

# Nouvelle démonstration du théorème de Coriolis avec applications à la mécanique terrestre

Autor(en): **Prior, Eugène**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): - **(1951)**

Heft 30

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-900487>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Nouvelle démonstration du théorème de Coriolis avec applications à la Mécanique terrestre\*)

Par M. le Prof. Eugène PRIOR, Ing. E. P. F., Genève

Le théorème dit de Coriolis (Paris, 1832) avait déjà été utilisé par Clairaut (1742) et par notre grand Euler (1754, théorie des turbines hydrauliques).

Dans les traités classiques, on en donne une démonstration analytique ou maintenant vectorielle ayant un caractère artificiel qui rebute les non-spécialistes.

Quoi qu'il en soit, ce théorème ou proposition est indispensable pour l'étude du mouvement d'un point mobile par rapport à un corps, système ou référentiel,  $\Sigma_1$  dit *entraîné* ou *d'entraînement*, lui-même en mouvement par rapport à un référentiel  $\Sigma_0$  considéré comme fixe. Le mouvement du point pour un observateur entraîné par  $\Sigma_1$  est le *mouvement relatif*, tandis que pour un observateur lié à  $\Sigma_0$ , c'est le *mouvement absolu*.

Nous inspirant de Poinsot et de Monge, nous allons faire voir que le théorème de Coriolis est, d'abord, essentiellement *géométrique*. Il est possible de suivre l'évolution du point mobile dans ses déplacements relatifs, d'entraînement et absolu à l'aide d'une figure simple et intuitive (*fig. 1*) en considérant d'emblée des déplacements finis et non des déplacements élémentaires comme dans les démonstrations classiques basées sur les dérivées.

Illustrons ces généralités par un petit exemple pratique. Un voyageur se trouve à bord d'un bateau qui s'éloigne d'un port suivant une ligne quelconque. Un chien va d'un point A à un autre point B du bateau. Ce dernier constitue le référentiel d'entraînement tandis que la terre ferme est le référentiel absolu. Pour le voyageur, le chemin AB, mesuré par rapport au bateau, est le déplacement relatif du chien. Les déplacements d'entraînement, tant du bateau dans son ensemble que de A et de B, ne sont connus que d'un observateur posté sur la terre ferme. En déterminant la position initiale du chien et sa position finale par rapport à la

\*) Rédigé spécialement pour la Revue «ORION» d'après une communication de l'auteur au Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences en septembre 1950 à Toulouse, comme délégué de la Société Astronomique de Genève, et une conférence du 21 déc. 1950 devant cette Société, à la salle de l'Institut National Genevois.

terre, il pourra connaître le déplacement absolu de l'animal, c.-à-d. son déplacement total rapporté à la terre.

On fera bien de noter qu'à chaque instant, le point mobile coïncide avec un point du référentiel entraîné, qui coïncide lui-même avec un point variable du référentiel absolu, de sorte qu'à tout instant, il y a trois points confondus \*). Mais, pour simplifier l'exposé, nous ne retiendrons que les divers points du référentiel absolu indiqués par des lettres différentes. En outre et pour prévenir les confusions, rappelons qu'on appelle *déplacement relatif*  $\vec{s}_r$  (vecteur polaire) le déplacement qu'aurait le point mobile si le référentiel entraîné était bloqué dans sa position initiale. Alors, ce déplacement est le même pour les deux référentiels. Quant au *déplacement d'entraînement*  $\vec{s}_e$  du point mobile, c'est le déplacement du point du premier référentiel coïncidant avec le point mobile à l'instant initial.

