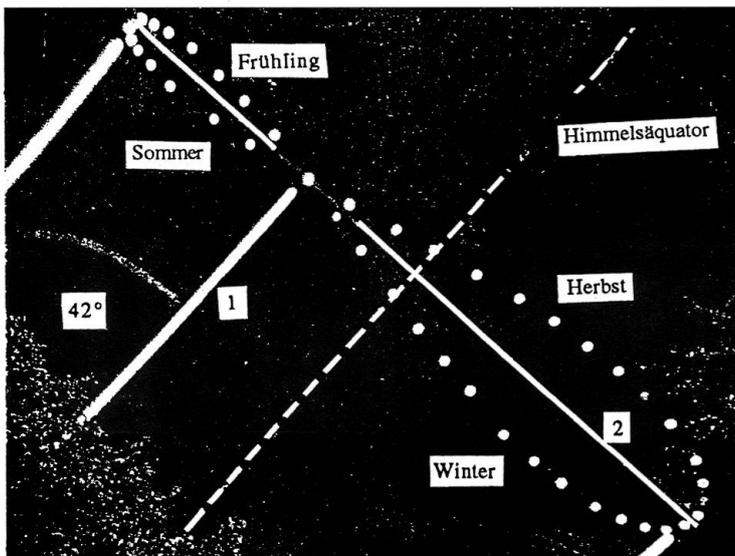
$$M - W^P = 0 - \text{Arc tan} \left( \frac{\tan P}{\cos \epsilon} \right) + \text{const.} = -P^P + \text{const.} = P - P^P \text{ ist, folgt } \text{const.} = P . )$$

Die Auswertung ergibt, dass die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung weniger als eine Sekunde beträgt! Die zwei Hauptglieder in  $\sin M$ , abhängig von der Exzentrizität der Erdumlaufbahn, und in  $\sin 2(M+P)$ , abhängig von der Ekliptikschiefe, weisen zusammen noch eine mittlere Streuung von 21 Sekunden auf, stellen aber schon eine recht gute Näherung dar (vgl. Gleichung 12). In Bild 4.3 ist die exakte Zeitgleichung aufgetragen. Im Winter nimmt der Wert der Zeitgleichung am stärksten ab, weil die Winkelgeschwindigkeit der Sonne in der Ekliptik am grössten ist und zugleich der Projektionsfaktor ein Maximum erreicht. Die gegensätzliche Situation tritt zwischen Aphel und Herbstbeginn ein. Jeweils nachfolgend nimmt die Zeitgleichung einen Extremwert an. Zwischen jenen beiden Situationen – besonders im Sommer – gleichen sich kleinere Winkelgeschwindigkeit und grösserer Projektionsfaktor mehr oder weniger aus.



**Bild 4.3: Die Zeitgleichung mit den zwei Hauptgliedern**

Die Differenz zwischen dem Maximum im Oktober (ca. +16 min) und dem Minimum im Februar (ca. -14 min) beträgt etwa eine halbe Stunde! Wenn eines der Hauptglieder Null wird, so entspricht der Wert der Zeitgleichung gerade etwa dem anderen. Der Beitrag durch die Ekliptikschiefe (Kurve mit zwei Schwankungen) verschwindet jeweils zu Beginn der Jahreszeiten, jener von der Exzentrizität der Erdbahn in Aphel und Perihel.



**Bild 4.4: Das Analemma**

Diese Aufnahme (siehe [2]) zeigt das praktische Resultat der Zeitgleichung: Das Bild entstand dadurch, dass man etwa alle zehn Tage morgens um 8.14 Uhr mittlerer Ortszeit die Sonne am Himmel fotografierte. Da sich der Standort der Kamera auf ungefähr  $42^\circ$  n.Br. befand, weist die tägliche scheinbare Sonnenbahn einen Winkel von ebenfalls  $42^\circ$  zur Vertikalen auf. Diese Schiefe wird durch die drei Langzeitaufnahmen (1) der Sonne verdeutlicht. Die unterste entstand bei Winterbeginn, die oberste bei Sommerbeginn.

Würde sich die Sonne mit regelmässiger Geschwindigkeit am Himmel fortbewegen, so lägen alle Sonnenbilder auf einer geraden Strecke (2), die senkrecht zur täglichen Laufrichtung der Sonne stehen würde. Infolge der Schiefstellung der Erdachse bezüglich der Erdumlaufbahnebene steht die Sonne im Sommer höher, im Winter tiefer.

Bei dieser Fotografie kommt nun die Unregelmässigkeit der Sonnenbewegung und damit die Zeitgleichung anschaulich zum Ausdruck: Im Frühjahr und im Sommer ist die Sonne in ihrer Bahn weniger weit vorangeschritten als erwartet (sie liegt unterhalb der <Durchschnittslinie> (2)), entsprechend ist der Zeitgleichungswert negativ (vgl. Bild 4.3). Dagegen geht die Sonne zwischen April und Juni und gegen Jahresende vor (sie liegt oberhalb der "Durchschnittslinie"), und der Zeitgleichungswert ist positiv.

Durch diese Schwankungen entsteht auf dem Bild die Form einer schiefen langgestreckten Acht, die man sich als Zeitgleichungskurve vorstellen kann, die durch Umklappen bei Sommer- und Winterbeginn zu einer geschlossenen Kurve wird.

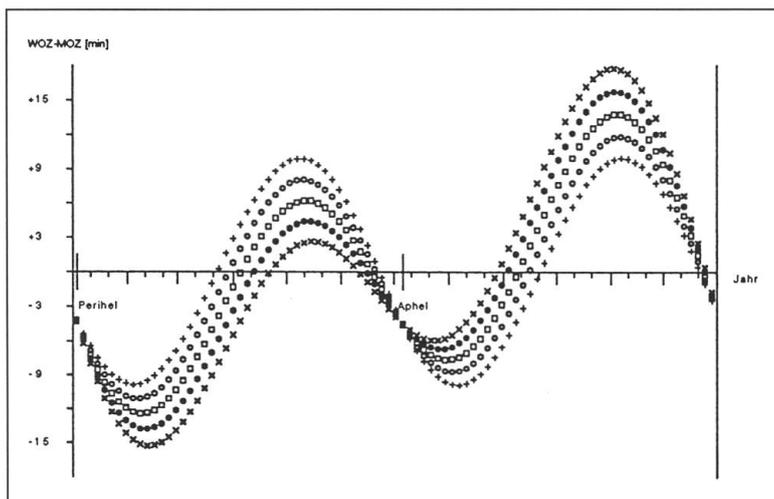
#### 4.3. Die Zeitgleichung in Abhängigkeit ihrer Parameter

Der Verlauf der Zeitgleichung hängt ab von:

- der Exzentrizität der Erdumlaufbahn
- der Schiefe der Ekliptik
- dem Winkel P (Winkel zwischen Winterpunkt und Perihel)

bzw. der Zeitspanne  $\Delta t$  zwischen Winterbeginn und Periheldurchgang

Die letzten zwei Parameter ändern sich allmählich durch Präzession und Nutation. Es ist deshalb interessant, die speziellen Einflüsse der einzelnen Parameter genauer zu untersuchen. Die Bilder 4.5a-c zeigen, wie sich die Zeitgleichung ändert, wenn ein Parameter verschiedene Werte annimmt.

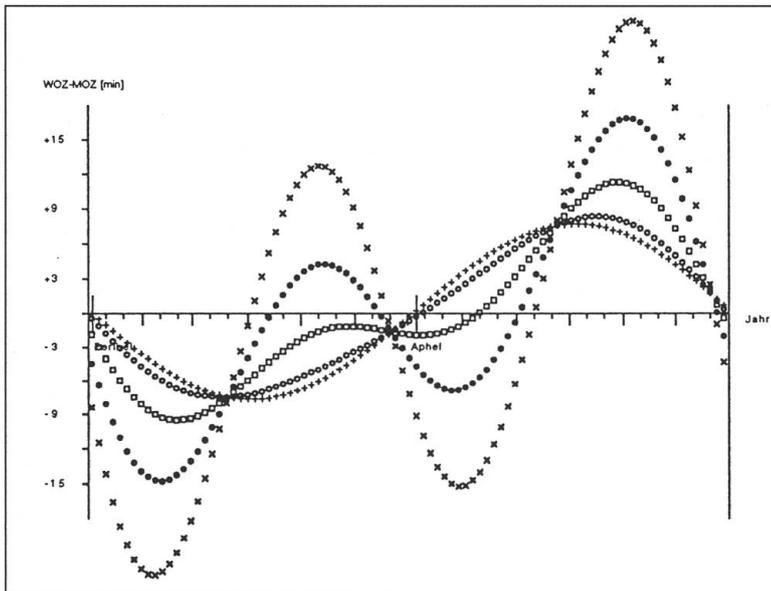


**Bild 4.5a: 1. Parameter: Die Exzentrizität**

+++	$e = 0.000$
ooo	$e = 0.005$
□□□	$e = 0.010$
●●●	$e = 0.015$
xxx	$e = 0.020$

Für  $e = 0$  resultiert eine regelmässige Doppelschwankung, verursacht durch die Schiefe der Ekliptik. Je grösser  $e$  ist, desto grösser werden die Wellenberge im Winter und im Herbst. D.h. die Extrema der jahresperiodischen Schwankung werden dominant. Zur Zeit des Aphel- und

