

Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 38 (1980)
Heft: [1]: Sondernummer = numéro spécial = numero speciale

Artikel: 1. Koordinatensysteme der Astronomie
Autor: Schilt, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-899578>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. Koordinatensysteme der Astronomie

Die Astronomen beziehen ihre Beobachtungen und Messungen am Himmel auf Koordinatensysteme verschiedenster Art, denn nur so sind Beobachtungen mitteilbar und Messungen vergleichbar. Man unterscheidet kartesische und Polarkoordinaten. Die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems stehen je normal zueinander und auf ihnen sind die gleichen Einheiten abgetragen. Bei Polarkoordinaten gibt man die Entfernung vom Nullpunkt an und die Richtungen mit Winkeln, die besondere Namen tragen. Es ist zweckmässig, die verschiedenen Namen und Begriffe an Hand von Figuren anschaulich einzuführen.

1.1 Ebene Systeme

Wir betrachten zunächst ebene Systeme und führen rechtwinklige Koordinaten x , y und Polarkoordinaten r , α ein, um die Lage eines Punktes P bezüglich des Systems festzulegen. (Fig. 1a und Fig. 1b)

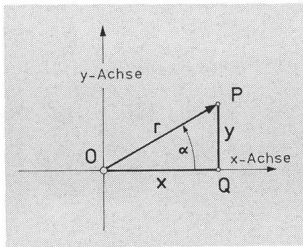


Fig. 1a: im Gegenuhrzeigersinn orientiert

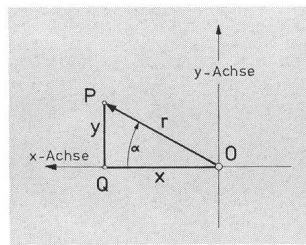


Fig. 1b: im Uhrzeigersinn orientiert

Polarkoordinaten und rechtwinklige Koordinaten können unabhängig von der Orientierung mit Hilfe der folgenden Beziehungen ineinander umgewandelt werden.

$P \rightarrow R$: Polar- in rechtwinklige Koordinaten
Dazu dient das Formelsystem:

$$1.11 \quad \begin{aligned} r \sin \alpha &= y \\ r \cos \alpha &= x \end{aligned}$$

Man setzt voraus, dass $0 \leq r < \infty$ und dass $-\infty < \alpha < +\infty$ sind. Die Funktionen *sinus* und *cosinus* haben je eine Periode von 360° . Für Werte von α , die sich um ein ganzes Vielfaches von 360° unterscheiden, erhalten wir das gleiche Paar (y, x) .

Das Formelsystem 1.11 kürzen wir mit dem Symbol ab:

$$1.12 \quad (\alpha, r) R = (y, x)$$

Dieses Symbol ist angepasst an die Art, wie viele Taschenrechner die Gleichungen 1.11 zu berechnen gestatten. Man gibt die beiden Werte α und r ein und drückt eine Tastenfolge, welche mit «to rectangular» bzw. mit $P \rightarrow R$ oder P/R bezeichnet ist, der Rechner bestimmt hierauf das geordnete Paar (y, x) .

Beispiel: Aus $\alpha = 64^\circ$ und $r = 7$ cm sollen x und y berechnet werden.

$$\begin{aligned} y &= 7 \text{ cm} \cdot \sin 64^\circ = 6.2916 \dots \text{ cm} \\ x &= 7 \text{ cm} \cdot \cos 64^\circ = 3.0686 \dots \text{ cm} \end{aligned}$$

abgekürzt geschrieben:

$$(64, 7) R = (6.2916 \dots, 3.0686 \dots)$$

speziell:

$$\begin{aligned} (114, 1) R &= (0.9135 \dots, -0.4067 \dots) \\ &= (\sin 114^\circ, \cos 114^\circ) \end{aligned}$$