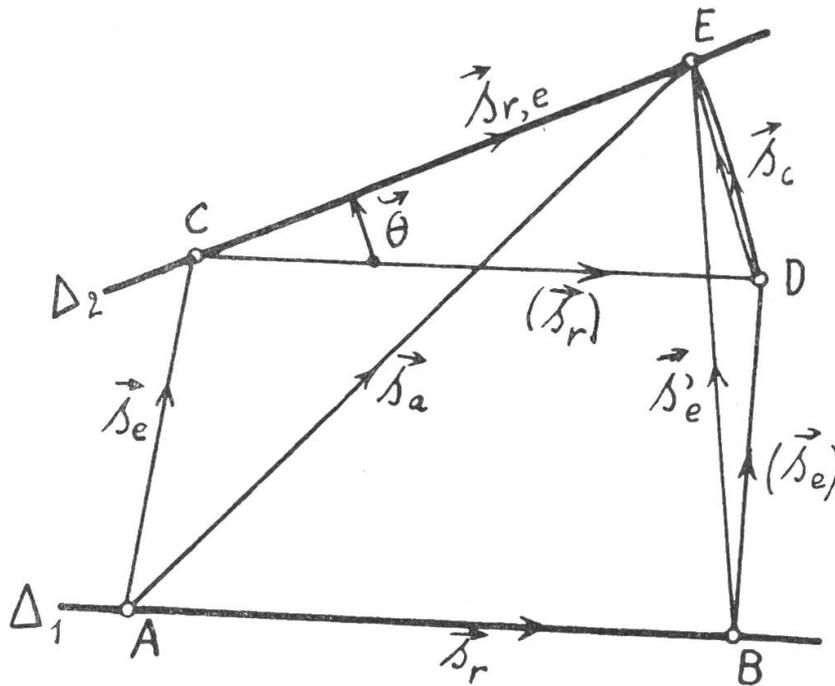


Fig. 1

Examinons maintenant la fig. 1. Le point mobile se déplace sur une droite, mobile elle-même. Si  $\Delta_1$  est la position initiale de la droite, le point mobile va de  $A$  en  $B$ . Le *déplacement relatif* est  $\vec{s}_r = \overline{AB}$ . Considérons maintenant la position finale  $\Delta_2$  de la droite. Le point de la droite qui coïncidait à l'instant initial avec le point mobile est venu en  $C$ ; le *déplacement d'entraînement* est  $\vec{s}_e = \overline{AC}$ . Si maintenant nous additionnons géométriquement le

\*) Par commodité typographique, au lieu d'utiliser la flèche droite pour désigner des vecteurs polaires, on a surligné les lettres; de même, les vecteurs axiaux ont été soulignés au lieu d'être munis d'une flèche courbe.

déplacement relatif avec le déplacement d'entraînement par la règle du parallélogramme, nous arrivons seulement en D. Pour que le mobile reste sur la droite, il faut nécessairement compléter le mouvement par une rotation d'un angle  $\vartheta$  (vecteur axial) effectuée autour de C avec  $\overline{s_r}$  pour rayon. Alors, le point mobile vient en E qui est sa vraie position finale. Le *déplacement absolu* du point est donc  $\overline{AE}$ . Le *déplacement complémentaire*  $\overline{DE}$  forme le contenu de notre théorème, montré ainsi d'une façon presque naïve. Si l'on remarque que le déplacement  $\overline{s'_e} = \overline{BE}$  n'est autre que le déplacement d'entraînement de B, on peut donner l'énoncé suivant:

*Le déplacement absolu d'un point, mobile par rapport à un référentiel d'entraînement, est égal à la somme géométrique de son déplacement relatif et du déplacement d'entraînement de l'extrémité du déplacement relatif.*

Cet énoncé en langage ordinaire est général: il s'applique aussi bien aux déplacements finis qu'aux déplacements élémentaires ou infiniment petits, tant dans le plan que dans l'espace.

Au fond, la plus grande difficulté du problème est de définir le mouvement d'entraînement d'un corps solide. Nous nous bornerons à rappeler que le mouvement d'un point quelconque P appartenant à un tel corps est équivalent à une translation (rectiligne) égale au déplacement d'un point de réduction O du corps et suivie d'une rotation autour d'un axe passant par la position finale de O. Il peut être avantageux de changer en cours de route le point de réduction; alors, la translation varie et devient égale au déplacement total de ce dernier point, alors que l'axe de rotation passe par sa position finale et reste parallèle à lui-même et que l'angle de rotation demeure constant. Ces détails sont indispensables pour résoudre des problèmes sortant du domaine élémentaire.