Periheldurchgangs haben alle Kurven gleichen Wert, da dieser dort nur von der Schiefe der Ekliptik und vom Winkel P abhängt. (Vgl. Bild 4.2)

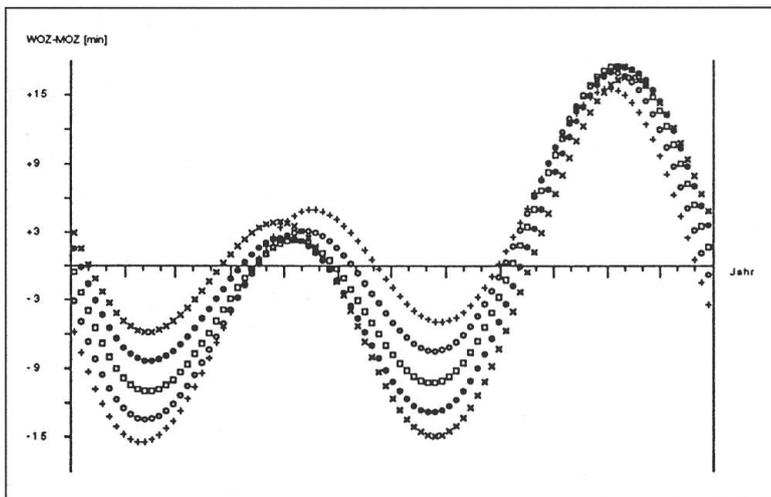


**Bild 4.5b: 2. Parameter: Die Eklip-tikschiefe**

- +++  $\epsilon = 0^\circ$
- ooo  $\epsilon = 8^\circ$
- $\epsilon = 16^\circ$
- $\epsilon = 24^\circ$
- xxx  $\epsilon = 32^\circ$

Ist  $\epsilon = 0$ , so erhält man eine punkt-symmetrische Schwankung bezüg-lich des Apheldurchgangs. Mit zu-nehmender Ekliptikschiefe überla-gert sich dieser eine Schwankung mit halbjährlicher Periode, die schon unge-fähr bei  $\epsilon = 20^\circ$  den bedeutenderen Teil der Zeitgleichung ausmacht. Je-weils zu Jahreszeitenbeginn schnei-den sich die Kurven, da dort der Po-

larwinkel bezüglich des Winterpunktes bei der Projektion nicht verändert wird, also allein die Ex-zentrität der Erdbahn und der Winkel P den Zeitgleichungswert bestimmen.



**Bild 4.5c: 3. Parameter: Die Zeit-spanne von Winterbeginn bis Peri-heldurchgang**

- +++  $\Delta t = 0$  Tage
- ooo  $\Delta t = 20$  Tage
- $\Delta t = 40$  Tage
- $\Delta t = 60$  Tage
- xxx  $\Delta t = 80$  Tage

Für  $\Delta t = 0$  sind die zwei verursa-chen Faktoren nicht phasenver-schoben, und man erhält einen sym-metrischen Verlauf mit Extremwer-ten in Winter und Herbst. Mit wach-sendem  $\Delta t$  verlagert sich der Peri-heldurchgang in den Frühling. Dadurch

heben sich die beiden Komponenten im Winter tendenziell auf, verstärken sich aber im Sommer im negativen Bereich.

## 5. Das Modell

### 5.1. Einleitung

Der Gedanke an ein Modell kam erst gegen Ende der Entwicklungen des theoretischen Teiles. Um die Zeitgleichung zu verstehen, muss man sich die Begebenheiten im Sonnensystem vorstellen können, da sonst die Erklärungen im theoretischen Teil dieser Arbeit schwer veranschaulicht werden können. Aus diesem Grund beschlossen wir, ein Modell zu konstruieren, das die Ursachen der Zeitgleichung möglichst naturgetreu und anschaulich darstellt.

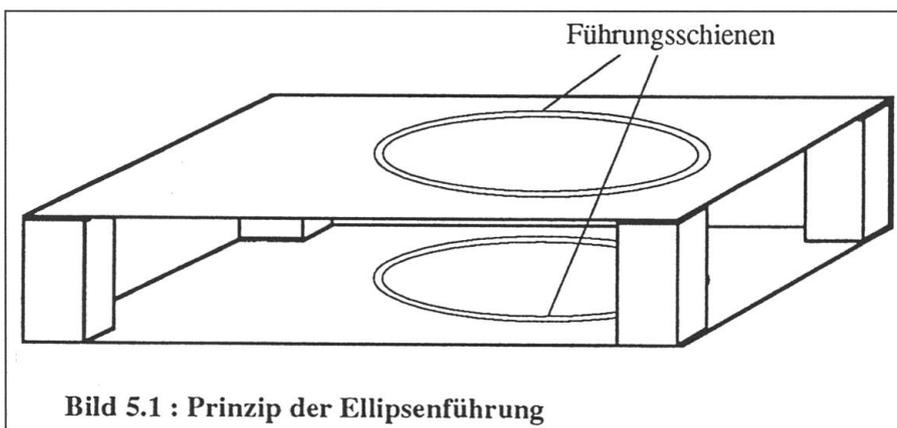
Um dies zu erreichen, müssen alle Komponenten, die in dieser Arbeit eine Rolle spielen, berücksichtigt werden. Dazu gehören primär die im ersten Teil der Arbeit hergeleiteten Ursachen der Zeitgleichung: die verschiedenen Geschwindigkeiten in der Revolution und die Schiefstellung der Erdachse. Diese zwei Punkte können jedoch nicht im Modell verwirklicht werden, ohne dass alle mit ihnen zusammenhängenden Begebenheiten ebenfalls einbedacht worden sind. Die Revolutionsgeschwindigkeit ist beispielsweise nicht konstant, weil die Erdumlaufbahn elliptisch ist. Ausserdem muss die Erde nicht nur um die Sonne kreisen, sondern auch noch um die eigene Achse rotieren, was die Konstruktion eines Modells erheblich erschwert. Weitere komplizierende Details werden im nachfolgenden Text genauer erläutert.

### 5.2. Die Erdumlaufbahn

Zuerst wollen wir uns nur um die Revolution kümmern. Um diese möglichst echt darzustellen, müssen wir verschiedene Punkte beachten:

- Die Erdumlaufbahn muss elliptisch sein, und die Sonne hat in einem ihrer Brennpunkte zu stehen.
- Die Revolutionsgeschwindigkeit ist beim Aphel langsamer als beim Perihel.

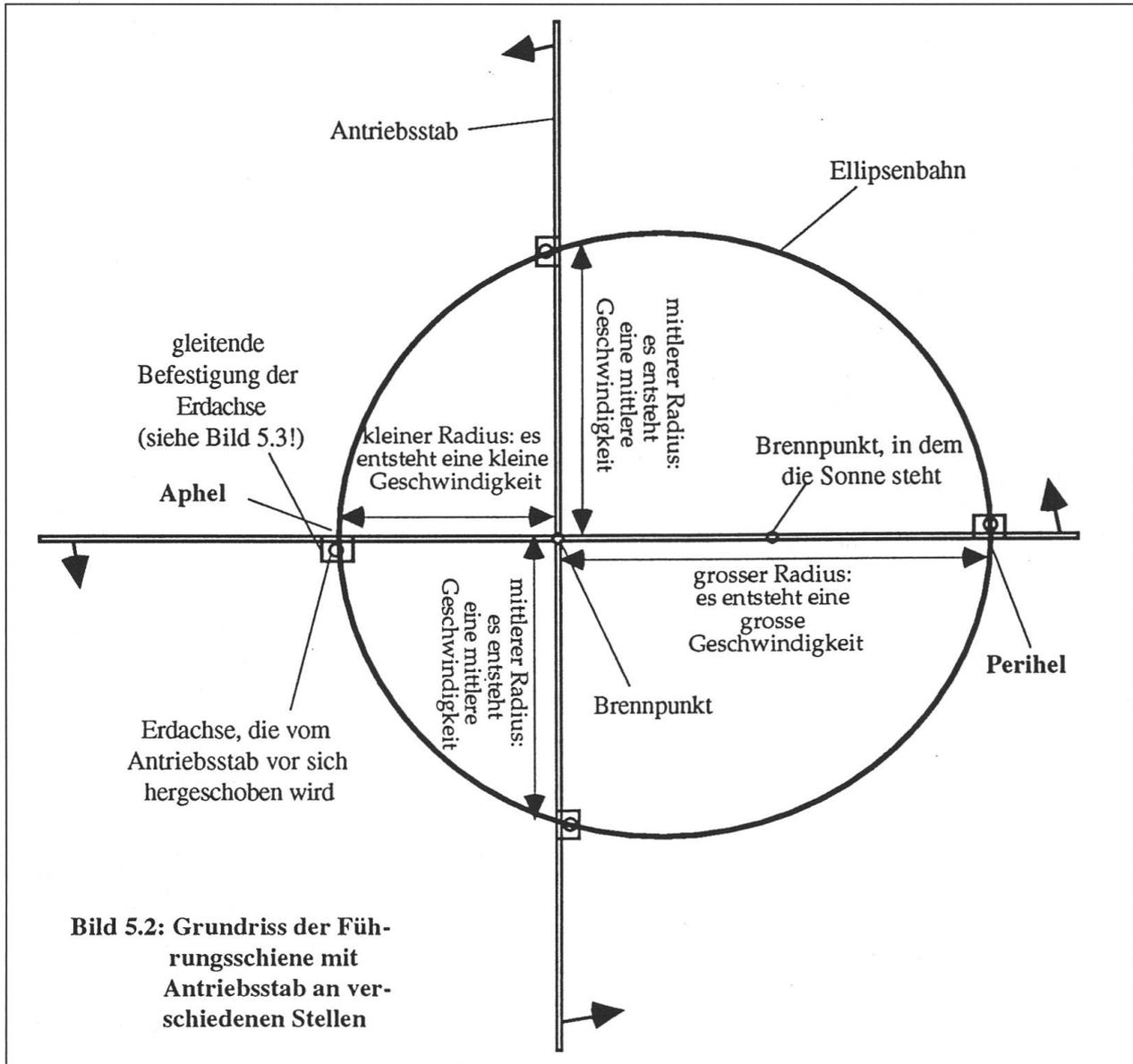
Die Verwirklichung des ersten Punktes stellt einen grundlegenden Unterschied zu bereits vorhandenen Erde–Sonne–Modellen dar. Wenn dieses erste Problem gelöst ist, ist die Konstruktion des Modells festgelegt. Es ist anzunehmen, dass es mehrere Lösungen gibt, die diese Voraussetzung für das Modell realisieren, doch nachdem man sich für eine Variante entschieden hat, müssen alle folgenden Überlegungen auf dieser Festlegung aufbauen.

