Über Stabilität dynamischer Systeme in der Mechanik des Himmels

Über

Stabilität dynamischer Systeme

in der

Mechanik des Himmels

von

Prof. **S. Mauderli.**

Literatur-Verzeichnis.

H. Poincaré: Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. T. I, II, III. Besonderer Erwähnung wert sind in T. III die Artikel: Diverses définitions de la stabilité und Mouvement d'un liquide.

Levi-Civita: Conditions du choc dans le problème restreint des trois corps in Comptes-rendus 1903 (Séance du 12 janvier).

K. Schwarzschild: Über Himmelsmechanik, Vortrag, gehalten den 24. September 1903 auf der Casseler Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte. Naturw. Rundschau 1903.

K. Bohlin: Über die Bedeutung des Prinzips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme. Acta mathematica Bd. 21, 1897.

Carl Ludwig Charlier: Vorlesungen über Mechanik des Himmels, Bd. I und II (erste Abteilung).

Tisserand: Traité de Mécanique céleste, T. I, 157, 199, 203, 391, 403, 427.

— T. II: Théorie de Maxwell pour l'anneau de Saturne, 171—180.

— T. IV: Des Perturbations du mouvement des Comètes lorsqu'elles approchent très près des Planètes, 198—216.

Jacobi: Vorlesungen über Dynamik.

Lagrange: Oeuvres complètes, T. VI, 741—749.
Mémoires de l'Académie de Toulouse, 7e série, T. VII.
Abhandlungen der Berliner Akademie für 1776.
Journal de l'École Polytechnique, XVe cahier, 1—56.
L. Picart: Discussion des surfaces de niveau dans le problème des trois corps. Bulletin astronomique 1903.
H. v. Zeipel: Sur l'instabilité du mouvement des comètes. Bulletin astronomique 1905.

I.

In unserm Sonnensystem ziehen sich alle Glieder desselben gegenseitig an, wodurch die Ellipse, welche jeder Planet oder Komet, wenn er allein existierte, um die Sonne beschreiben würde, gestört und in eine andere, verwickelte krumme Linie verwandelt wird. Diese Bahnstörungen sind indessen keineswegs Unregelmässigkeiten; denn es erfolgen alle Bewegungen nach ein und demselben unwandelbaren Naturgesetze, der allgemeinen Gravitation. Was die Grössenordnung der Ungleichheiten in der Bewegung der einzelnen Teile des Systems betrifft, so ist zu bemerken, dass dieselben wenigstens für die Hauptplaneten so klein sind, dass sie nur durch genaue Beobachtungen, die überdies einige Jahre umfassen, wahrgenommen werden können, ist doch die Masse der Planeten, verglichen mit jener der Sonne, des Centralkörpers, eine fast verschwindend kleine und ausserdem die gegenseitige Entfernung der Planeten eine bedeutende. Aber noch zwei weitere Umstände, auf welche hier schon wegen ihrer grossen Bedeutung in der nachstehend zu behandelnden Stabilitätsfrage aufmerksam gemacht werden mag, bedingen die Geringfügigkeit der Störungen, nämlich einesteils die geringen Excentrizitäten der Planetenbahnen und anderenteils deren geringe Neigungen zur Ekliptik. In beiderlei Hinsicht bilden allerdings Merkur und die meisten Asteroïden Ausnahmen; aber letztere sind so ausserordentlich klein und Merkur der gewaltigen Sonnenmasse so nahe, dass auch diese Himmelskörper keinen sehr störenden Einfluss im Sonnensystem auszuüben vermögen. Etwas anders liegen die Verhältnisse im System: Sonne — Erde — Mond; die Masse des störenden Körpers, der Sonne, übertrifft diejenige des Centralkörpers, der Erde, um das rund 324'000-fache, welcher bedenklichen Grösse allerdings die Tatsache entgegengesetzt werden kann, dass die Sonne etwa 400-mal weiter vom Monde entfernt ist, als die Erde, wodurch die störende Kraft zu einem geringen Teil der Centralkraft herabsinkt. Dennoch bewirkt die Grösse des störenden Körpers, dass diese Störungen viel mehr hervortreten, als alle andern im Sonnensystem. Vollständig anders gestalten sich jedoch die Verhältnisse bei den Kometen; bei ihnen können alle die genannten Bedingungen, welche unter den Planetenbahnen nur geringe Abweichungen von der Ellipse bestehen lassen, in Wegfall kommen; denn nicht nur bewegen sich diese Himmelskörper in stark excentrischen Curven, sondern es besitzen ihre Bahnebenen überdies auch noch ganz beträchtliche Neigungen gegen die Ekliptik. Wenn nun noch dazu der Komet in bedeutende Nähe eines Planeten von grosser Masse kommt, z. B. in diejenige Jupiters oder Saturns, so kann seine Bahn eine derart starke Störung erleiden, dass sie nicht nur gänzlich geändert wird, sondern ein nicht periodischer Komet periodisch werden kann und umgekehrt. Zur Illustration diene folgendes, der Wirklichkeit entnommenes Beispiel: Der Komet *Lexell* 1770 II kam im Jahre 1767 in parabolischer Bahn dem Jupiter nahe, wurde von diesem in eine enge Ellipse geworfen, die er zweimal in je 5,5 Jahren durchlief, bis er 1779 zum zweitenmale dem Jupiter nahe kam und wiederum eine gänzliche Änderung erfuhr.