Nous étant familiarisés avec les idées et les résultats de base de notre proposition, nous pouvons passer à quelques formules. Tout d'abord, l'énoncé ci-dessus s'écrit (*fig. 1*):

$$1) \overline{s_a} = \overline{s_r} + \overline{s'_e}. \text{ On a identiquement:}$$

$$2) \overline{s'_e} = \overline{s_e} + (\overline{s'_e} - \overline{s_e}). \text{ Mais,}$$

3)  $(\overline{s'_e} - \overline{s_e}) = \overline{s_c}$ ; c'est le déplacement complémentaire ou de Coriolis. On a:

$$4) \overline{s'_e} = \overline{s_e} + \overline{s_c}, \text{ et}$$

$$5) \overline{s_a} = \overline{s_r} + \overline{s_e} + \overline{s_c}.$$

Autrement dit: *Le déplacement absolu d'un point est égal à la somme géométrique de son déplacement relatif, de son déplacement d'entraînement et du déplacement complémentaire.*

En soi, le déplacement complémentaire a pour expression :

$$6) \bar{s}_c = \underline{\vartheta} \times \bar{s}_r.$$

Notons sans insister qu'il s'agit d'un produit vectoriel. On voit que le déplacement complémentaire a un caractère mixte car il participe à la fois du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement, par la rotation que comprend celle-ci.

*Le déplacement complémentaire ne s'annule que dans trois cas :*

- 1° Le mouvement d'entraînement ne comporte pas de rotation et se réduit à une translation.
- 2° Le déplacement relatif est parallèle à l'axe de rotation.
- 3° Le déplacement relatif est nul (cas du repos relatif, p. ex. instantané s'il s'agit d'un point mort ou de rétrogradation).

Remarquons encore que si l'on pose :

$$7) \bar{s}_r + \bar{s}_c = \bar{s}_r, e, \text{ on a aussi :}$$

$$8) \bar{s}_a = \bar{s}_e + \bar{s}_r, e; \text{ en langage ordinaire :}$$

*Le déplacement absolu d'un point est égal à la somme géométrique de son déplacement d'entraînement et de son déplacement relatif entraîné.*

Il est instructif d'envisager ainsi notre proposition sous différents aspects.

Appliqué à des déplacements du premier ordre, on constate que le déplacement complémentaire est du second ordre et qu'il a pour valeur

$$9) d \underline{\vartheta} \times \bar{v}_r . dt = (\underline{\omega} \times \bar{v}_r) dt^2, \text{ où}$$

$$10) \underline{\omega} = \frac{d \underline{\vartheta}}{dt} \text{ est la vitesse instantanée de rotation.}$$

Le terme 9) peut être négligé pour la composition des vitesses.

Avant de passer aux *accélérations*, il est intéressant d'exprimer le déplacement absolu  $D\bar{s}$  d'un point en *série de Taylor* (d'après *Möbius*) :

$$11) D\bar{s} = \bar{v} . dt + \frac{1}{2} . \bar{a} . dt^2 + \dots,$$

où  $\bar{v}$  est la vitesse et  $\bar{a}$ , l'accélération. Celle-ci fournit un déplacement du second ordre qui, suivant l'expression heureuse d'anciens auteurs, est une *déviaton* du déplacement  $\bar{v} . dt$  du premier ordre.

La formule 11) peut s'établir comme suit :  $\bar{v}$  étant la vitesse initiale et  $(\bar{v} + d\bar{v})$  la vitesse finale, la vitesse moyenne est  $(\bar{v} + \frac{d\bar{v}}{2})$ .