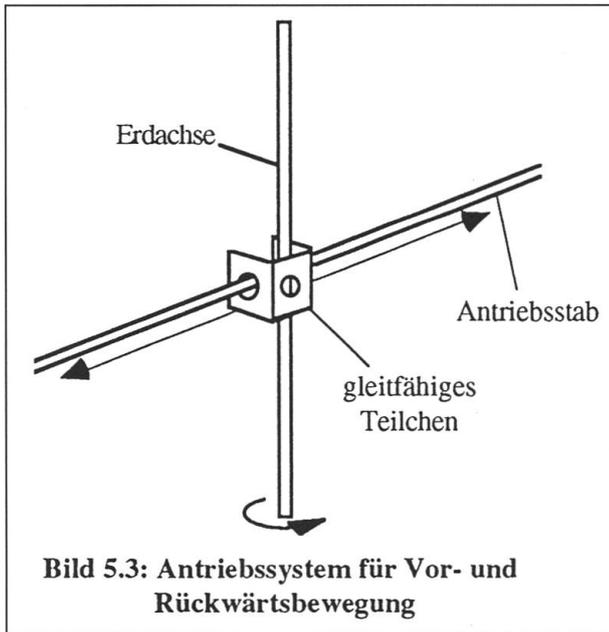


Bei den meisten Erde–Sonne–Modellen ist die Erde an einem herumdrehenden «Arm» befestigt, der die Erdkugel in einer Kreisbahn um die Sonne kreisen lässt. Da nun die Erdumlaufbahn elliptisch sein soll, muss man sich von dieser Variante lösen. Es existiert kein Punkt, der zu jedem Punkt auf einer Ellipse den gleichen Abstand hat. Daher kann die

Erde nicht an einem festen Arm fixiert sein, sondern muss eine Bewegungsfreiheit haben. Eine einfache Lösung für dieses Problem sind Führungsschienen, die in zwei parallelen Ebenen die Erdachse senkrecht in ihrer Umlaufbahn führen (Bild 5.1). Diese vertikale Achse wird von einem herumschwenkenden horizontalen Stab vorwärtsgeschoben. Da die Erdachse nicht an diesem Stab fixiert ist, kann sie verschiedene Distanzen zum Drehzentrum des Antriebsstabes einnehmen. Dabei muss man aber bedenken, dass sich die Revolutionsgeschwindigkeit der Erde trotz konstanter Drehgeschwindigkeit des Antriebsstabes verändert: Je weiter die Erde vom Drehzentrum des Stabes entfernt ist, desto schneller bewegt sie sich vorwärts. Diese Begebenheit kann man nun also geschickt aus-

nützen, um die zweite Forderung von realisieren, nämlich dass beim Perihel die Revolutionsgeschwindigkeit am grössten, beim Aphel am kleinsten sein soll. Das ist leicht zu erreichen, indem man das Drehzentrum des Antriebsstabes in die Nähe des Aphels setzt, denn dann ist die Distanz zum Perihel grösser, was eine höhere Geschwindigkeit in der Revolution der Erde hervorruft (Bild 5.2).





**Bild 5.3: Antriebssystem für Vor- und Rückwärtsbewegung**

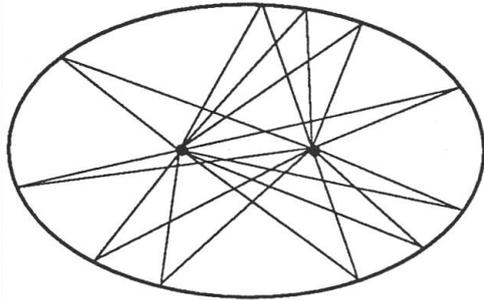
Das Problem der verschiedenen Revolutionsgeschwindigkeiten ist schon beinahe zufriedenstellend gelöst, doch bis jetzt kann die Erde nur in eine Richtung um die Sonne kreisen. Es sollte aber für Demonstrationszwecke möglich sein, die Erde vor- und rückwärts bewegen zu können. Um das zu verwirklichen, muss der Antriebsstab die senkrechte Erdachse sowohl vor sich herstoßen als auch hinter sich herziehen können. Die Erdachse ist also mit einem gleitfähigen Teilchen so zu fixieren, dass sie immer noch alle Stellen in der Umlaufbahn einnehmen kann (Bild 5.3). Wie man im Bild erkennen kann, wird es der senkrechten Erdachse auch mit diesem Teilchen möglich sein, zu rotieren. Bevor wir genauer auf die Einzelheiten der Verwirklichung der oben beschriebenen Lösung für die Revolution eingehen können, müssen wir uns noch um die anderen Voraussetzungen für ein Modell kümmern. Vorläufig beschränken wir uns auf den Antrieb durch einen horizontal herumdrehenden Stab, an dem die (senkrechte) Erdachse durch ein gleitfähiges Teilchen beweglich fixiert ist. Das Drehzentrum des Antriebsstabes soll sich irgendwo in der Nähe des Aphels befinden; die genaue Stelle wird später noch festgelegt.

### 5.3. Die Rotation

Obwohl sich die Erde in der Revolution mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortbewegt, muss die Rotation der Erdkugel gleichmässig sein. Ausserdem ist für eine möglichst echte Demonstration ein geregeltes Verhältnis zwischen der Revolution – der Verlauf eines Jahres – und der Rotation – Dauer eines nach der Sonne gerichteten Tages – erforderlich. Es lohnt sich nicht, das echte Verhältnis von 1 : 365 zu verwirklichen, da auch bei nur annähernden Werten der Zweck des Modells erfüllt ist. Trotzdem ist aber darauf zu achten, dass der Betrachter des Modells einen wahren Eindruck von dem Verhältnis gewinnt.

Die Geschwindigkeit der Erdachse in der Revolution ist zwar ungleichmässig, doch der Antriebsstab dreht sich gleichförmig: Das bedeutet, dass sowohl der Antrieb der Revolution als auch derjenige der Rotation konstant sind. Deshalb kann man die beiden Antriebe durch eine Übersetzung miteinander verkoppeln und mit einer zentralen Kurbelwelle kontrollieren. Bevor wir uns genauer mit der Verbindung der beiden Antriebe auseinandersetzen, beschäftigen wir uns zuerst nur mit dem Antrieb der Rotation.

