Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: - (1944)
Heft: 4

Artikel: Note sur le calcul de la masse de la terre
Autor: Tiercy, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-897045

Note sur le calcul de la masse de la terre

Par le Prof. Dr. G. TIERCY.

1. Désignons par E la masse de la Terre, par f la constante de gravitation, par δ la densité moyenne du globe terrestre, et par R le rayon de celui-ci; R_0 sera le rayon équatorial, R_{45} le rayon mené à un point situé à 45^0 de latitude, et R_m le rayon moyen, c'est-à-dire le rayon d'une sphère de volume équivalent à celui de la Terre. Il est facile de trouver une relation simple, soit entre E et f, soit entre f et δ; de sorte qu'il suffit de trouver la valeur de l'une de ces quantités pour connaître du même coup la valeur des deux autres. Remarquons tout d'abord que la force attractive exercée sur une masse unité $\mu = 1$ vaut:

$$F \frac{E \cdot \mu}{R^2} = \mu G,$$

où G est le coefficient d'attraction, c'est-à-dire l'accélération de μ due à la force attractive de la Terre, abstraction faite de l'effet produit par la force centrifuge dans le mouvement diurne de rotation autour de l'axe terrestre. L'égalité précédente s'écrit plus simplement:

$$E \cdot f = G \cdot R^2 = \text{const.}$$

Pour déterminer la valeur numérique du second membre, considérons un point situé à 45^0 de latitude; il vient:

$$E \cdot f = G_{45} \cdot R^2_{45}. \tag{1}$$

Mais ce qu'on mesure expérimentalement, ce n'est pas G; c'est la pesanteur g, qu'il s'agit de corriger de l'effet dû à la force centrifuge. L'accélération due à celle-ci vaut, comme on sait:

$$\gamma_0 = 3{,}392 \text{ cm sec}^{-2}$$

à l'équateur, soit environ $\frac{1}{289}$ de la pesanteur elle-même.

Pour une latitude φ, l'accélération due à la force centrifuge vaut:

$$\gamma_\varphi = \gamma_0 \cdot \cos\varphi,$$

et sa composante verticale a pour valeur:

$$v_\varphi = \gamma_\varphi \cdot \cos\varphi = \gamma_0 \cdot \cos^2\varphi.$$

Ainsi, pour 45^0 de latitude, il vient:

$$v_{45} = \gamma_0 \cdot \tfrac{1}{2} = 1{,}696 \text{ cm sec}^{-2};$$

de sorte que:

$$G_{45} = g_{45} + 1{,}696 = 1{,}0017\, g_{45}.$$

Si, en outre, on veut, dans l'égalité (1), introduire le rayon moyen $R_m = 6371{,}23$ km au lieu de R_{45}, on doit poser:

$$R_{45} = k\,R_m$$

on sait d'ailleurs que

$$R_{45} = R_0 \,.\, \sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi' \,.\, \cos(\varphi - \varphi')}},$$

où φ' est la latitude géocentrique, et où $R_0 = 6378$ km. On trouve alors:

$$k = 0{,}99948;$$

$$R_{45} = 0{,}99948\ R_m.$$

L'égalité (1) s'écrit donc finalement:

$$E \,.\, f = 1{,}0007\ g_{45}\ R^2_m. \tag{2}$$

Telle est la relation cherchée entre E et f.

Pour introduire la densité moyenne de la Terre, il suffit de rappeler que:

$$E = \frac{4\,\pi}{3}\,R^3_m \,.\, \delta;$$

il vient immédiatement:

$$f \,.\, \delta = \frac{3\ g_{45}}{4\pi} \,.\, \frac{1{,}0007}{R_m} \tag{3}$$

2. Différentes méthodes ont été utilisées pour déterminer l'une ou l'autre des trois quantités E, f et δ. [1])

Une des premières consiste à déduire ces valeurs des mesures de déviation de la verticale au voisinage d'une montagne; Newton lui-même l'avait envisagée. Mais ce procédé présente de grandes difficultés, et il n'a pas donné d'excellents résultats; le meilleur de ceux-ci semble avoir été celui obtenu par James et Clarke en 1856 avec $\delta = 5{,}32$.

Une autre méthode utilise les observations d'oscillations pendulaires sur une montagne (Mendenhall 1880, Preston 1894 et 1895) ou encore au voisinage d'une masse de plomb connue (Wilsing 1889). Une troisième méthode consiste à observer les oscillations d'un pendule dans un puits profond, en tenant compte du fait qu'une couche sphérique homogène n'exerce aucune action sur un point intérieur. Airy, en 1856, a opéré au fond d'un puits de 300 m; en 1887, Sterneck a repris ces mesures dans un puits de 1000 m de profondeur.

---

[1]) Voir: Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig 1911.
Richarz und Krigar-Menzel, Abhandlungen der Berliner Akademie, 1898.
Handbuch der Physik, Band II, Berlin 1926.