So bedeutend die Störungen der Kometenbahnen auch sein können, so gering scheint der Einfluss der Kometenmassen auf die Planeten oder deren Monde zu sein, wenigstens konnte man einen solchen bisher in keinem Falle nachweisen. So vermochte z. B. der vorerwähnte Lexell'sche Komet nicht einmal die Monde Jupiters zu stören, obwohl er doch 1779 mitten unter ihnen durchgegangen war. Wir schliessen hieraus mit einer der Gewissheit sehr nahe kommenden Wahrscheinlichkeit, dass die unser Planetensystem durchquerenden Kometen nicht im Stande sein können, die in demselben herrschende Ordnung zu stören. Damit soll selbstverständlich nicht gesagt sein, dass bei starker Annäherung eines Kometen an einen Planeten es nicht etwa möglich wäre, dass sich das System: Sonne — Komet — Planet in der Weise umgestalten könnte, dass Sonne und Planet ihre Rollen gegenseitig tauschen, indem der Komet ein Trabant des Planeten und die Sonne zum störenden Körper wird. Aber selbst für den Fall, dass eine solche neue Gruppierung stattfinden würde, — die Störungstheorie schliesst die Möglichkeit einer solchen nicht nur nicht aus, sondern sie bedient sich sogar bei der Berechnung der speziellen Störungen der Kometen und Asteroïden vorübergehend des Vorteils, den eine derartige Annahme in den Rechnungen gestattet, — so könnte der leidende Teil des Systems doch nur der Komet sein. Was hier von den Kometen gesagt wurde, kann auch, und zwar ohne irgend welche Modifikation auf die mit ihnen so nahe verwandten Meteorschwärme übertragen werden. Wie jene, so können auch diese kaum jemals als störende Körper auftreten. Demnach verbleiben uns als störende Körper innerhalb unseres Sonnensystems nur noch die 8 Hauptplaneten und die Sonne — diese letztere allerdings nur dann, wenn es sich um die Störungen der Monde handelt. — Alle übrigen Massen werden wir in der Folge als verschwindend ansehen dürfen, die wohl Bahnstörungen erleiden, nicht aber selbst solche bewirken können.

Wenn eingangs darauf hingewiesen wurde, dass die Ungleichheiten in der Bewegung der Hauptplaneten — mit welchen wir uns in diesem ersten Teil ausschliesslich befassen werden — äusserst geringe sind, so ist damit noch keineswegs bewiesen, dass sich dieselben im Verlaufe von Jahrhunderten, Jahrtausenden oder doch Jahrmillionen nicht derart summieren könnten, dass sich die Bahncurven, die jetzt sämtlich elliptisch sind, in Parabeln verwandeln, auf welchen sich die in ihnen laufenden Planeten in ferne Himmelsräume verlieren würden. Erwägt man indessen die Art, wie sich unser Sonnensystem mutmasslich entwickelt hat und berücksichtigt den Umstand, dass die Planeten infolge der *Inkommensurabilität* ihrer Umlaufszeiten in alle möglichen relativen Stellungen zu einander kommen, so scheinen solche Totaländerungen der Bahnen kaum wahrscheinlich zu sein. Wir gewinnen vielmehr den Eindruck, das System sei für den „ewigen" Bestand eingerichtet, d. h. es sei *stabil.* Ob und in wie weit diese Vermutung richtig ist, soll durch nachstehende Überlegungen gezeigt werden. Um die Vorstellung zu fixieren, denken wir uns eine endliche Anzahl von Planeten $P, P', P'', \ldots$ mit dem gemeinschaftlichen Centralkörper S und den Bahnelementen $a, e, l, \ldots, a', e', l', \ldots, a'', e'', l'', \ldots$ Wir nehmen nun an, dass ausser der anziehenden Kraft des Centralkörpers S auf die Planeten keine andern Kräfte wirken. Dann wird gemäss den Gesetzen der Centralbewegung jeder einzelne Planet einen Kegelschnitt beschreiben, der, je nachdem das Quadrat seiner Anfangsgeschwindigkeit oder

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2 \begin{array}{c}<\\=\\>\end{array} \frac{2\,k^2\,(1+m^{(i)})}{r_0}$$

ist, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein wird, in deren einem Brennpunkt der Centralkörper steht. Lassen wir aber diese

Voraussetzung fallen und tragen der Wirklichkeit Rechnung, so geschieht, was schon eingangs bemerkt wurde: jeder Planet beschreibt unter dem Einfluss der übrigen eine Curve, die von den 3 obgenannten um so stärker abweicht, je intensiver die störenden Kräfte sind. Trotzdem kann aber seine Bewegung unter der Annahme dargestellt werden, dass während er sich in einem Kegelschnitt bewegt, die Elemente oder Abmessungen derselben in fortwährender Änderung begriffen sind.