Wir haben nun entschieden, dass der Rotationsantrieb durch ein Getriebe mit dem Antrieb der Revolution verbunden werden soll. Das bedeutet, dass die Antriebe an einem festen Ort bleiben müssen, während die Erdachse stetig um die Sonne kreist. Es steht also fest, dass sich zwischen dem fixen Antrieb der Rotation eine bewegliche Verbindung zur Erdachse befinden muss. Für diesen Zweck eignet sich eine Kette sehr gut. Es gäbe wahrscheinlich auch andere Lösungsvarianten, doch da das uns zur Verfügung stehende Material uns keine grosse Wahl bietet, wollen wir uns auf die Kette festlegen. Damit sie ihren Zweck erfüllen kann, muss die Kette immer gespannt sein. Da sie jedoch aus Metallteilen besteht und somit nicht elastisch ist, muss sie bei jeder Position, die die Erde einnimmt, auf ihre gesamte Länge beansprucht werden. (Eine elastische Kette würde bei der Verformung viel zu starke Kontraktionskräfte auslösen, so dass grosse Verluste durch die Reibung in der Ellipsenführung entstünden). Eine elegante Lösungsvariante erhält man, indem man eine besondere Eigenschaft der Ellipse ausnützt:

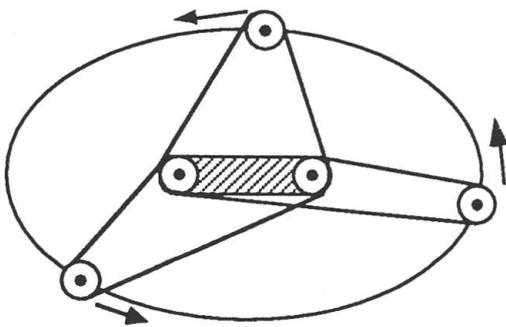


In jeder Ellipse ist die Abstandssumme von den Brennpunkten zu einem beliebigen Punkt auf der Ellipse gleich.

(Vergleiche: Gärtner- bzw. Fadenkonstruktion)

**Bild 5.4: Die Besonderheit der Ellipse**

Wenn man nun die Kette, die die Rotation antreibt, über die beiden Brennpunkte und um die Erdachse leitet, bleibt die Kette theoretisch immer gespannt.



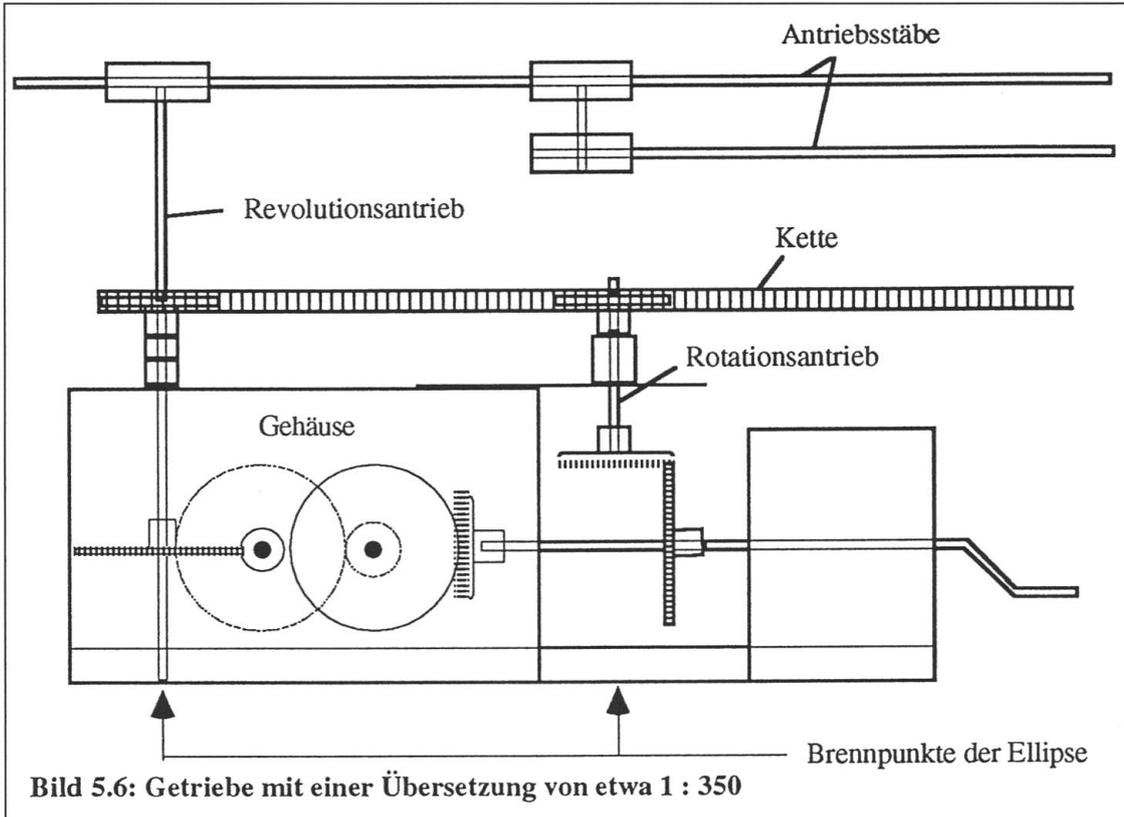
Zu den Abständen von den Brennpunkten zur Peripherie kommt noch die Verbindung zwischen den Brennpunkten und der Umfang eines Kettenrades hinzu, welche aber konstant bleiben und also keine Schwierigkeiten bereiten.

**Bild 5.5: Kettenführung in drei verschiedenen Positionen**

Schon kleine Ungenauigkeiten, die während des Modellbaus unterlaufen, bewirken, dass die Kette an verschiedenen Stellen ungespannt ist. Dadurch kann die Kette von den Kettenrädern gleiten, worauf der Rotationsantrieb unterbrochen ist. Nach Fertigstellung des Modells behoben wir jedoch diesen Fehler, indem wir eine separate Einrichtung installierten, die die Kette bei den kritischen Stellen spannt.

Nachdem wir nun sowohl das Prinzip der ungleichmässigen Revolution als auch den Rotationsantrieb festgelegt haben, können wir diese nun miteinander verbinden. Sicher ist, dass für die Kettenräder in beiden Brennpunkten der Umlaufbahn eine senkrechte Achse zu stehen hat. Um die Rotation anzutreiben, genügt es, wenn eine dieser Achsen gedreht wird. Die Frage ist nun, wo wir das Drehzentrum der Revolution plazieren sollen. Wie aus Bild 5.5 hervorgeht, kann dieses Drehzentrum ausschliesslich in den schraffierten Raum zwischen den Brennpunkten gesetzt werden, da sonst die Kette des Rotationsantriebes gestört würde. Ausserdem kann die Achse auch in jenem Brennpunkt stehen, der noch nicht für die Rotation reserviert ist. Gleichzeitig würde sie dann auch als Achse für das zweite Kettenrad dienen. Um den idealen Platz für das Drehzentrum zu finden, greifen wir noch einmal auf die Entwicklung des Revolutionsproblems zurück. Dort haben wir festgestellt, dass das Zentrum des sich drehenden Antriebsstabes möglichst nahe beim Aphel stehen sollte, damit die Unterschiede in der Revolutionsgeschwindigkeit möglichst gross sind. Im zugelassenen Bereich ist der Punkt, der dem Aphel am nächsten steht, der sonnenferne Brennpunkt. Wenn man das Drehzentrum des Revolutionsantriebes in diesen Brennpunkt plaziert, muss der Antrieb der Rotation folglichweise im andern stehen. Das Kettenrad, das um die Achse des Antriebsstabes für die Revolution dreht, darf natürlich nicht an der Achse fixiert werden, da diese nur eine Umdrehung macht, während das Kettenrad sich in der gleichen Zeit etwa 360mal dreht.

Somit sind die Standorte der Antriebsachsen festgelegt: In den Brennpunkt, in dem die Sonne steht, setzen wir den Rotationsantrieb; in den sonnenfernen Brennpunkt wird das Drehzentrum des Antriebsstabes für die Revolution plaziert. Jetzt gilt es, diese zwei Achsen durch ein Getriebe zu verbinden, so dass zwischen den Umdrehungen der Achsen ungefähr ein Verhältnis von 1 : 360 herrscht. In Bild 5.6 ist die Übersetzungsmechanik schematisch dargestellt:

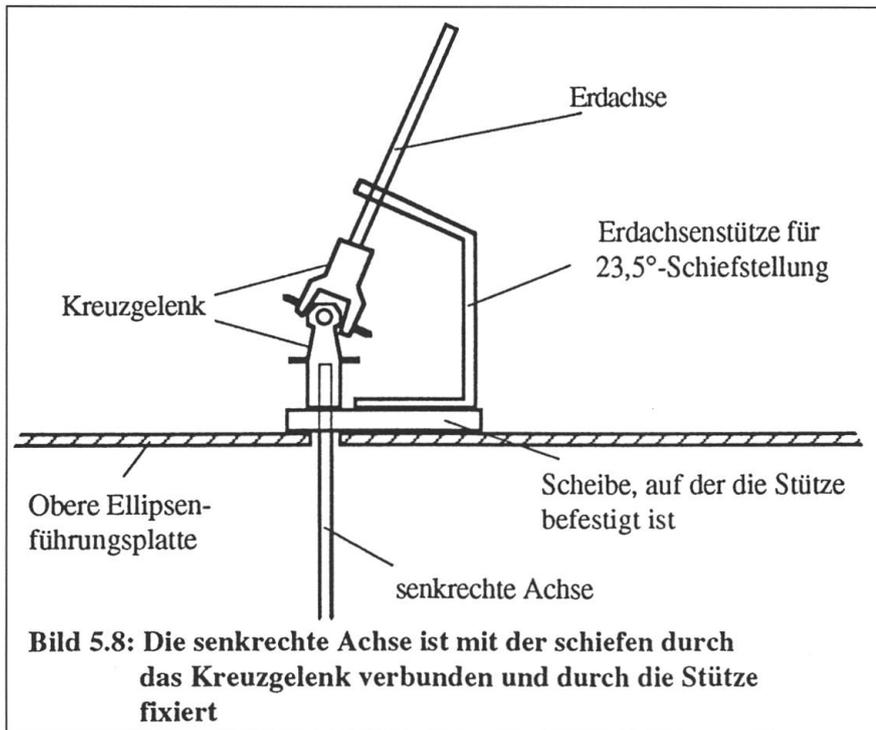


Der zweite Antriebsstab wurde zur Kontrolle der sich schiefstellenden Erdachse eingebaut. Das Kettenrad an der Achse des Revolutionsantriebs wurde später entfernt, um der Installation für die Kettenspannung Platz zu machen.