Une quatrième méthode, utilisée déjà par Cavendish en 1798, est basée sur l'emploi de la balance de torsion; elle a été appliquée par de nombreux opérateurs, Baily en 1841, Reich en 1852, Cornu et Baille en 1870, Boys en 1895, Braun en 1896, Eötvös en 1896 et en 1906, Cremieu en 1909, etc.

Une cinquième méthode procède par pesées effectuées dans des conditions décrites au no. 3 ci-après. Cette méthode a été utilisée pour la première fois par Jolly en 1881; elle a été reprise par Poynting en 1894, et par Richarz et Krigar-Menzel en 1898. Nous rassemblons tous ces résultats dans le tableau suivant.

Méthode	Auteur	Année	$f \cdot 10^8$	δ	$E \cdot 10^{-27}$
Oscillations pendulaires	Mendenhall	1880	6,37	5,77	6,25
	Preston	1894	6,53	5,63	6,10
	Preston	1895	7,17	5,13	5,56
	Wilsing	1889	6,60	5,57	6,04
	Airy	1856	6,71	5,48	5,94
	Sterneck	1887	6,37	5,77	6,25
Bal. de torsion	Cavendish	1798	6,75	5,45	5,90
	Baily	1841	6,48	5,67	6,14
	Reich	1852	6,59	5,58	6,04
	Cornu et Baille	1870	6,61	5,56	6,03
	Boys	1895	6,66	5,53	5,99
	Braun	1896	6,66	5,53	5,99
	Eötvös	1896	6,65	5,53	5,99
	Eötvös	1906	6,63	5,54	6,01
	Cremieu	1909	6,67	5,52	5,97
Pesées	Jolly	1881	6,47	5,68	6,15
	Poynting	1894	6,70	5,49	5,95
	Richarz et Krigar-Menzel	1898	6,70	5,50	5,95

La moyenne des valeurs trouvées pour f est

$$f = (6{,}63) \cdot 10^{-8} \left[gr^{-1}\, cm^{3}\, sec^{-2} \right],$$

correspondant aux valeurs suivantes pour δ et E:

$$\delta = 5{,}55,$$

$$E = (6{,}01) \cdot 10^{27} \text{ gr.}$$

Ces deux dernières valeurs sont déduites de celle de f par les relations (2) et (3) où l'on fait [2]):

[2]) Handbuch der Physik, Berlin, Springer 1926, Band II, p. 464.

$$g_{45} = 980{,}630 \left[\text{cm sec}^{-2} \right],$$

obtenant ainsi les égalités (4):

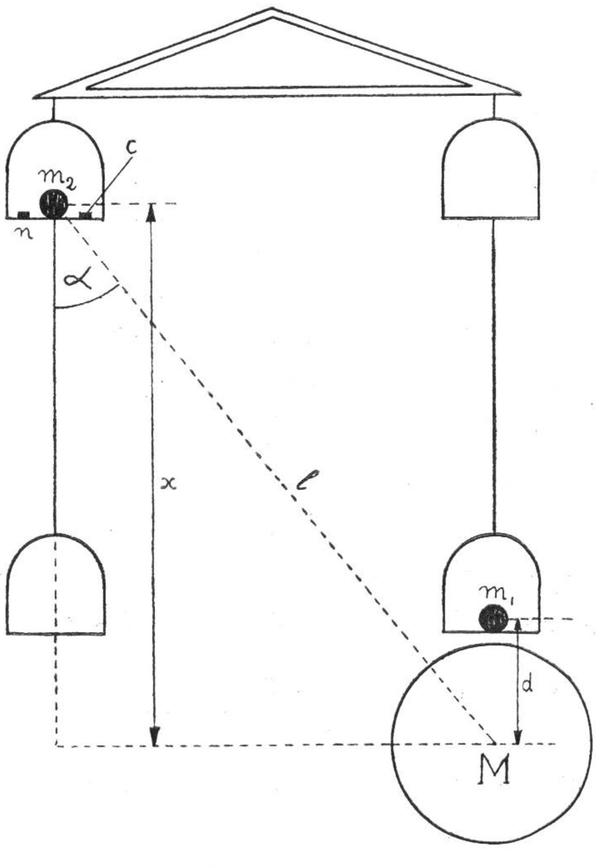
$$f \,.\, \delta = (36{,}770) \,.\, 10^{-8}, \qquad (4)$$

$$E \,.\, f = (3{,}98342) \,.\, 10^{20}.$$

La valeur $f = (6{,}63) \,.\, 10^{-8}$ est d'ailleurs considérée par Pekar [3]) comme la plus vraisemblable, tandis que Helmert [4]) préfère la valeur $(6{,}67) \,.\, 10^{-8}$.

3. Les traités d'astronomie parlent le plus souvent de la méthode de la balance de torsion, ou méthode de Cavendish, qui est certainement la moins encombrante des méthodes.