Donc :

$$12) D\bar{s} = (\bar{v} + \frac{d\bar{v}}{2}) dt = \bar{v} . dt + \frac{1}{2} . d\bar{v} . dt. \text{ Mais } \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}, \\ d\bar{v} = \bar{a} . dt, \text{ d'où résulte 11).}$$

La fig. 2 traduit géométriquement les formules 11) et 12), en y remplaçant la différentielle  $dt$  par un accroissement fini  $\Delta t$ . On obtient de bonnes figures en faisant  $\Delta t$  égal p. ex. à quelques dixièmes de seconde. En même temps, la différentielle  $d\bar{v}$  prend une valeur finie  $\Delta\bar{v}$ . Ayant choisi  $\bar{v}$  et  $\bar{a}$  et leurs échelles, on obtient  $\Delta\bar{v}$  à une échelle cohérente en traçant, par l'extrémité admise  $A_1$  de  $\bar{v}$ ,  $\Delta t$  une parallèle à la droite qui joint les extrémités de  $\bar{v}$  et de  $\bar{a}$ . Une droite menée par la position initiale  $A_0$  du mobile et le milieu  $M$  de  $\Delta\bar{v}$  vient couper la parallèle à  $\bar{a}$  menée par la position  $A_1$  du premier ordre en  $A_2$ , position du second ordre. Le segment  $A_1A_2$  représente la «déviation» due à l'accélération. Le vecteur  $A_2B$ , ou vitesse finale ( $\bar{v} + \Delta\bar{v}$ ) en position finale, est la tangente à la trajectoire en  $A_2$  et permet de tracer cette dernière avec une bonne approximation dans la région considérée.

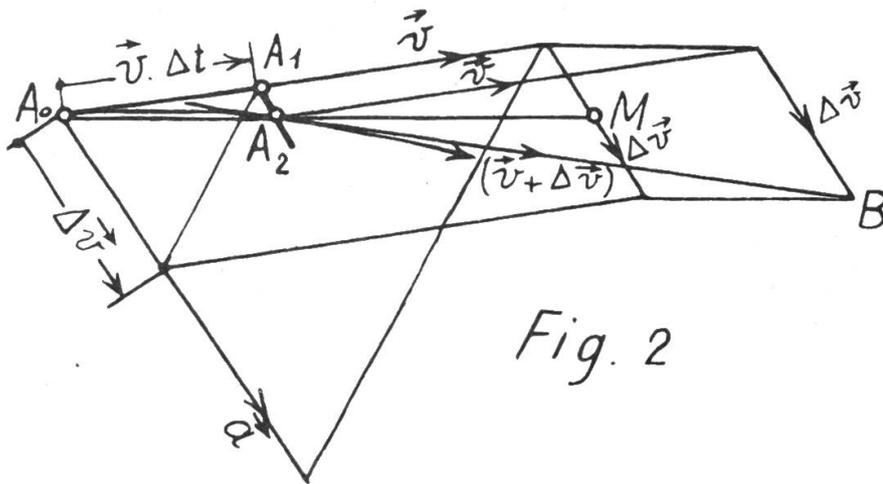


Fig. 2

Pour passer aux *accélérations* du point mobile, appelons  $\bar{D}_{sa}$  le déplacement absolu total, au second ordre près. D'une part, on a :

$$13) \bar{D}_{sa} = (\bar{v}_r + \bar{v}_e) dt + \left( \frac{1}{2} \bar{a}_r + \frac{1}{2} \bar{a}_e + \underline{\omega} \times \bar{v}_r \right) dt^2.$$

D'autre part, on a :

$$14) \bar{D}_{sa} = \bar{v}_a \cdot dt + \frac{1}{2} \bar{a}_a \cdot dt^2, \text{ d'où en égalant les termes de même ordre:}$$

15)  $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ , c.-à-d. que la *vitesse absolue est simplement égale à la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement*; en outre :

$$16) \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + 2 \cdot \underline{\omega} \times \bar{v}_r.$$

Cette dernière équation, qui concerne les accélérations et par conséquent les déplacements du second ordre, exprime le *théorème*

de Coriolis sous sa forme habituelle, soit: l'accélération absolue est égale à la somme géométrique de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et d'une accélération complémentaire ou de Coriolis égale au double du produit vectoriel de la vitesse instantanée de rotation par la vitesse relative.