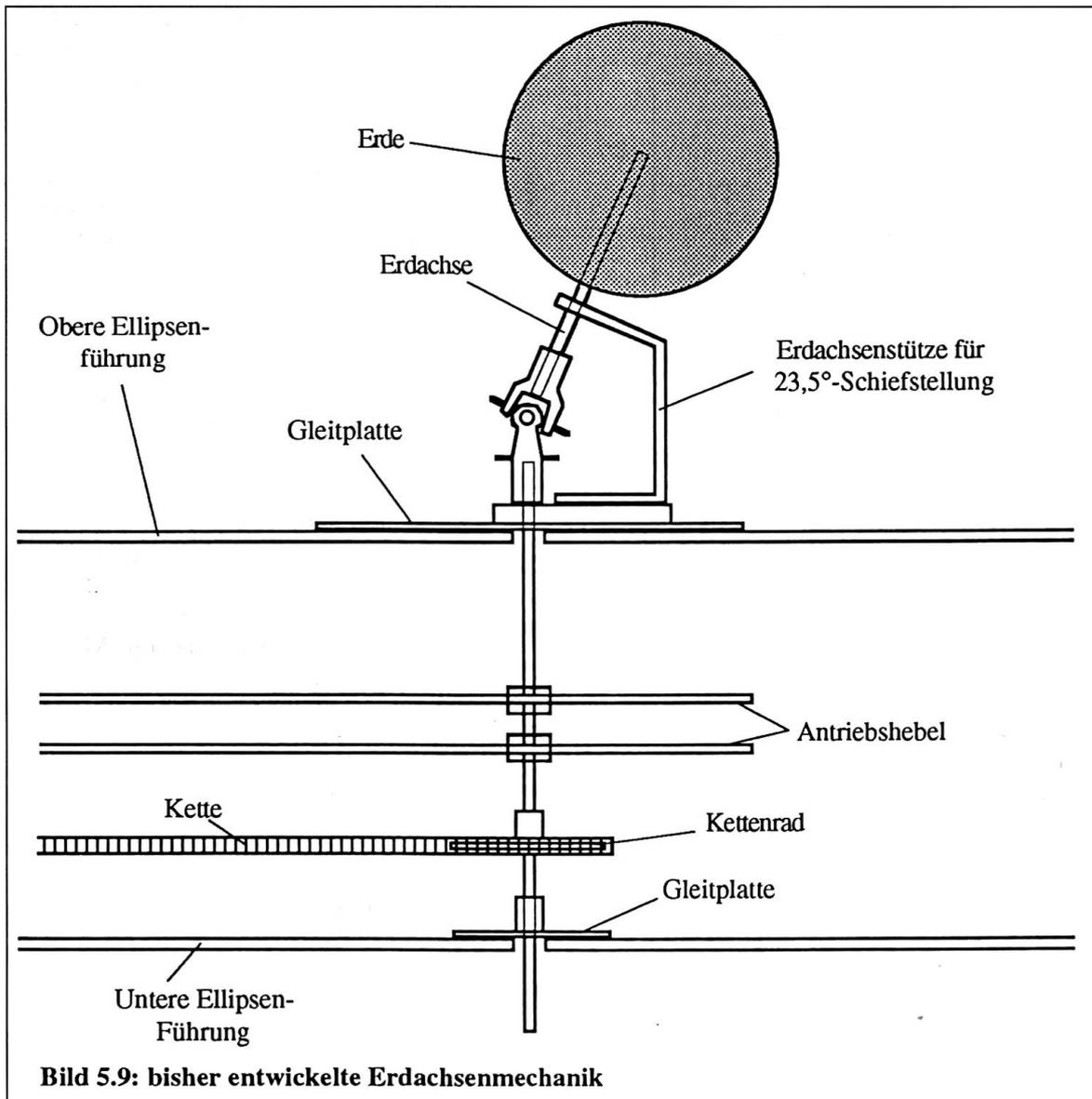
#### 5.4. Die Schiefstellung der Erdachse um $23,5^\circ$



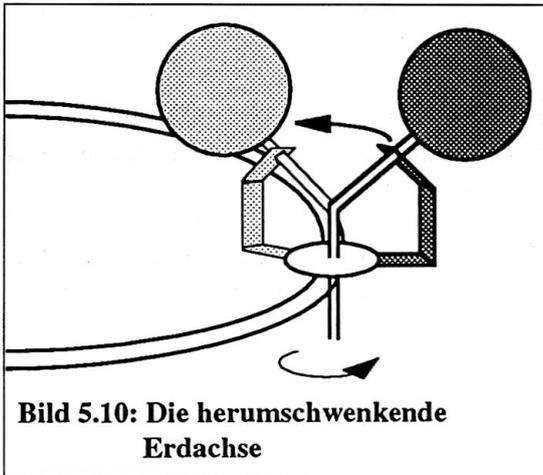
Die Achse, die in den elliptischen Führungsschienen (Bild 5.1) rotierend um die Sonne kreist, steht senkrecht zur Ebene der Umlaufbahn. Eine wichtige Ursache der Zeitgleichung ist jedoch die Schiefstellung der Erdachse. Die Achse, die in den Ellipsenführungen von den Antriebsstäben ( $\rightarrow$  siehe Bild 5.6) geschoben beziehungsweise gezogen wird, kann unmöglich schiefstehen. Sie hat sowohl wegen der Antriebsstäbe als auch wegen der Kette des Rotationsantriebes senkrecht zu stehen. Das bedeutet also, dass eine zweite, schiefe Achse – die wirkliche Erdachse – an diese senkrechte Achse angebracht werden muss. Zu diesem Zweck steht uns ein Kreuzgelenk (aus dem Stokys-Bausatz) zur Verfügung, das eine Schiefstellung bis knapp unter  $90^\circ$  erlaubt (Bild 5.7).



Damit aber die schiefe Erdachse in der korrekten Schiefstellung fixiert ist, muss sie durch einen Arm gestützt werden, der sie aber trotzdem frei rotieren lässt. Diese Stütze muss natürlich mit der revoltierenden Erdachse «mitfahren», also legen wir unter das Kreuzgelenk eine Scheibe, auf die dann die Stütze befestigt wird (Bild 5.8). Das Problem der Schiefstellung wäre also somit gelöst. Jetzt muss noch auf die schiefe Erdachse eine Styroporkugel als Erde gesetzt werden. Bild 5.9 zeigt die gesamte Erdachsenmechanik, so weit, wie sie im Moment entwickelt ist.

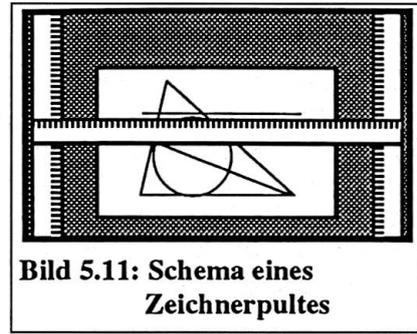


In Bild 5.9 sind über den beiden Ellipsenführungsplatten Gleitplatten eingezeichnet. Diese sorgen dafür, dass die Erdachse auf der gegebenen Höhe bleibt und dass die Revolution keine allzu starke Reibung auf der oberen Platte verursacht.