Bedeutet nun E irgend eines der Bestimmungsstücke des von P zur Zeit t beschriebenen Momentankegelschnittes — welchen er genau innehalten würde, vorausgesetzt, dass im betrachteten Augenblick alle störenden Kräfte aufhören würden zu wirken, — so liefert die Störungstheorie für dasselbe eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{dE}{dt} = \sum Q^{i,i',i'',\ldots} \cdot \frac{sin}{cos} (il + i'l' + i''l'' + \ldots + q^{i,i',i'',\ldots}), \qquad (1)$$

in welcher $Q^{i,i',i'',\ldots}$ und $q^{i,i',i'',\ldots}$ von den Bahnelementen abhängige Grössen, $l, l', l'', \ldots$ die mittleren Längen der Planeten $P, P', P'', \ldots$ und $i, i', i'', \ldots$ beliebige ganze, positive oder negative Zahlen (0 nicht ausgeschlossen) bedeuten.

Die strenge Integration dieser Differentialgleichung dürfte indessen wohl für immer ein ungelöstes Problem bleiben, handelt es sich doch hier um die gliedweise Integration einer unendlichen Reihe, über deren Convergenz wir a priori nicht das geringste aussagen können und zwar deshalb nicht, weil solche Convergenzuntersuchungen notwendig voraussetzen müssten, dass man die Minimal- und Maximalwerte der in der Reihe auftretenden Elemente schon kennt. Aber gerade das ist es ja, was wir durch die Integration von (1) erfahren wollen. Die hier genannte Schwierigkeit bleibt auch dann noch bestehen, wenn das ganz allgemein gefasste Vielkörperproblem so modifiziert wird, wie es die in unserem Planetensystem bestehenden Verhältnisse gestatten. Indessen gelingt es hier wegen der Kleinheit der störenden Massen, der Excentrizitäten und der Bahnneigungen, welche in $Q^{i,i',i'',\ldots}$ als Faktoren auftreten, sehr gute Annäherungen für die Elemente zu erhalten. Damit scheint das Problem nun allerdings zugänglicher zu sein, allein auch jetzt würde die numerische Auswertung des Resultates auf kaum zu überwindende

Schwierigkeiten stossen, wenn uns nicht die schon früher erwähnte Kleinheit der Störungen zu Hilfe käme. Die Erleichterung besteht nämlich darin, dass man nur diejenigen Störungen zu bestimmen braucht, welche jeder einzelne Planet von jedem andern einzelnen Planeten erleidet und dies unter der Annahme, dass der andere Planet ungestört in rein elliptischer Bahn einhergeht, so dass man auf einmal immer nur 3 Körper in Rechnung zu ziehen hat, nämlich die Sonne, den störenden und den gestörten Planeten. Dieser Umstand im Verein mit der vorhin genannten Erleichterung, welche die Kleinheit der Grössen $Q^{i,i',i'',\ldots}$ nach sich zieht und die dadurch bedingte Kleinheit der Differentialquotienten $\frac{dE}{dt}$ gestatten nun eine unmittelbare Integration der Gleichung (1), welche nach den besprochenen Voraussetzungen lautet:

$$\frac{dE}{dt} = \sum Q^{i,i'} \cdot \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} (il + i'l' + q^{i,i'}). \tag{2}$$

Da nach dem Vorausgehenden die Differentialquotienten klein sein müssen, so sind auch, wenigstens für kürzere Zeit, die Veränderungen der Elemente klein, und man kann in der ersten Annäherung für a, e, l, .. in der rechten Seite von (2) constante Werte für dieselben annehmen, so dass man erhält:

$$\frac{dE}{dt} = \sum Q_0^{i,i'} \cdot \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} (il_0 + i'l'_0 + q_0^{i,i'}), \tag{3}$$

welche Gleichung, da allgemein

$$l_0 = n_0 t + \lambda_0$$
$$l'_0 = n_0' t + \lambda_0'$$

ist, integriert ergibt:

$$E = Pt + \sum \mp \frac{Q_0^{i,i'}}{in_0 + i'n_0'} \begin{matrix} cos \\ sin \end{matrix} (il_0 + i'l'_0 + q_0^{i,i'}) + E_0, \tag{4}$$

worin P dasjenige Glied von (3) bedeutet, für welches $i = i' = 0$ ist.

Der Ausdruck (4) für das Element E besteht aus 2 qualitativ durchaus verschiedenen Teilen, nämlich

1. aus dem Glied $P.t$, das man die *secularen* Störungen des Elementes nennt, und

2. aus den Gliedern, welche durch

$$\sum \mp \frac{Q_0^{i,i'}}{in_0 + i'n_0'} \cdot \frac{cos}{sin} (il_0 + i'l_0' + q_0^{i,i'})$$

dargestellt sind und *periodische* Störungen genannt werden.

Die secularen Störungen, — vorausgesetzt, dass man solche durch die Störungen der ersten Ordnung überhaupt erhält — wachsen mit der Zeit über alle Grenzen. Da aber $Q^{i,i'}$ die störende Masse als Faktor enthält und nach obigem

$$P = Q_0^{0,0} \frac{cos}{sin} (q_0^{0,0}),$$

also ebenfalls mit dieser Masse multipliziert ist, so ist zu bemerken, dass der Zuwachs der Elemente sehr langsam vor sich geht. So klein er indessen aber auch sein mag, so ist er dennoch gross genug, um nach Verlauf eines endlichen Zeitintervalls die Stabilität des betrachteten Systems in Frage zu stellen.