Il semble cependant indiqué d'insister davantage qu'on ne le fait sur la méthode inaugurée par Jolly, dont la théorie est très simple et qui est capable de donner des résultats d'une grande précision. Le seul inconvénient qu'elle présente est de nécessiter un espace assez étendu en hauteur.



Elle utilise une balance de précision, équipée, comme la figure ci-jointe l'indique, de deux paires de plateaux; les câbles qui suspendent la paire inférieure doivent être longs.

[3]) Pekar: Zeitschr. f. Instrumentenkunde; 1925, Bd. 45, S. 486.

[4]) F. R. Helmert: Encycl. der math. Wissensch., 1910, VI, 1. B.

Si deux masses sphériques égales m_1 et m_2 sont placées au même étage, il y a équilibre. Mais si, m_2 restant à l'étage supérieur, m_1 est placée à l'étage inférieur, l'équilibre est rompu; car la masse m_1, étant plus rapprochée du centre de la terre, est plus fortement attirée que m_2. On rétablit l'équilibre grâce à une petite masse *c* ajoutée sur le plateau de m_2; cette petite masse *c* n'a pas d'autre rôle à jouer, et n'interviendra pas dans la suite.

On place alors, sous le plateau qui porte m_1, une grosse sphère de plomb de masse M; l'équilibre est de nouveau rompu, car M attire m_1 davantage que m_2. On rétablit encore une fois l'équilibre par l'addition d'une nouvelle surcharge *n* sur le plateau de m_2.

Il est facile de vérifier (nous le ferons plus loin) que l'attraction de M sur m_2 est négligeable, à cause de la longueur des câbles de suspension des plateaux inférieurs. On peut alors dire que l'attraction de M sur m_1 est égale à celle de la Terre sur *n*. On a donc, en désignant par d la distance (facilement mesurable) entre les centres des sphères M et m_1:

$$f \cdot \frac{Mm_1}{d^2} = f \cdot \frac{E\,n}{R^2} \;;$$

d'où:

$$E = \frac{Mm_1 \cdot R^2}{n \cdot d^2} \,. \tag{5}$$

Toutes les quantités qui figurent au second membre de cette relation sont connues; et la masse de la Terre se trouve ainsi directement déterminée. Dans les expériences de Jolly, de 1881, les valeurs observées étaient:

$$\begin{aligned} m_1 &= 5{,}0 \text{ kg}, \\ M &= 5775{,}2 \text{ kg}, \\ n &= 0{,}589 \text{ milligr.}, \\ d &= 56{,}86 \text{ cm}, \\ R &= 6366 \text{ km (latitude de Munich)}. \end{aligned}$$

La formule (5) donnait alors:

$$E = (6.15) \cdot 10^{27} \text{ gr},$$

valeur de 2,5 % supérieure à celle qui est actuellement considérée comme la plus vraisemblable (voir no. 2 plus haut). Une erreur de $^{15}/_{1000}$ de milligramme dans la mesure de la petite surcharge *n* donnerait cette différence.

Cherchons pour terminer l'influence de la longueur des câbles sur la valeur de E. Pour cela, écrivons la condition d'équilibre en

tenant compte de l'action de la masse M sur la masse $(m_2 + n + c)$.
On a:

$$f \cdot \frac{n\,E}{R^2} + f \cdot \frac{(m_2 + n + c) \cdot M}{l^2} \cdot \cos \alpha = f \frac{Mm_1}{d^2} ;$$

il est évident que, dans le second terme, les surcharges *e* et *c* sont négligeables à côté de m_2; et il reste:

$$\frac{n\,E}{R^2} + \frac{m_2\,M}{l^2} \cdot \frac{x}{l} = \frac{Mm_1}{d^2} ;\ (m_1 = m_2)$$

$$E = \frac{Mm_1\,R^2\,(1 - \frac{x\,d^2}{l^3})}{n \cdot d^2} ;$$

$$E = \frac{Mm_1\,R^2}{n \cdot d^2} - \frac{Mm_1\,R^2}{n \cdot d^2} \cdot \frac{x\,d^2}{l^3} ; \qquad (6)$$

le dernier terme représente la correction à faire si l'on tient compte de l'action de M sur m_2. On vérifie facilement que cette correction est négligeable lorsque la longueur x est suffisamment grande, par exemple $x = 20$ mètres.

Le rapport de la correction au premier terme est en effet égal à $\frac{x \cdot d^2}{l^3}$; et l'angle α étant alors petit, on peut remplacer l par x; on a donc:

$$\frac{\text{correction}}{E} = \frac{d^2}{x^2} ;$$

avec $d = 0{,}5686$ m et $x = 20$ m, ce rapport vaut 0,0008. Comme la valeur de E est proche de $6 \cdot 10^{27}$ gr., la correction ne sera que de 0,005 sur le nombre 6. Il est donc inutile d'en tenir compte, et la formule (5) suffit. Si, par contre, la distance x était petite, il serait nécessaire de conserver les deux termes de la formule (6) de E.