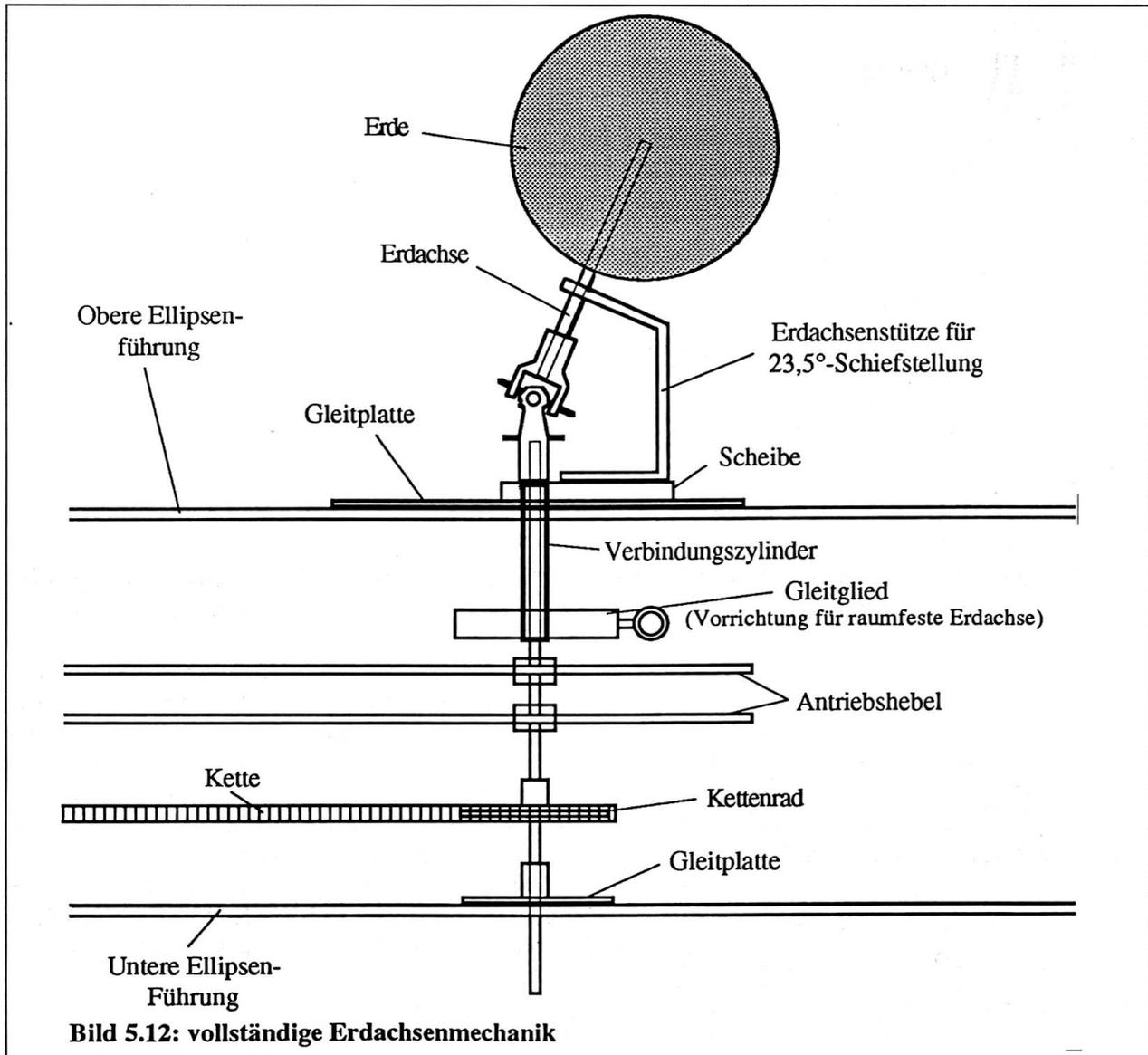
**Bild 5.10: Die herumschwenkende Erdachse**

Die Erdachse ist zwar nun in ihrer Schiefstellung von  $23,5^\circ$  fixiert, doch kann sie momentan noch umherschwanken (Bild 5.10). Dieses neu entstandene Problem gilt es nun zu lösen.



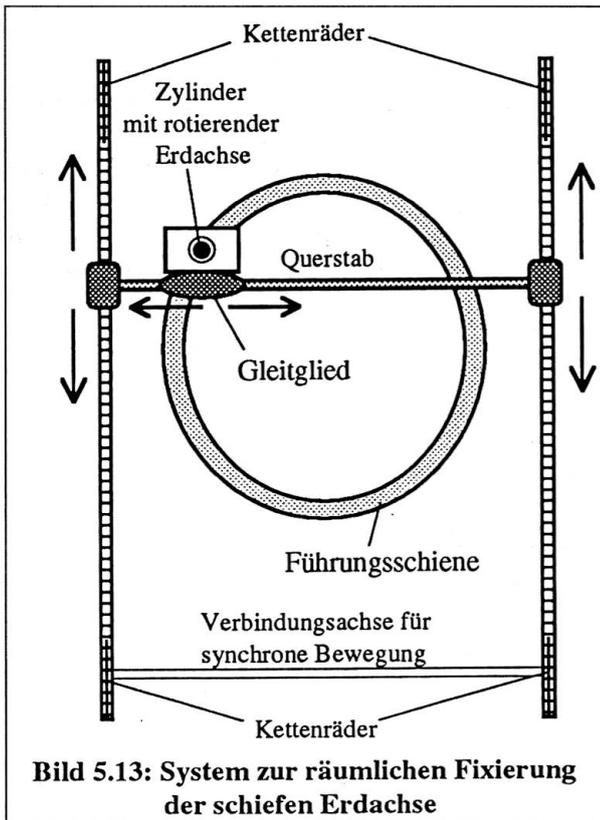
**Bild 5.11: Schema eines Zeichnerpultes**

Die räumliche Richtung der Erdachse wird durch ihre Stütze bestimmt. Deshalb muss man die Scheibe, auf der die Stütze angebracht ist, so fixieren, dass die Rotation der Erdachse nicht behindert wird. Um eine unschöne Installation zu vermeiden, müssen wir die Fixierung unter der oberen Ellipsenführungsplatte anbringen. Zu diesem Zweck befestigen wir an der Scheibe, auf der die Stütze steht, einen Zylinder, der die senkrechte Erdachse umschließt und somit nicht am Drehen hindert.



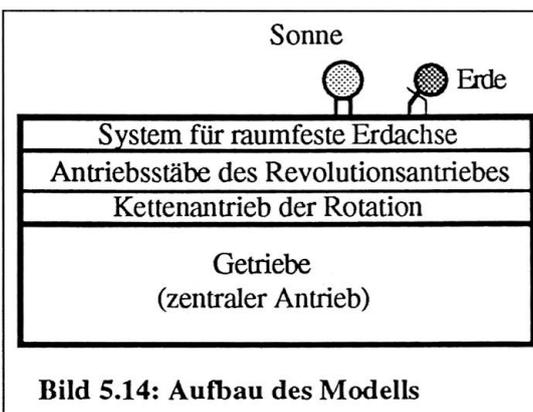
**Bild 5.12: vollständige Erdachsenmechanik**

Dieser Zylinder führt unter die Führungsplatte, wo er nun fixiert werden muss. Die Lösung dieses Problems, die wir in unserem Modell verwenden, basiert auf dem Prinzip eines einfachen Zeichnerpultes (Bild 5.11). Auf beiden Seiten der Ellipse verläuft längs je eine Kette. Damit diese sich synchron bewegen, sind zwei der Kettenräder miteinander verbunden. An jeder Kette ist ein Ende eines Querstabes befestigt. An diesem wiederum ist der Zylinder durch ein Gleitglied fixiert, das an dem Querstab hin- und hergleiten kann. Bild 5.12 zeigt die Erdachsenmechanik, zu der nun noch der Zylinder und das damit verbundene Gleitglied hinzugefügt worden ist (vgl. Bild 5.9). Die gesamte Installation ist in Bild 5.13 schematisch dargestellt. Mit diesem System wird die Erdachse auf jeder Position der Ellipse kontrolliert, und die Scheibe mit ihrer Stütze kann nicht mehr wie in Bild 5.10 drehen.



### 5.5. Das Modellgehäuse

Nun haben wir alle Bedingungen für das Modell in Betracht gezogen und die Lösungen miteinander verbunden. Jetzt bleibt nur noch die Anordnung der einzelnen Mechanismen innerhalb eines Gehäuses.