$R \rightarrow P$: Rechtwinklige in Polarkoordinaten

Die Umwandlung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten ist gedanklich etwas komplizierter als umgekehrt, weil bei gegebenen x und y es noch unendlich viele Lösungen für den Winkel α gibt, die sich alle um ein ganzes Vielfaches von 360° unterscheiden. Damit wir eine eindeutige Lösung erhalten, schränken wir das Intervall für α ein; es soll der Winkel α innerhalb von $-180^\circ \leq \alpha \leq +180^\circ$ liegen und r soll positiv sein. Unter diesen Bedingungen ist die Lösung des Systems nach r und α eindeutig, wenn x und y nicht beide zugleich null sind. Formelmässig kann diese Lösung folgendermassen zusammengefasst werden:

$$1.13 \quad \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= r \\ x \neq 0, y = 0 & \quad 90^\circ(1 - x/|x|) = \alpha \quad ^1) \\ x = 0, y \neq 0 & \quad 90^\circ y/|y| = \alpha \\ x \neq 0, y \neq 0 & \quad \arctan(y/x) + 90^\circ(1 - x/|x|)y/|y| = \alpha \end{aligned}$$

dabei ist noch vorausgesetzt, dass die Einschränkung gilt:

$$-90^\circ \leq \arctan(y/x) \leq +90^\circ.$$

Die positive Zählrichtung für den Winkel α ist bestimmt durch jene Drehung um 90° , welche die positive x -Achse in die positive y -Achse überführt.

Es ist offensichtlich zweckmässig, dieses Formelsystem abzukürzen; wir schreiben

$$1.14 \quad (y, x) P = (\alpha, r)$$

Auch dafür bieten die wissenschaftlichen Taschenrechner eine Tastenfolge an, die mit «to polar» bzw. mit $\text{INV } P \rightarrow R$ oder $R \rightarrow P$ abgekürzt wird.

In der Mathematik werden Symbole wie P und R als *Operatoren* bezeichnet. Wir werden diesen Begriff auch benutzen. Darunter ist für uns nichts anderes zu verstehen, als was bei der Auflösung der Systeme 1.11 oder 1.13 zu tun ist.

Etwa: Es ist das Wertepaar (y, x) gegeben, P heisst, man bestimme daraus α und r .

Beispiel:

$$\begin{aligned} x &= -5 & R \rightarrow P & \quad r = 13 \\ y &= -12 & & \quad \alpha = -112.62^\circ \dots \end{aligned}$$

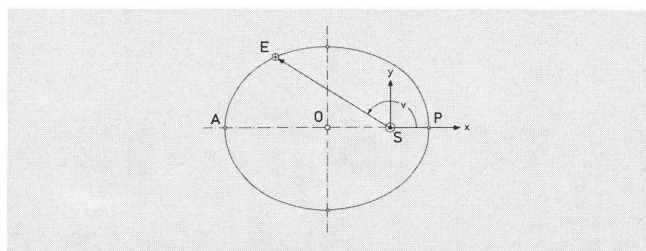
oder abgekürzt:

$$(-12, -5) P = (-112.62^\circ \dots, 13)$$

¹⁾ Anmerkung: $|x|$ heisst Betrag von x oder absoluter Wert von x .

Beispiele:

1) *Ekliptikebene*: Bewegung der Erde um die Sonne.
Koordinatenursprung: Zentrum der Sonne

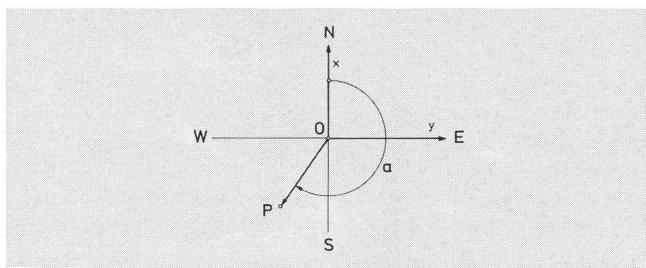


r : = SE: Entfernung Sonne-Erde
 α : = v : wahre Anomalie
 x -Achse: Gerade Sonne-Perihel P (sonnennächster Punkt der Bahn)

Orientierung: im Gegenuhrzeigersinn, wenn vom nördlichen Ekliptikpol her gesehen.