Betrachten wir z. B. die Planetentafel von Leverrier für die Epoche 1850, 1. Jan. 0^h mittl. Zeit, so finden wir zur Berechnung der Excentrizität des Mars die Formel

$$e = 0{,}09326113 + 0{,}00000095408\, t.$$

Angenommen, diese Formel entspreche der Wirklichkeit, so würde sich die Marsbahn nach 954462 Jahren in eine *Parabel* mit der Excentrizität 1 verwandelt haben. Nun hat aber schon Lagrange darauf hingewiesen, dass diese Konsequenz nicht richtig ist, sondern dass e nur für eine relativ kurze Zeit nach diesem Gesetze zunimmt und sich in längern Zeiträumen in ganz anderer Weise verhält. So überzeugend indessen Lagrange's Untersuchungen und die daran geknüpften Schlussfolgerungen zu jener Zeit auch gewesen sein mochten, so fehlte seinen Beweisführungen doch die Rigurosität, die Dank der Fortschritte der Mathematik auf funktionentheoretischer Grundlage den meisten derartigen Untersuchungen der letzten Jahrzehnte eigen ist, ja eigen sein muss, wenn sie die mannigfachen Prüfungen, die die Bewegungen im Weltall ihnen selbst fortwährend auferlegen, bestehen wollen. Trotz der Mängel, die den genannten Untersuchungen von Lagrange notwendig anhaften mussten, erwiesen sich indessen seine Schlussfolgerungen als durchaus richtig: *Das* *seculare Glied P.t in (4) kann, insofern unter E die Excentrizität verstanden ist, nicht unbegrenzt wachsen, dagegen wohl periodischen Schwankungen von im allgemeinen sehr langer Periode unterliegen.* Was hier zunächst nur über die Excentrizität ausgesagt wurde, hat sich in der Folge auch für die übrigen Elemente als richtig herausgestellt. In ganz besonders hohem Masse trifft dies für die grosse Axe zu; denn nicht nur ist bei dieser das seculare Glied von (4) direkt gleich Null, sondern es verschwinden auch in der zweiten Annäherung der Elemente von der Form

$$E = A_0 t + B_0 t^2 + \sum C_0 \frac{\cos}{\sin} (\alpha_0 t + \beta_0) +$$

$$+ t \, . \sum D_0 \frac{\cos}{\sin} (\alpha'_0 t + \beta'_0) + E_0 \qquad (5)$$

sowohl der Coëffizient von t als auch derjenige von t^2. Dagegen tritt hier ein anderes, der Zeit proportionales Glied auf, nämlich

$$t \, . \sum D_0 \frac{\cos}{\sin} (\alpha_0' t + \beta'), \qquad (6)$$

welches sich ähnlich verhält wie etwa die Funktion

$$y = x \, . \sin x,$$

von welcher wir wissen, dass sie bald wächst, bald abnimmt, trotzdem aber jede vorgegebene Grösse M übersteigt und auch über dieser Grösse bleibt, sobald x einen bestimmten, nur von M abhängigen Wert überschreitet.

Das Auftreten von Gliedern in der Form (6) hat darum lange Zeit grosses Aufsehen erregt und Gelehrte wie Delaunay, Simon Newcomb und namentlich Gyldén zu einer Reihe höchst interessanter und für die Stabilitätsfrage wichtiger Untersuchungen veranlasst, welche unter anderm zu dem Schlusse berechtigen: *Die durch (6) dargestellten Glieder verdanken ihr Auftreten den angewandten Rechnungsprozessen. In Wirklichkeit existieren solche weder bei der grossen Axe noch bei den übrigen Elementen.* Die Führung in der weiteren Behandlung dieser Frage, besonders auch mit Hinsicht auf Untersuchungen über die Natur der für die Coordinaten der Planeten geltenden Reihen, hat in den letzten Jahren namentlich H. Poincaré übernommen und dabei Resultate erzielt, die zur definitiven Beantwortung der Stabilitätsfrage von eminenter Bedeutung sind. Wir werden darauf noch zurückkommen.

Ist also nach obigem die Schwierigkeit der Secularstörungen überwunden, so bleibt eine zweite noch weit bedenklichere. Betrachten wir nämlich den mit

$$\frac{\cos}{\sin}\left(il + i'l' + q^{i,i'}\right)$$

multiplizierten Teil des in (4) gegebenen Integrals, so ergibt sich notwendig, dass für den Fall, dass

$$\sum \left| \frac{Q^{i,i'}}{in + i'n'} \right| < \varepsilon, \tag{7}$$

wo unter ε eine endliche Grösse verstanden sein soll, auch die periodischen Störungen eine obere endliche Grenze nicht überschreiten können. Nun ist aber (7) nur dann möglich, wenn

$$in + i'n' = \frac{iT' + i'T}{\frac{TT'}{2\pi}} \neq 0, \tag{8}$$

oder auch

$$iT' + i'T \neq 0, \tag{9}$$

ist, d. h. wenn die Umlaufszeiten T und T' des gestörten und des störenden Planeten *incommensurabel* sind. Die Bedingung (9) ist notwendig; sie ist aber auch hinreichend; denn nur wenn die Umlaufszeiten in einem incommensurablen Verhältnis stehen, wird es nicht möglich sein, unter den Zahlen i und i' solche aufzufinden, für welche genau