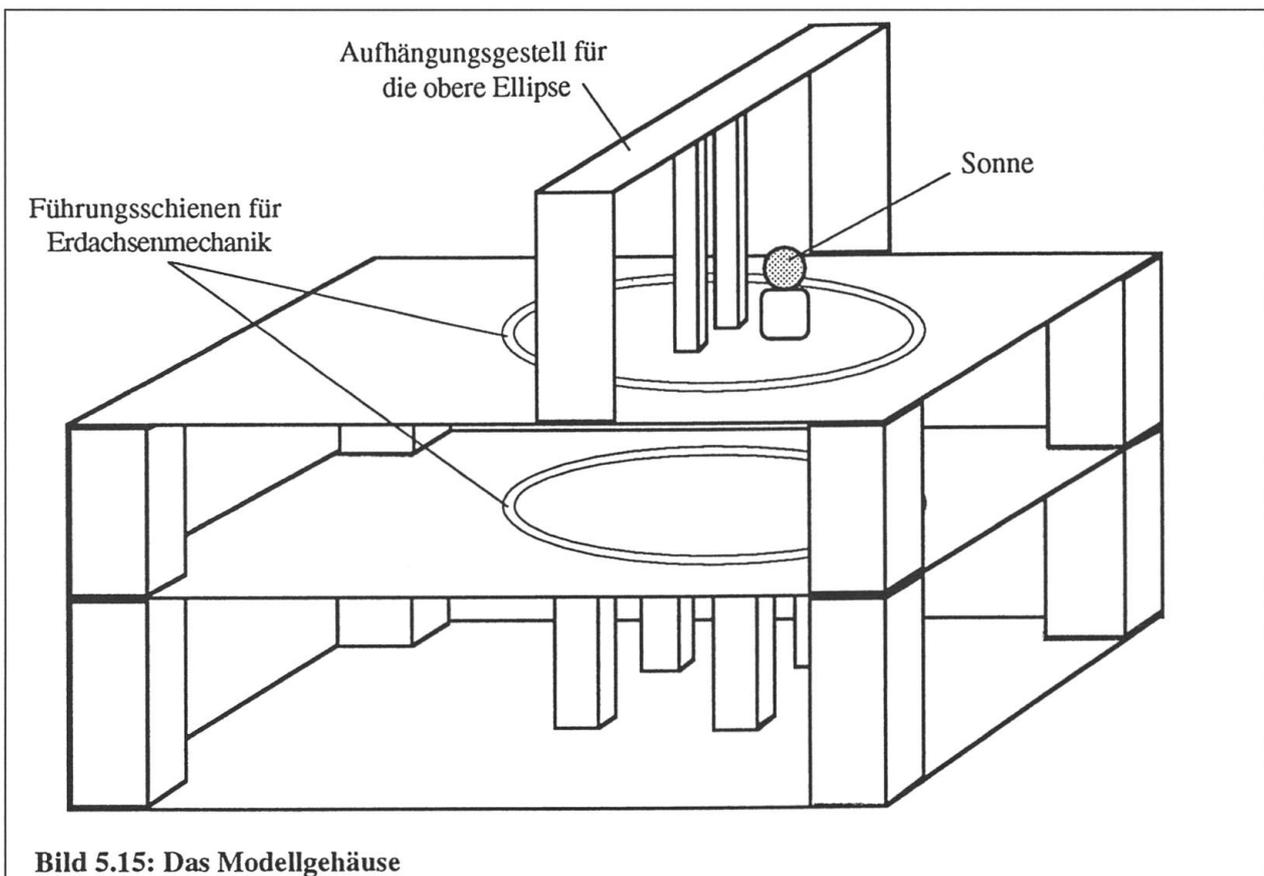


Beginnen wir mit den Ellipsenführungsplatten. Zwischen ihnen befindet sich der grösste Teil des Bewegungsapparates: die senkrechte Erdachse, die Kette des Rotationsantriebes und die Vorrichtung für die Revolution. Die beiden Antriebe sind unter den Ellipsenführungen durch das Getriebe verbunden. Oberhalb der Ellipsenplatten ist die schiefe Erdachse mit der Erdkugel zu sehen. Ausserdem plazieren wir noch eine Glühbirne als Sonne im Brennpunkt über dem Rotationsantrieb. Nun wollen wir uns noch das mittlere

Stockwerk zwischen den Ellipsenführungen genauer ansehen: Diesen Teil des Modells kann man schematisch in drei Schichten einteilen (Bild 5.14). Die Achse des Rotationsantriebes ragt über die untere Führungsplatte heraus und treibt dort die Kette an, die um die Erdachse und das Kettenrad im anderen Brennpunkt gespannt ist. Die Achse im sonnenfernen Brennpunkt – das Drehzentrum des Revolutionsantriebes – ist länger und reicht bis in die zweite Ebene hinauf, wo die Antriebsstäbe an ihr fixiert sind und die senkrechte Erdachse in ihrer Bahn vorwärtsschieben. Direkt unter der oberen Führungsplatte befindet sich die Installation für die raumfeste Erdachse. Diese Schichten kann man auch in Bild 5.12 erkennen.

Im groben Umriss gesehen, kann man den Aufbau des Modells folgendermassen darstellen: Im untersten Teil befindet sich der zentrale Antrieb der Rotation und der Revolution. Durch zwei Achsen wird dieser Antrieb in die mittlere Etage geleitet, wo sich alle beweglichen Vorrichtungen befinden. Über der oberen Führungsplatte kann man schliesslich das Resultat der unteren Mechanismen sehen: Die Erdkugel, wie sie in verschiedenen Geschwindigkeiten um die Sonne kreist, während sie sich um die eigene, schiefe Erdachse dreht.

Soweit sind noch keine Probleme aufgetreten. Doch betrachten wir einmal die Ellipsenführungen. Die Führungsplatten bestehen aus zwei Teilen, die durch die herausgesägte Schiene getrennt sind. Den äusseren Teil der Platten kann man in den Ecken des Modells mit Pflöcken stützen, doch bei der inneren Ellipsenplatte wird es schwieriger. Bei der unteren Platte gibt es kein Problem, da es neben der Antriebsmechanik ausreichend Platz für dünne Pflöcke hat, die den inneren Teil stützen können. Erst bei der oberen Platte stellt sich die Frage, wie der innere Teil der Schiene befestigt werden soll. Denn darunter muss der Raum frei sein, damit die Antriebsstäbe und die Kette nicht behindert werden. Infolgedessen muss die obere Ellipse von oben her fixiert werden (Bild 5.15).



**Bild 5.15: Das Modellgehäuse**

## Literaturverzeichnis

- [1] Schaub, Werner: Vorlesungen über sphärische Astronomie; Akademischer Verlag Geest und Portig, 1950  
 [2] Sauermost, Rolf (Red.): Lexikon der Astronomie: Die grosse Enzyklopädie der Weltraumforschung in zwei Bänden Herder Verlag (Freiburg im Breisgau, Basel etc.), 1989/90  
 [3] Brockhaus Enzyklopädie in zwanzig Bänden F.A. Brockhaus, Wiesbaden, 1968

## Anhang

In Kapitel 2 erscheint die Gleichung  $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$ , bzw. in Kapitel 3 die Beziehung

$$\tan \varphi^P = \frac{\tan \varphi}{\cos \varepsilon}.$$

Dabei soll  $W$  als Funktion von  $E$  und  $\varphi^P$  durch  $\varphi$  ausgedrückt werden. Allgemein können die Gleichungen geschrieben werden in der Form

$$\tan y = \frac{\tan x}{q}, \text{ oder mit } \cos \alpha \equiv q : \tan y = \frac{\tan x}{\cos \alpha} \Leftrightarrow y = \text{Arc tan} \left( \frac{\tan x}{\cos \alpha} \right) \quad (1)$$

(Im ersten Fall ist  $y \equiv \frac{W}{2}$ ,  $x \equiv \frac{E}{2}$ ,  $\cos \alpha \equiv \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ , im zweiten gilt

$$y \equiv \varphi^P, x \equiv \varphi, \cos \alpha \equiv \cos \varepsilon). \quad (2)$$

Differentiation der letzten Gleichung von (1) ergibt nach Seite 14:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 x} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \frac{(1 + \cos 2x)}{2}} = \frac{2 \cos \alpha}{2 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos 2x} = \frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos 2x}.$$

Da dieser Ausdruck eine periodische Funktion in  $x$  ist, kann er in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 x} = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots,$$

wobei nach den Euler - Fourierschen Formeln gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 0x dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{für } n > 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Nun ersetzen wir Kosinus und Sinus durch imaginäre Exponentialfunktionen:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \quad \text{Damit wird}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \left( \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right)} \cdot \left( \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha \cdot (e^{inx} + e^{-inx})}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \left( \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right)} dx .
 \end{aligned}$$

Wir substituieren nun die Exponentialfunktion:

$$z = e^{2ix} \Rightarrow dz = 2i \cdot e^{2ix} dx = 2iz \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2iz} dz = -\frac{i}{2z} dz . \text{ Hiermit erhält man:}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{e^{2i \cdot 0}}^{e^{2i \cdot 2\pi}} \frac{\cos \alpha \cdot \left( z^{n/2} + z^{-n/2} \right)}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \left( \frac{z + 1/z}{2} \right)} \cdot \frac{-i}{2z} dz = \frac{i}{\pi} \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{\cos \alpha \cdot \left( z^{n/2} + z^{-n/2} \right)}{-2z(1 + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha \cdot (z^2 + 1)} dz \\
 &= \frac{i}{\pi} \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{\cos \alpha \cdot \left( z^{n/2} + z^{-n/2} \right)}{\sin^2 \alpha \cdot \left( z^2 - 2 \cdot \frac{(1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} z + 1 \right)} dz . \tag{3}
 \end{aligned}$$

Der Nenner hat die Nullstellen

$$\begin{aligned}
 N_{1/2} &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \pm \sqrt{\left( \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)^2 - 1} = \frac{1 + \cos^2 \alpha \pm \sqrt{(1 + \cos^2 \alpha)^2 - (1 - \cos^2 \alpha)^2}}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha} \\
 &= \left( \frac{1 \pm \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \Rightarrow N_1 = \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \tan^2 \frac{\alpha}{2} , \quad N_2 = \left( \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \cot^2 \frac{\alpha}{2} .
 \end{aligned}$$