Si la vitesse de rotation est constante (rotation de la terre), cela ne change rien à l'énoncé précédent.

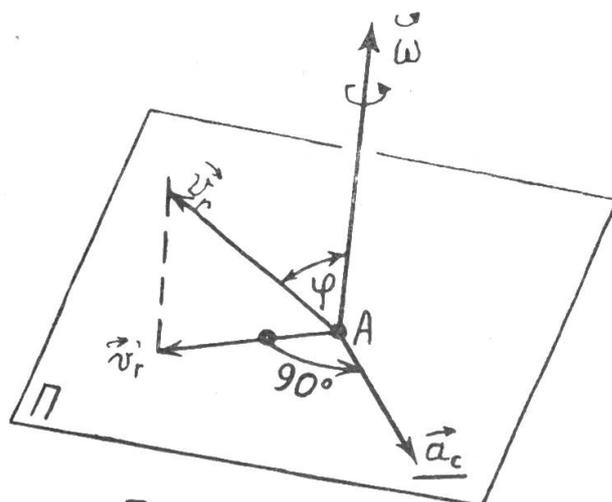


Fig. 3

Dans les applications, il est très commode de construire l'accélération de Coriolis en utilisant la règle suivante:

A partir de la position instantanée A du point mobile (fig. 3), porter la vitesse relative  $\bar{v}_r$  et l'axe instantané de rotation avec la vitesse de rotation  $\omega$ . Mener par A un plan  $\Pi$  perpendiculaire à l'axe de rotation; projeter  $\bar{v}_r$  sur ce plan, en  $\bar{v}'_r$ ; faire tourner ce dernier vecteur dans le plan, d'un angle droit et dans le sens de  $\omega$ . On aura ainsi exactement la direction de l'accélération  $\bar{a}_c$  de Coriolis. Quant à sa grandeur, elle est égale à deux fois le produit de la vitesse de rotation par la projection  $\bar{v}'_r$  de la vitesse relative. Celle-ci est égale à

17)  $\bar{v}'_r = \bar{v}_r \cdot \sin \varphi$ , où  $\varphi$  est l'angle compris entre la vitesse relative et l'axe de rotation.

Ayant passé de la géométrie des déplacements à la cinématique en introduisant le temps et en considérant les vitesses ainsi que les accélérations, il resterait à envisager le point de vue dynamique. Nous nous bornerons à mentionner qu'il suffit pour cela d'attribuer une masse  $m$  au point mobile et de tenir compte (Newton) que la résultante des forces appliquées au point est égale au produit de la masse par l'accélération absolue.

### Applications

1° Une jolie application consiste à déterminer la déviation par rapport à la verticale et par suite de l'accélération de Coriolis d'un corps pesant tombant en chute libre d'une hauteur notable. Dans ce but, nous utiliserons l'équation 16):

$$\bar{a}_a = \bar{g} = \bar{a}_T + \bar{a}_e + \bar{a}_c,$$

d'où nous tirons  $\bar{a}_T$  pour un observateur lié à la terre:

$$18) \bar{a}_T = \bar{g} - \bar{a}_e - \bar{a}_c.$$

Nous faisons les simplifications suivantes:

- La terre a une forme sphérique.
- On néglige les attractions solaire et lunaire.
- L'accélération est indépendante de la hauteur, donc constante.