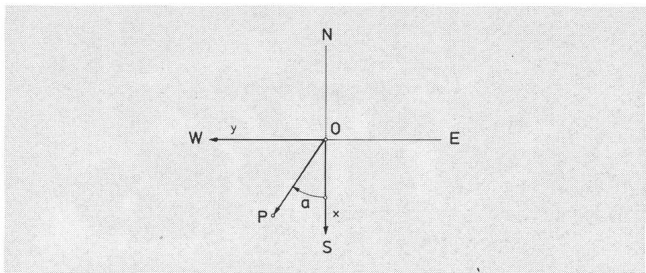
2) *Horizontebene*

Windrose der Geometer und Navigatoren



x -Achse: gegen Norden N
 y -Achse: gegen Osten E
 r : Entfernung OP
 α : = a : Azimut (von geogr. Nord aus gemessen) ¹⁾

Windrose der Astronomen



x -Achse: gegen Süden S
 y -Achse: gegen Westen W
 r : Entfernung OP
 α : = a : Azimut (von geogr. Süd aus gemessen) ¹⁾

beide Systeme sind im Uhrzeigersinn orientiert.

1.2 Dreidimensionale Koordinatensysteme

Im dreidimensionalen Raum ist eine dritte Koordinate notwendig. x, y, z sind die drei rechtwinkligen Koordinaten und p, α, β die dazugehörigen Polarkoordinaten; es sei $p > 0, -90^\circ \leq \beta \leq +90^\circ$ und $-180^\circ < \alpha \leq +180^\circ$. Es gibt linksorientierte und rechtsorientierte Systeme: die beiden Systeme zeichnen sich durch eine Grundebene x, y und eine dazu normale Achse (z -Achse) aus.

Orientierung

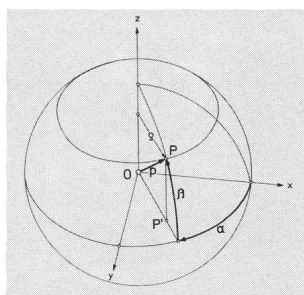


Fig. 1.f

links

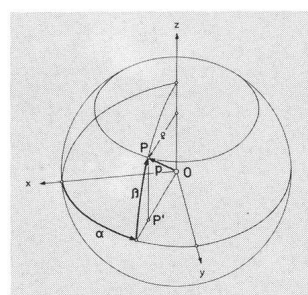


Fig. 1.g

rechts

Neben der Entfernung $p = OP$ führen wir noch den Radius des Parallelkreises zur Grundebene durch P ein: $q = OP', q = p \cos \beta$, wobei P' die Orthogonalprojektion des Punktes P auf die x - y -Ebene ist. Bei beiden Systemen gilt für den Übergang von p, α, β nach x, y, z :

$$z = p \sin \beta \quad ; \quad q = p \cos \beta$$

$$1.21 \quad \begin{aligned} x &= q \cos \alpha = p \cos \beta \cos \alpha \\ y &= q \sin \alpha = p \cos \beta \sin \alpha \end{aligned}$$

Unter zweimaliger Anwendung des Operators R ist der Übergang $P \rightarrow R$:

$$1.22 \quad \begin{aligned} (\beta, p) R &= (z, q) \\ (\alpha, q) R &= (y, x) \end{aligned}$$

Und entsprechend findet man für den Übergang $R \rightarrow P$

$$1.23 \quad \begin{aligned} (y, x) P &= (\alpha, q) \\ (z, q) P &= (\beta, p) \end{aligned}$$

Wenn zu den angegebenen Intervallen für p, α, β noch vorausgesetzt wird, dass $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ sei, liefern beide Übergänge je eindeutige Resultate.

¹⁾ Anmerkung: Man beachte, dass geogr. Nord (bzw. Süd) sich um die Meridiankonvergenz μ von Karten Nord (bzw. Süd) unterscheidet.

$$a_{\text{geogr.}} = a_{\text{Karte}} + \mu$$

Beispiele

B 1. Orientierung auf der Erdkugel

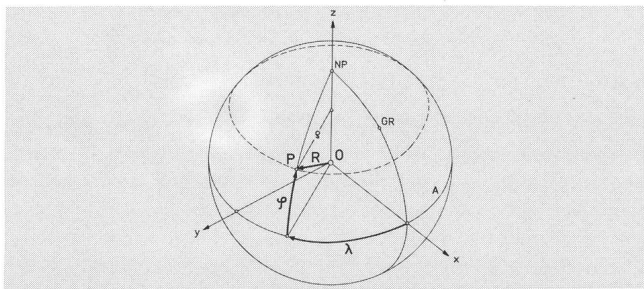


Fig. 1.h

- P: Punkt auf der Erdkugel
 Gr: Greenwich
 $p = R$: Erdradius
 $\alpha = \lambda$: geogr. Länge (westlich Gr. pos)
 $\beta = \varphi$: geogr. Breite
 z-Achse: Erdachse Richtung Nordpol NP
 x-Achse: in der Äquatorebene und im Meridian von Greenwich
 y-Achse: in der Äquatorebene und im Meridian $\lambda = 90^\circ$ West
 $x = R \cos \varphi \cos \lambda$
 $y = R \cos \varphi \sin \lambda$
 linksorientiert $z = R \sin \varphi$