Nun können wir Gleichung (3) in folgender Form schreiben:

$$a_n = \frac{i}{\pi} \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{(z^{n/2} + z^{-n/2})}{\left( z - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left( z - \cot^2 \frac{\alpha}{2} \right)} dz = \frac{i}{\pi} \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{(z^{n/2} + z^{-n/2})}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} - \cot^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \left\{ \frac{1}{\left( z - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right)} - \frac{1}{\left( z - \cot^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \right\} dz ,$$

oder mit  $\tan^2 \frac{\alpha}{2} - \cot^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)^2 - (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)} = -\frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{i}{\pi} \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{(z^{n/2} + z^{-n/2})}{-\frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} \cdot \left\{ \frac{1}{\left(z - \tan^2 \frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{\left(z - \cot^2 \frac{\alpha}{2}\right)} \right\} dz \\
 &= -\frac{i}{4\pi} \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} (z^{n/2} + z^{-n/2}) \cdot \left\{ \frac{1}{\left(z - \tan^2 \frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{\left(z - \cot^2 \frac{\alpha}{2}\right)} \right\} dz. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Beide Integrationsgrenzen ( $e^0$  und  $e^{4i\pi}$ ) sind 1, d.h. für jede Funktion der Form  $g(\alpha) \cdot z^p$ ,  $p \neq -1$  gilt:

$$\int_{e^0}^{e^{4i\pi}} g(\alpha) \cdot z^p dz = g(\alpha) \cdot \frac{z^{p+1}}{p+1} \Big|_{e^0}^{e^{4i\pi}} = g(\alpha) \cdot \frac{1-1}{p+1} = 0.$$

Einzig die Terme der Form  $\frac{g(\alpha)}{z}$  bilden eine Ausnahme, denn es ist  $\int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{g(\alpha)}{z} dz = g(\alpha) \cdot \ln(z) \Big|_{e^0}^{e^{4i\pi}} = g(\alpha) \cdot 4i\pi$ .

Dies sieht man auch ein, wenn vor der Integration rücksubstituiert wird:  $\int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{g(\alpha)}{z} dz = \int_0^{2\pi} g(\alpha) \cdot 2i \cdot dx = 4i\pi$ .

Wir können also die Brüche im Integranden (4) in konvergente Potenzreihen entwickeln und nur mit der Form  $\frac{g(\alpha)}{z}$  weiterarbeiten, weil alle anderen Potenzfunktionen von  $z$  zum Integral den Betrag Null liefern.

$$\text{Es ist } \frac{1}{z - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \left\{ 1 + \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{z} + \frac{\tan^4 \frac{\alpha}{2}}{z^2} + \frac{\tan^6 \frac{\alpha}{2}}{z^3} + \dots \right\} \quad \text{und}$$

$$-\frac{1}{z - \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{1 - z \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left\{ 1 + z \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} + z^2 \cdot \tan^4 \frac{\alpha}{2} + z^3 \cdot \tan^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\}$$

Beide Reihen sind konvergent, weil der Betrag und damit sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von  $\frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{z}$  und von  $z \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2}$  kleiner als 1 ist. (Denn  $|z| = 1$  und

$$\cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} < 1, \text{ also } \left| \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{z} \right| = \left| z \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right| = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

Der Integrand (4) ist nun damit

$$-\frac{i}{4\pi} \cdot (z^{n/2} + z^{-n/2}) \cdot \left( \frac{1}{z} \cdot \left\{ 1 + \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{z} + \frac{\tan^4 \frac{\alpha}{2}}{z^2} + \frac{\tan^6 \frac{\alpha}{2}}{z^3} + \dots \right\} + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left\{ 1 + z \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} + z^2 \cdot \tan^4 \frac{\alpha}{2} + z^3 \cdot \tan^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\} \right).$$

Ausdrücke in  $\frac{1}{z} = z^{-1}$  ergeben sich nur dann, wenn der Exponent  $\frac{n}{2}$  ganzzahlig ist. Mit anderen Worten:  $a_n$  verschwindet für ungerade  $n$ .

Für gerade  $n$  erhält man im Integranden für den Term  $\frac{1}{z}$ :

$$\begin{aligned} &-\frac{i}{4\pi} \left\{ z^{n/2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\tan^n \frac{\alpha}{2}}{z^{n/2}} + z^{-n/2} \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot z^{-1+n/2} \cdot \tan^{-2+n} \frac{\alpha}{2} \right\} = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{1}{z} \cdot \left( \tan^n \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \tan^{-2+n} \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} \cdot \tan^n \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Integration dieses Ausdrucks ergibt:

$$-\frac{i}{2\pi} \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \tan^n \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{z} dz = -\frac{i}{2\pi} \cdot \tan^n \frac{\alpha}{2} \cdot \int_{e^0}^{e^{4i\pi}} \frac{1}{z} dz = -\frac{i}{2\pi} \cdot \tan^n \frac{\alpha}{2} \cdot \ln(z) \Big|_{e^0}^{e^{4i\pi}} = -\frac{i}{2\pi} \cdot \tan^n \frac{\alpha}{2} \cdot 4i\pi = 2 \tan^n \frac{\alpha}{2},$$

und damit ist:  $a_n = 2 \tan^n \frac{\alpha}{2}$ , für gerade  $n$  und  $n > 0$ .  $a_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 0x dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \tan^0 \frac{\alpha}{2} = 1$ .

Die Koeffizienten  $b_n$  erhält man analog. Für ungerade  $n$  verschwindet  $b_n$ . Aber auch für gerade  $n$

wird der Koeffizient von  $\frac{1}{z}$  Null, wenn man in (5) die durch die Pfeile markierten Änderungen vor-

nimmt:

$$-\frac{i}{4\pi} \cdot \left\{ z^{n/2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\tan^n \frac{\alpha}{2}}{z^{n/2}} - z^{-n/2} \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot z^{-1+n/2} \cdot \tan^{-2+n} \frac{\alpha}{2} \right\} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{z} \cdot \tan^n \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{z} \cdot \tan^n \frac{\alpha}{2} \right\} = 0$$

Folglich besteht die Fourierreihe nur aus den Kosinusgliedern mit geradem Koeffizienten im Argument:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 x} = 1 + 2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos 2x + 2 \tan^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos 4x + 2 \tan^6 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos 6x + \dots + 2 \tan^{2n} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos 2nx + \dots$$

$$= 1 + 2k \cdot \cos 2x + 2k^2 \cdot \cos 4x + 2k^3 \cdot \cos 6x + \dots + 2k^n \cdot \cos 2nx + \dots, \quad k = \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Im ersten Fall folgt aus den Beziehungen (2):  $\cos \alpha \equiv \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \rightarrow$

$$k = \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{1 + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}, \text{ und damit}$$

$$\frac{d(W/2)}{d(E/2)} = 1 + 2k \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{E}{2}\right) + 2k^2 \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{E}{2}\right) + 2k^3 \cdot \cos\left(6 \cdot \frac{E}{2}\right) + \dots + 2k^n \cdot \cos\left(2n \cdot \frac{E}{2}\right) + \dots = \frac{dW}{dE}.$$

Durch Integration folgt sofort

$$W = E + 2k \cdot \sin E + k^2 \cdot \sin 2E + \frac{2k^3}{3} \cdot \sin 3E + \dots + \frac{2k^n}{n} \cdot \sin nE + \dots + \text{const.}, \text{ und wegen}$$

$$W(E=0) = 0 \text{ auch } \text{const.} = 0$$

Für den Projektionsfaktor  $f(\varphi)$  ergibt sich sogleich:

$$f(\varphi) = \frac{d\varphi^p}{d\varphi} = \frac{\cos \varepsilon}{1 - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varphi} = 1 + 2 \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 2\varphi + 2 \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 4\varphi + 2 \tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 6\varphi + \dots + 2 \tan^{2n} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos 2n\varphi + \dots$$

Diesen Ausdruck belassen wir in dieser Form, da wir uns vorerst nur für den Projektionsfaktor interessieren, nicht aber für  $\varphi^p$ . Später wird  $\varphi$  durch  $W+P$  und  $\varphi^p$  durch  $(W+P)^p = W^p + \text{const.}$  ersetzt und die Integration vorgenommen. Da  $W^p$  dadurch nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, muss noch eine Anfangsbedingung für  $W^p$  definiert werden.

### **Anmerkung der Redaktion**

Markus und Andreas Müller haben, damals Schüler am Gymnasium Münchenstein, ihre Arbeit 1993 bei «Schweizer Jugend forscht» vorgelegt und sind dafür im Mai 1994 mit dem Prädikat «hervorragend» ausgezeichnet worden. Auch an europäischen Wettbewerben wurde ihre Abhandlung gebührend gewürdigt. In der Meinung, dass solche herausragenden wissenschaftlichen Leistungen von Jugendlichen einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden sollten, hat sich die Redaktion entschlossen, die Arbeit in den «Mitteilungen» zu publizieren. Als Ergänzung werden zwei Kurzarbeiten über praktische Anwendungen angefügt.

Markus und Andreas Müller  
Grellingerstrasse 5  
4142 Münchenstein