$$\frac{i}{i'} = -\frac{T}{T'} \tag{10}$$

ist. Immerhin muss bemerkt werden, dass es theoretisch durchaus möglich ist, die linke Seite von (9) der Null beliebig nahe zu bringen und damit die in (7) auftretenden Divisoren beliebig klein zu machen, braucht man doch nur die durch die mittleren Bewegungen oder die Umlaufszeiten der in Frage stehenden Planeten gegebenen Quotienten $\frac{n'}{n}$, bezw. $\frac{T}{T'}$ in Kettenbrüche zu entwickeln und Zähler und Nenner irgend eines Näherungswertes hoher Ordnung als i —, bezw. i' — Wert zu verwenden. Wenn nun trotz der Einführung derart gebildeter kleiner Divisoren die Glieder in (7) im allgemeinen nicht über alle Grenzen wachsen, so hängt dies im wesentlichen damit zusammen, dass mit zunehmenden Werten von i und i' die ebenfalls in (7) auftretenden Coëffizienten $Q_0^{i,i'}$ rasch abnehmen.

Zur Illustration diene folgendes, der Wirklichkeit entnommene Beispiel:

Der Planet Jupiter hat eine mittlere Bewegung $n_0 = 299'',1$. Betrachtet man die Störungen dieses Planeten von Saturn, für welchen $n_0' = 120'',5$ ist, so findet man:

$$\frac{n_0}{n_0'} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{13 + \cdots}}$$

mit den Näherungswerten

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{67}{27}, \ldots$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung derjenigen i-Werte, welche durch den zweiten Näherungsbruch geliefert werden:

$$2 n_0 - 5 n_0' = - 4'', 3,$$

so dass dieser kleine Divisor 70mal kleiner als die mittlere Bewegung des Jupiters und 28mal kleiner als die mittlere Bewegung von Saturn ist. Das entsprechende Glied in (7) wird demnach 70mal vergrössert (28mal, wenn Jupiter der störende Körper ist).

Denken wir uns den störenden Planeten des vorstehenden Beispiels soweit hinausgeschoben, bis seine Umlaufzeit statt 10755 Tage deren 10832, 5 oder genau $\frac{5}{2}$ der Umlaufszeit des Jupiters (4333 Tage) beträgt, was in einer mittleren Entfernung von 9,58320 Erdweiten der Fall ist, so werden Jupiter und Saturn nach 5 Umläufen des Jupiter, zweien des Saturn wieder genau in dieselbe relative Stellung zur Sonne zurückkehren. Was sich somit während dieser Zeit an Störungen ergeben hat, das ergibt sich im selben Betrag und Sinne auch während jedes folgenden doppelten Umlaufs Saturns. Hier heben sich die Störungen augenscheinlich nicht auf, sondern sie summieren sich. Nichts liegt somit näher als daraus zu schliessen, *dass die gestörten Körper sämtlich aus den Commensurabilitätsstellen herausgeworfen werden* oder mit andern Worten, *dass sich ein derartiges System im instabilen Zustande befinde.* Diese Schlussweise ist in der Tat umso naheliegender, als sie mit den tatsächlichen Verhältnissen in unserm Sonnensystem durchaus im Einklang steht; denn nicht nur sind die Umlaufszeiten sämtlicher Hauptplaneten gegeneinander incommensurabel, sondern es bestehen in dem breit zwischen Mars und Jupiter dahinziehenden Schwarm der Asteroiden überall in denjenigen Entfernungen von der Sonne Lücken, in denen die Umlaufszeiten in einem einfachen commensurablen Verhältnis zu der des Jupiter stehen müssten. Noch mehr! Der Saturnring, der nach Maxwell ähnlich wie der Asteroïdenring ebenfalls als ein dichter Schwarm einzelner, den Saturn als Centralkörper umkreisender Körper gedacht werden muss, enthält die sogenannte Cassinische Trennung gerade an einer Stelle, entsprechend einer Umlaufszeit, deren 2-, 3-, 4- und 6-faches bezw. sehr nahe die Umlaufszeiten der 4 innersten Monde des Saturn liefert. So berechtigt somit die obige Schlussfolgerung zu sein scheint, so ist sie trotzdem unrichtig; denn seit bald 20 Jahren weiss man, gestützt auf die scharfsinnigen Untersuchungen von Glyden, dass sich an den Commensurabilitätsstellen und ihren unmittelbaren Umgebungen ganz neue Bewegungsformen einstellen können. Zur Charakterisierung derselben bedienen wir uns, dem Gedankengang Prof. Dr. Schwarzschilds folgend, des in den Argumenten der Sinus- bezw. Cosinusglieder von (2) auftretenden Winkels

$$\zeta = il + i'l',$$

in welchen aber jetzt, entgegen der dortigen allgemeinen Annahme die l und l' so gewählt sein mögen, dass zur Zeit $t = o$ sowohl l als auch l' verschwinden. Es wird dann notwendig, wenn mit n und n' die mittleren täglichen Bewegungen bezeichnet werden,