Beispiel: Nullpunkt der schweizerischen Landesvermessung:

$$\begin{aligned}
 R &= 6378.816 \text{ km} & x &= 4\,317.5788 \text{ km} \\
 \lambda &= -7^\circ 26' 22.5'' & y &= -563.7890 \text{ km} \\
 \varphi &= 46^\circ 57' 07.9'' & z &= 4\,661.5393 \text{ km}
 \end{aligned}$$

B 2. Systeme des Horizontes

v : Vektor auf der Visierlinie, falls es nur auf die Richtung ankommt, kann dessen Betrag beliebig gewählt werden, z.B. auch $v = 1$

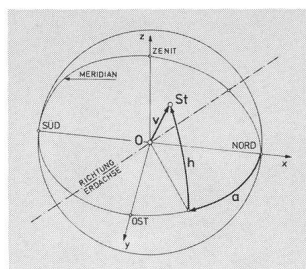
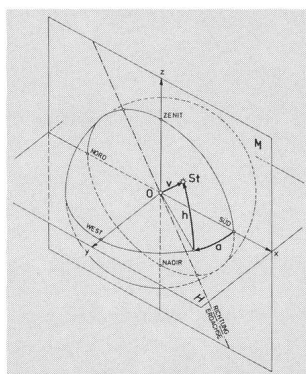
Fig. 1.i: System der Astronomen
 M: Meridianebene
 St: Stern

- $\beta = h$: Höhe (Elevation)
 $\alpha = a$: Azimut
 $x = v \cos h \cos a$
 $y = v \cos h \sin a$
 $z = v \sin h$
 z-Achse: Richtung zum Zenit
 x-Achse: Richtung Süd
 y-Achse: Richtung West

Fig. 1.k: System der Navigatoren und Geometer

- x-Achse: Richtung Nord
 y-Achse: Richtung Ost

Beide Systeme sind linksorientiert.



Wenn φ die geographische Breite des Beobachtungsortes O ist, hat die Richtung der Erdachse im System der Astronomen die Koordinaten: $h = \varphi$ und $a = 180^\circ$.

B 3. Systeme des Äquators

System $\bar{K}$: Ortsäquator-System (an den Ortsmeridian gebunden)¹⁾

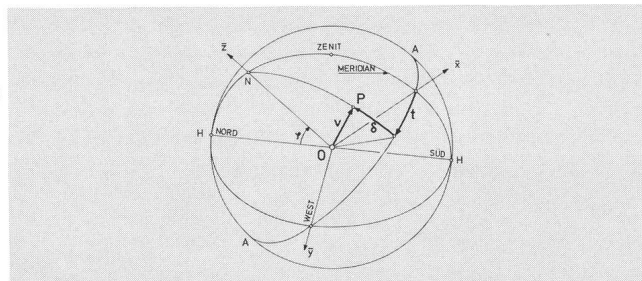


Fig. 1.l: linksorientiert

- $\bar{z}$ -Achse: Richtung zum nördlichen Himmelspol
 $\bar{x}$ -Achse: Schnitt Meridian Äquator Süd gegen Westen
 $\bar{y}$ -Achse: gegen Westen
 $p = v$: Entfernung zum Himmelskörper oder 1
 $\alpha = t$: Stundenwinkel
 $\beta = \delta$: Deklination
 $\bar{x} = v \cos \delta \cos t$
 $\bar{y} = v \cos \delta \sin t$
 $\bar{z} = v \sin \delta$

System K^* : Himmelsäquator-System (im Fixsternhimmel verankert)