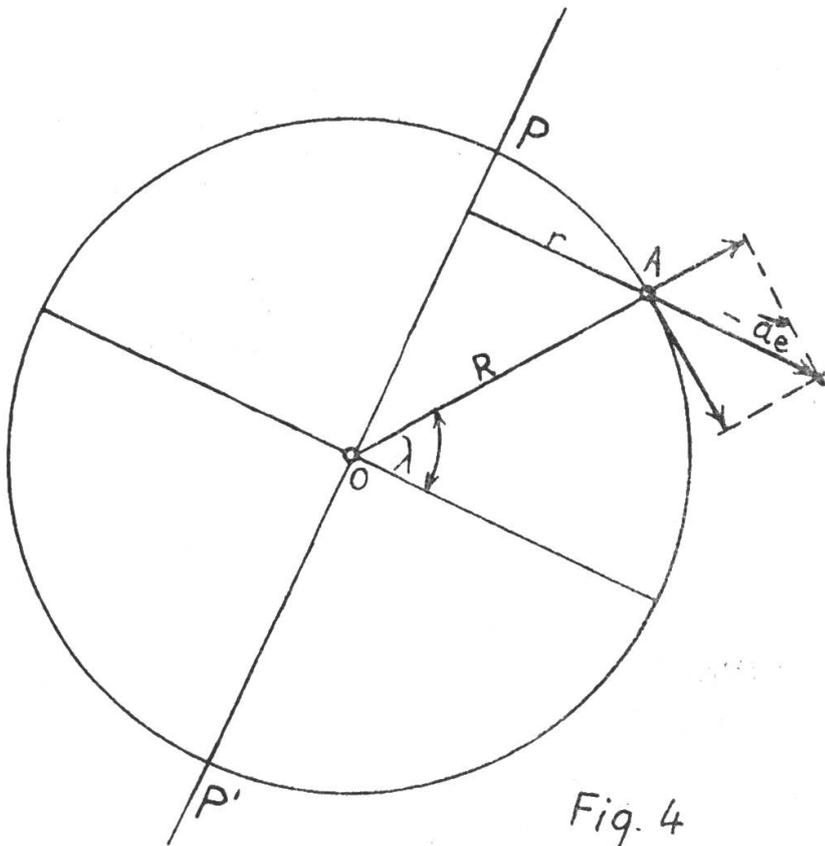


Fig. 4

Comme nous cherchons exclusivement la déviation due à  $\bar{a}_c$ , nous n'avons pas à nous préoccuper de la chute verticale produite par  $\bar{g}$ . L'accélération centrifuge  $\bar{a}_e$  est perpendiculaire à l'axe de rotation PP' de la terre (fig. 4, en projection) et elle a pour valeur

$$19) \bar{a}_e = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot R \cdot \cos \lambda,$$

où  $R = 6370$  km est le rayon terrestre;  $\omega$  est la vitesse de rotation de la terre (v. infra) et  $\lambda$  la latitude du lieu d'expérience.

La composante verticale de  $-\bar{a}_c$  est contenue implicitement dans la valeur locale de  $\bar{g}$ , tandis que sa composante horizontale est comprise automatiquement dans la direction locale du fil à plomb. Au total, nous n'avons pas nous préoccuper de l'accélération centrifuge.