$$\zeta = (in + i'n')\, t.$$

Dies vorausgesetzt, lässt sich nun das ganze Resultat der vorgenannten neuern Untersuchungen in der Hauptsache dahinaussprechen, dass sich der Winkel ζ unter dem Einfluss der Störungen verhält wie die Elongation eines Pendels aus seiner Ruhelage. Ist man weit von der Commensurabilitätsstelle entfernt, so verhält sich ζ ähnlich wie ein Pendel, das genügend Schwung hat, um schon nach kurzer Zeit um seine Aufhängeachse rotieren zu können. Eine Annäherung an die Commensurabilitätsstelle entspricht einer Verminderung der Anfangsgeschwindigkeit des Pendels. Es wird die höchste Stelle seiner Bahn noch erreichen, allein bereits mit einer solch geringen Geschwindigkeit, dass es zur Rotation um die Axe schon bedeutend mehr Zeit braucht, als unter der zuerst gemachten Voraussetzung. Im System Sonne-Jupiter-Saturn erfolgt ein voller Umschwung erst nach rund 850 Jahren. Man wird auch an Fälle kommen, wo das Pendel nur noch wenig Kraftüberschuss hat und den Scheitelpunkt der Bahn nur noch sehr zögernd überwindet. Der Winkel ζ wird dann eine sehr ungleichförmige, einmal rasche, dann langsame Rotation ausführen. Damit wird dann eine entsprechende Schwankung in den Winkeln l und l' verbunden sein. Schliesslich gelangt man an die Pendelbewegung von *asymptotischem* Charakter. Das Pendel entfernt sich unendlich langsam von der höchsten Stelle und schwingt unter dem Aufhängepunkt herum, um die höchste Stelle erst nach *unendlich langer* Zeit von der andern Seite her wieder zu erreichen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der in der Theorie des mathematischen Pendels auftretenden Integralformel:

$$T = \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

in welcher T die Schwingungsdauer für eine gegebene Elongation $\alpha = 2 \; arcus \; (sin = k)$ bedeutet. Da für die asymptotische Bewegung des Pendels $\alpha = \pi$ und somit $k = sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ wird, so erhält man für diese:

$$\lim_{\alpha=\pi} T = \lim_{k=1} \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \int_0^1 \frac{du}{1-u^2}$$

oder

$$\lim_{\alpha=\pi} T = \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u} \Bigg|_0^1 = \infty,$$

w. z. b. w.

Genau wie das Pendel verhält sich nun auch der Winkel ζ bei den asymptotischen Bewegungen im Planetensystem. Bei weiterer Annäherung an die Commensurabilität hat man es augenscheinlich mit dem oszilierenden Pendel zu tun. ζ umläuft den Umkreis überhaupt nicht mehr; die störenden Kräfte halten ihn fest und erlauben ihm nur, Schwingungen mit beschränkter Amplitude auszuführen. Die Astronomen nennen diese Erscheinung *Libration* und den Punkt, bezw. den Mittelwert, um welchen die Schwingungen ausgeführt werden, Librationspunkt oder gelegentlich auch Librationscentrum. Während bei den asymptotischen Bewegungsformen noch jeder Körper unabhängig von andern alle möglichen Stellungen in seiner Bahn einnehmen konnte, ist im Falle von Libration gewissermassen jeder Körper an den andern gebunden oder mit andern Worten, der Winkel $\zeta = (in_0 + i'n_0')\, t$ ist genötigt, innerhalb bestimmter Grenzen zu bleiben.

Wird die Amplitude der Libration immer kleiner und kleiner, so gelangt man schliesslich zum ruhenden Pendel. Für dasselbe findet man, wenn in der Formel

$$T = \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

die Elongation $\alpha = 2\ arcus\ (sin = k)$ Null und somit auch $k = o$ gesetzt wird,

$$\lim_{\alpha=0} T = \lim_{k=0} \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

oder

$$\lim_{\alpha=0} T = \sqrt{\frac{\lambda}{g}}\ .\ arcus\ (sin = u)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{g}} = Const.$$

Auf den Winkel ζ übertragen, heisst das wohl nichts anderes, als dass eben auch er konstant ist oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die beiden Körper nach einer bestimmten, sich immer gleichbleibenden Zeit genau in dieselbe relative Lage zu einander zurückkehren.

Wir haben es in diesem Falle mit der vollständigen Kommensurabilität der Umlaufszeiten der Körper zu tun, in welchem die obgenannte librierende Bewegungsform in eine *periodische* übergeht.

Ein interessantes Beispiel von Librationsbewegung bieten uns die 3 innern Jupitermonde:

Bezeichnen der Reihe nach n, n', n'' die mittleren Bewegungen derselben, so ist

$$n = 203^0{,}48895528$$
$$n' = 101^0{,}37472396$$
$$n'' = 50^0{,}31760833.$$

Hieraus ergeben sich nun:

$$\zeta' = (n - 2n')\,t = 0^0{,}73950736$$

$$\zeta'' = (n' - 2n'')\,t = 0^0{,}73950730,$$

oder
$$\zeta = \zeta' - \zeta'' = (n - 3n' + 2n'')\,t = 0. \tag{11}$$

Bedeuten jetzt l, l', l'' die mittleren jovicentrischen Längen zur Zeit t; λ, λ', λ'' diejenigen zur Zeit $t = to$ (Epoche), so wird

$$\zeta = (n - 3n' + 2n'')\,t + \lambda - 3\lambda' + 2\lambda''$$

oder also unter Beachtung von (11)

$$\zeta = \lambda - 3\lambda' + 2\lambda'' = Const. \tag{12}$$

Diese Constante wurde schon von Laplace zu 180° bestimmt und hat die Beobachtung die Richtigkeit dieses Wertes vollauf bestätigt.

Die Libration besteht somit darin, *dass die 3 Monde nie gleichzeitig verfinstert werden können.*

Ausser diesem Beispiel gibt es in unserem Planetensystem noch 3 höchst merkwürdige Fälle von Librationsbewegungen und zwar bei den Monden des Saturn. Hier mögen indessen nur die beiden von Struve entdeckten Librationen im System Mimas-Thetis und im System Enceladus-Dione Erwähnung finden. Für das erste dieser beiden Systeme ist der librierende Winkel

$$\zeta = 4l' - 2l - (\Theta' + \Theta)$$

und die Libration besteht darin, *dass die Conjunktionen der beiden Monde um den Mittelpunkt des zwischen den aufsteigenden Knoten ihrer Bahnen liegenden Bogens des Saturn-Aequators beständig Oscilationen ausführen und dies in der Weise, dass sich die Linie der Conjunktion nie über 45° vom Librationscentrum entfernen kann.*

Für das System Enceladus-Dione wird

$$\zeta = 2l' - l - \omega\ (= 0),$$

woraus sich ergibt, *dass die Conjunktionen dieser beiden Monde sich immer in demjenigen Punkte ereignen, in welchem Enceladus dem Saturn am nächsten ist.* Mit der Erkenntnis der Bewegungsformen im Fall der Commensurabilitäten sowohl als auch im Fall der säcularen Störungen wurde für die Störungstheorie eine ganz neue Grundlage geschaffen, auf welcher in den letzten Jahren eine Reihe grossartiger Resultate erzielt werden konnten. Eines der wichtigsten darunter ist unstreitig dasjenige, welches besagt, dass in der modernen Störungstheorie überhaupt keine der Zeit proportionalen Glieder mehr auftreten, sondern dass sich die Koordinaten der Planeten in rein trigonometrische Reihen entwickeln lassen. Die Tragweite dieses Resultates liegt offenbar; denn nun musste auch der Befangenste einsehen, dass unser Sonnensystem *stabil* sei, d. h. dass die Planeten *ewig* dieselben Regionen des Himmelsraumes durchkreuzen. Als man Ende der Achtziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts diesen Punkt erreicht hatte, durfte man das Vielkörperproblem als gelöst betrachten.

Da trat 1890 der grosse französische Gelehrte H. Poincaré mit dem Nachweis vor die Öffentlichkeit, dass die Reihen, durch welche man in der Astronomie seit fast einem Jahrhundert die Bewegung der Himmelskörper darzustellen pflegt, *im analytischen Sinne des Wortes, nicht convergieren* und dass alle Schlussfolgerungen, die hinsichtlich der Stabilität im Planetensystem aus dem Aufbau jener Reihen gezogen wurden, unzulässig seien. Dass dieser Satz Poincaré's die Astronomen in Aufregung versetzen musste, ist um so eher begreiflich, als die auf jene Reihen gegründeten Planetentafeln nicht nur die seit 150 Jahren vorliegenden, bis auf die Sekunde genauen teleskopischen Beobachtungen, sondern auch alle aus dem Altertum überlieferten Aufzeichnungen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit darzustellen vermögen.

So sehr hier augenscheinlich Theorie und Praxis auseinanderzugehen scheinen, so lassen sich beide Standpunkte dennoch gar wohl mit einander vereinigen:

Es seien etwa die beiden Reihen

$$\sum \frac{1000^i}{i!} = 1 + 1000 + 500'000 + \cdots$$

und

$$\sum \frac{i!}{1000^i} = 1 + 0{,}001 + 0{,}000002 + \cdots.$$

Trotz der sehr raschen Zunahme der Glieder der ersten dieser beiden Reihen, ist dieselbe *im analytischen* Sinne des Wortes convergent, weil von einem bestimmten Gliede an jedes folgende kleiner ist, als das vorhergehende. Was die zweite Reihe betrifft, so nennen sie die Analytiker divergent, weil von einem bestimmten

Gliede an jedes folgende grösser ist, als das vorhergehende. Die Astronomen dagegen betrachten die erste als divergent, weil die 1000 ersten Glieder zunehmen, und die zweite als convergent, weil die 1000 ersten Glieder abnehmen!

Wenn also Poincaré sagt, dass die von den Astronomen verwendeten Reihen im analytischen Sinne des Wortes nicht convergieren, so will dies eben nichts anderes heissen, als dass sie zu theoretischen Untersuchungen nicht verwendet werden dürfen, dagegen zu approximativen Wertbestimmungen wohl geeignet sein können.