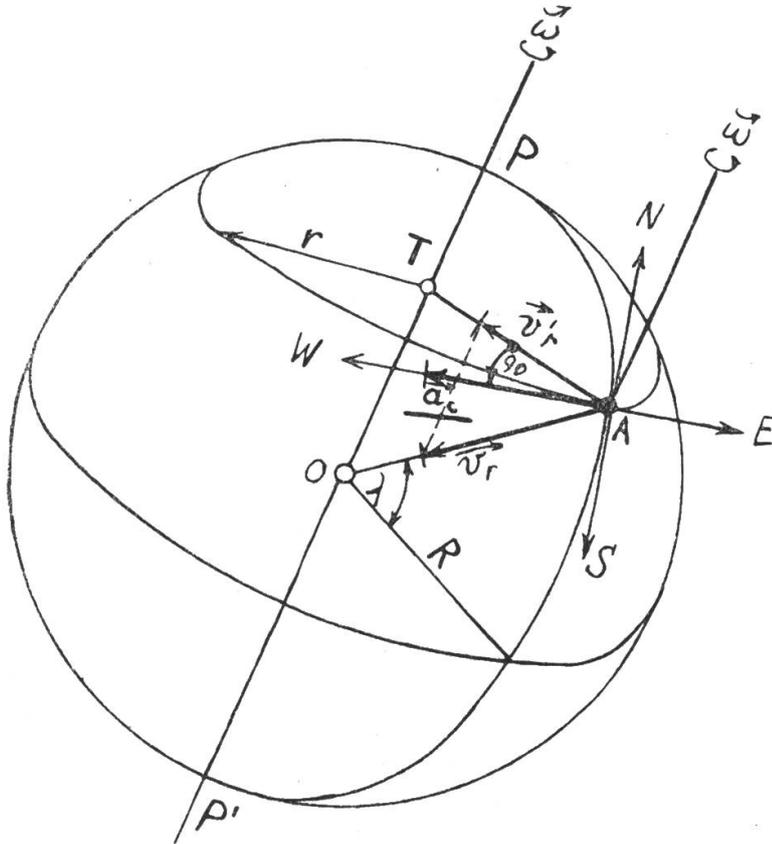


Fig. 5

Pour trouver la direction de l'accélération  $\bar{a}_c$  de Coriolis (fig. 5), il suffit d'appliquer la règle ci-dessus. La vitesse relative  $\bar{v}_r$  est pratiquement dirigée vers le centre O de la terre. Sa projection  $\bar{v}'_r$  sur le plan du parallèle est orientée suivant le rayon AT de celui-ci. En faisant tourner  $\bar{v}'_r$  d'un angle droit dans le sens de  $\omega$ , on voit que l'accélération de Coriolis est dirigée vers l'ouest ( $\bar{W}$ ). Par conséquent, pour l'observateur terrestre, il y aura une accélération dirigée vers l'Est (éq. 18), qui a pour valeur:

$$20) a_c = 2 \omega \cdot v'_r = 2 \omega \cdot v_r \cdot \cos \lambda.$$

Or, pratiquement:

21)  $v_r = g \cdot t$  (mouvement de chute suivant la verticale), donc:

22)  $a_c = 2 \omega g \cdot \cos \lambda \cdot t$  (accélération de Coriolis).

Comme, d'autre part,  $a_c = \frac{dv_c}{dt}$ , on trouve en intégrant 22) :

23)  $v_c = \omega g \cdot \cos \lambda \cdot t^2$ . Mais  $v_c = \frac{ds_c}{dt}$ , d'où en intégrant 23) :

24)  $s_c = \frac{1}{3} \cdot \omega g \cdot \cos \lambda \cdot t^3$  (fig. 7).

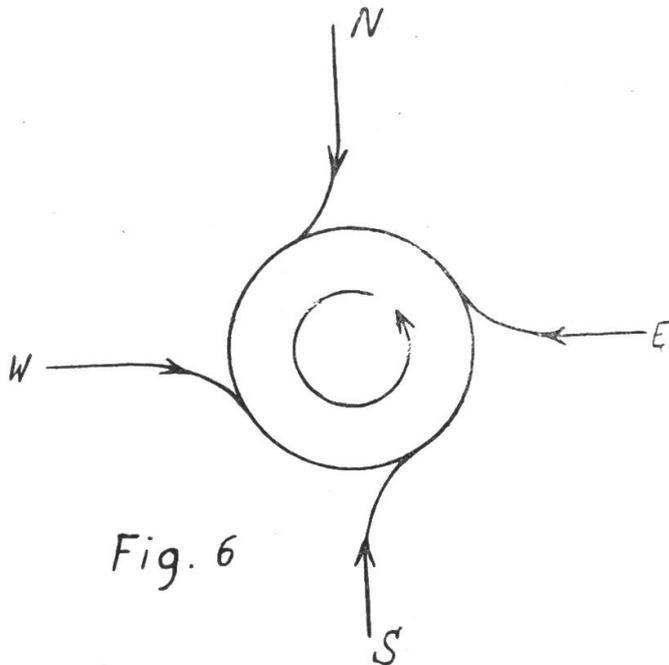


Fig. 6

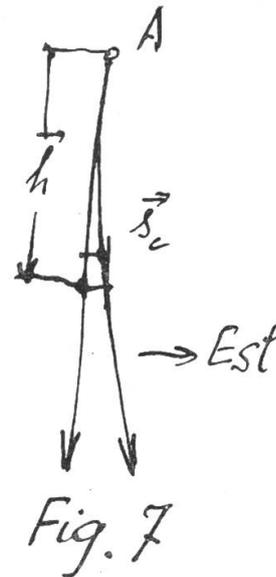


Fig. 7

On peut remplacer avantageusement ce procédé connu en utilisant l'équation 11) de Taylor-Moebius sous forme finie limitée à trois termes, soit :

$$25) \bar{s}_c = \bar{v}_c \cdot t + \frac{1}{2} \bar{a}_c \cdot t^2 + \frac{1}{6} \bar{j}_c \cdot t^3.$$