Nun verhalten sich die Reihen der Störungsrechnung analog der Reihe

$$\sum \frac{i!}{1000^i} = 1 + 0{,}001 + 0{,}000002 + \cdots,$$

deren erste Glieder sehr rasch abnehmen und es können daher angenäherte Werte dadurch erhalten werden, dass man nur diejenigen Glieder mitnimmt, die noch zum abnehmenden Teil der Reihe gehören; denn es gehört zu den Eigentümlichkeiten dieser sogenannten semiconvergenten Reihen, dass die Genauigkeit des Resultates nicht von den unendlich grossen, fortgelassenen Gliedern abhängt, sondern vielmehr durch das letzte mitgenommene Glied wenigstens der Grössenordnung nach gegeben wird. Demnach würde an die Astronomen die Vorschrift zu ergehen haben, ihre Reihen nicht unbegrenzt fortzusetzen. Das tun sie nun aber ohnehin aus praktischen Gründen nicht und zwar sind sie fast ausnahmslos beim dritten Gliede stehen geblieben. Der Unterschied zwischen einst und jetzt besteht somit eigentlich einzig darin, dass die Astronomen heute das tun müssen, was ihnen früher nur die Bequemlichkeit gebot. Solange es sich also bloss darum handelt, die Störungen unserer Hauptplaneten auf Jahrhunderte hinaus und innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit darzustellen, solange wird der Astronom es kaum für notwendig erachten, seinen Rechnungen strenge Convergenzuntersuchungen über die von ihm benutzten Reihen vorausgehen zu lassen. Umso unentbehrlicher werden solche aber, sobald ihm die Reihen auch über die Grenzen Aufschluss geben sollen, innerhalb welcher die relativen Coordinaten der Planeten sich verändern können. Trotz der grossen Bedeutung, die demnach solchen Untersuchungen augenscheinlich in Stabilitätsfragen zukommen, liegt hier ein noch fast gänzlich unbebautes Feld vor uns und zwar namentlich in der Hinsicht, dass es noch nicht gelungen ist, Ausdrücke für die Coordinaten im Dreikörper-Problem zu finden, die für eine unbeschränkte Zeit ihre Gültigkeit behalten, oder wenigstens, dass bis jetzt der Beweis für die Existenz solcher Ausdrücke noch nicht erbracht werden konnte. Es scheint daher nur begreiflich, dass man versuchte, jene Grenzen auf andere Weise zu bestimmen. Von allen diesbezüglichen Versuchen hat sich indessen nur derjenige als erfolgreich erwiesen, der in der sogenannten *Hill'schen Grenzkurve* seinen Ausgangspunkt hat und durch welchen es Hill gelang, das erste Mal in der Geschichte der Mechanik des Himmels einen strengen Stabilitätsbeweis für eine Klasse Bewegungen im Dreikörper-Problem zu finden. Er zeigte nämlich, dass der Mond der Erde sich niemals mehr als bis zum Vierfachen seines jetzigen Abstandes von der Erde vom Hauptplaneten entfernen kann. Dabei wurde allerdings vorausgesetzt, dass ausser der Anziehung der Erde und der Sonne keine andern Kräfte auf den Mond einwirken, und dass ausserdem die Bahn der Erde um die Sonne genau kreisförmig sei, — alles Voraussetzungen, die mit den wirklichen Verhältnissen wohl nicht genau übereinstimmen, ihnen aber doch zu nahe kommen, als dass sie das gefundene Resultat stark zu modifizieren vermöchten.

Die Hill'sche Grenzkurve hat in den letzten Jahren eine mehrfache Anwendung erfahren, namentlich ist ihre Bedeutung für das allgemeine Dreikörper-Problem mehrfach untersucht worden. Bei all' diesen Untersuchungen hat sich indessen gezeigt, dass sich aus der Diskussion der Grenzkurve, bezw. Grenzfläche keine allgemeinen Schlüsse über die Maximal- oder Minimalabstände der einzelnen Körper des Systems ziehen lassen, nur lässt sich ziemlich unmittelbar schliessen, dass nicht alle Abstände gleichzeitig unendlich gross sein können. Betrachtet man nämlich das Integral der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{i,j}} - C, \tag{13}$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \ldots .\, 3n;\; i \neq j)$$

so erkennt man, dass wegen

$$\sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \geqq 0 \tag{14}$$

auch

$$\sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{i,j}} - C \tag{15}$$

beständig grösser oder gleich null sein muss. Daraus folgt nun aber in der Tat, *dass sich die Mitglieder unseres Planetensystems im Laufe der Zeit nicht alle unendlich weit von einander entfernen können.*

Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich, dass die überaus wichtige Frage von der Art der Grenzwerte der Coordinaten im allgemeinen Drei- und Vielkörper-Problem noch keineswegs gelöst ist; immerhin muss konstatiert werden, dass die Einführung der Hill'schen Grenzkurve im Verein mit den von H. Poincaré in seinem klassischen Werke: „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste," veröffentlichten modernen Hilfsmitteln der theoretischen Astronomie für eine endgültige und abschliessende Antwort auf die Frage von der Stabilität in unserem Planetensystem zu den schönsten Hoffnungen berechtigt. Dass dem in der Tat so ist, soll indessen erst im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit (vergl. viertes Heft der Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft) bewiesen werden.