Tous les vecteurs étant parallèles puisque dirigés vers l'Est, on peut se contenter de leurs valeurs absolues. L'équation 22) donne la *suraccélération de Coriolis*.

$$26) j_c = \frac{da_c}{dt} = 2 \cdot \omega g \cdot \cos \lambda = \text{constante.}$$

Pour  $t = 0$ , les valeurs initiales de  $v_c$  et de  $a_c$  s'annulent; 25) se réduit donc à :

$$27) s_c = \frac{1}{6} j_c \cdot t^3 = \frac{1}{3} \omega g \cdot \cos \lambda \cdot t^3, \text{ identique à 24).}$$

Dans ces conditions, on peut énoncer le résultat sous la forme remarquable suivante qui nous paraît nouvelle :

*En chute libre, un corps pesant partant du repos tombe verticalement avec l'accélération  $g$  constante et il est dévié vers l'Est suivant une suraccélération constante égale à  $2 \cdot \omega g \cdot \cos \lambda$ .*

Comme la hauteur de chute est 28)  $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$ , on peut écrire

24) sous la forme:

$$29) s_c = \frac{\omega}{3} \cdot \cos \lambda \sqrt{\frac{(2h)^3}{g}},$$

qui donne la déviation en fonction de la hauteur de chute.

*Exemple numérique:*

hauteur de chute:	$h = 500 \text{ m}$
vitesse de rotation de la terre:	$\omega = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{ [rad/sec]}$
latitude de Genève:	$\lambda = 46^\circ 11' 59,3''$ , soit environ: $46^\circ 10'$ ; $\cos \lambda = 0,693$ ; $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$

On trouve (calculs à la règle)  $s_c = \underline{\underline{\text{env. } 170 \text{ mm.}}}$

Telle est, dans notre cas, la valeur de la déviation vers l'Est due à l'accélération ou à la suraccélération de Coriolis. Des essais effectués dans des puits de mines ont confirmé des résultats analogues qui prouvent, d'une manière il est vrai un peu compliquée, la rotation de la terre.

2° L'accélération de Coriolis donne lieu à des *cyclones* (fig. 6) tournant dans le sens direct ou trigonométrique (sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre) pour l'hémisphère Nord, en sens opposé dans l'hémisphère Sud. Le centre est en dépression et en translation, les masses d'air courent au niveau du sol ou de la mer et sont déviées par l'accélération de Coriolis. Pour les anti-cyclones, c'est le contraire.

3° Un autre phénomène dû à l'action prolongée de l'accélération de Coriolis est l'inégalité d'usure des deux rives des fleuves et rivières.

4° Dans la théorie dynamique du *pendule de Foucault*, on tient compte de l'accélération de Coriolis.

5° En outre, notons encore que l'accélération de Coriolis joue un rôle important dans l'étude du mouvement de nombreux mécanismes et machines, en particulier dans les turbines, ce qui établit un nouveau lien entre la mécanique terrestre et la mécanique céleste.

Nous serions heureux si cette petite étude incitait quelques lecteurs à se familiariser avec le mouvement relatif normal, avant d'aborder les théories à la mode de la relativité. Nous partageons l'opinion de l'illustre opticien français Ch. F a b r y («Physique et Astrophysique», Paris, Flammarion 1935, p. 143): les brillantes découvertes de l'Astrophysique ne doivent pas faire oublier la Mécanique céleste et l'Astronomie de position qui n'ont pas dit leur dernier mot, surtout si on les associe avec l'Astrophysique.