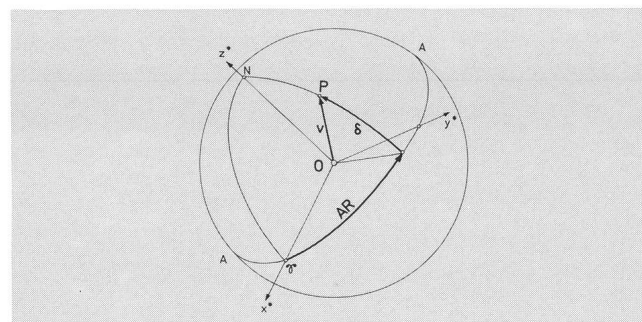


Fig. 1.m: rechtsorientiert

- z^* -Achse: Richtung zum nördlichen Himmelspol
 x^* -Achse: Richtung zum Frühlingspunkt
 y^* -Achse: Schnitt $AR = 90^\circ$ mit Äquator
 $p = v$: Entfernung zum Himmelskörper oder 1
 $\alpha = AR$: Rektaszension
 $\beta = \delta$: Deklination
 $x^* = v \cos \delta \cos AR$
 $y^* = v \cos \delta \sin AR$
 $z^* = v \sin \delta$

Bemerkung: Infolge der Erdrotation wächst der Stundenwinkel eines Fixsterns proportional der Zeit, man misst ihn meistens in Stunden, es ist dann zweckmässig, die Rektaszension auch in Stunden zu messen.

¹⁾ Anmerkung: auch als festes Äquatorsystem bezeichnet.

B 4. System der Ekliptik System E'

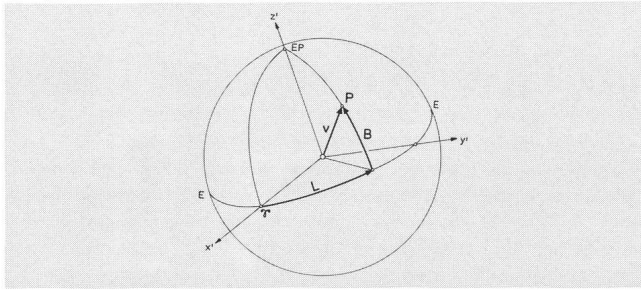


Fig. 1.n: rechtsorientiert

z' -Achse: Richtung zum nördlichen Ekliptikpol EP
 x' -Achse: Richtung zum Frühlingspunkt
 y' -Achse: Schnitt $L = 90^\circ$ mit Ekliptik-Ebene
 E-E: Ekliptik
 $r = v$ Entfernung vom Himmelskörper oder 1
 $\alpha = L$ ekliptikale Länge
 $\beta = B$ ekliptikale Breite
 $x' = v \cos B \cos L$
 $y' = v \cos B \sin L$
 $z' = v \sin B$

Adresse des Autors:

Prof. H. Schilt, Höhweg 5, CH-2502 Biel.

2. Koordinaten-Transformationen

H. SCHILT

Manchmal verwendet man für ein Problem mehrere Koordinatensysteme, weil sich das eine System für eine Teilaufgabe besser eignet als das andere. Man muss deshalb die Koordinaten von einem System in diejenigen des andern Systems umrechnen können. Dazu dienen Transformationsformeln.

Wir unterscheiden das Ausgangssystem vom Zielsystem. Wir nehmen an, wir kennen die Koordinaten eines geometrischen Objektes im Ausgangssystem und, auf dasselbe System bezogen, die notwendigen Größen, um das Zielsystem festzulegen. Gesucht sind die Beziehungen, welche gestatten, aus den gegebenen Koordinaten diejenigen im Zielsystem auszurechnen.

Zuerst betrachten wir wieder ebene Systeme. Man unterscheidet zwischen Schiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen.

2.1 Schiebungen

Wir gehen vom System K aus; in diesem System hat der Ursprung $\bar{O}$ des Zielsystems $\bar{K}$ die Koordinaten $x = u$ und $y = v$. Durch diese Angabe ist das Zielsystem festgelegt, da bei Schiebungen die Achsen je parallel bleiben.

Der Punkt P hat im (Fig. 2.a)
Ausgangssystem K
die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= OQ \\ y &= QP \end{aligned}$$

Zielsystem $\bar{K}$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{O}\bar{Q} \\ \bar{y} &= \bar{Q}P \end{aligned}$$

Aus der Figur entnimmt man:

2.11

$$\begin{aligned} x - u &= \bar{x} \\ y - v &= \bar{y} \end{aligned}$$

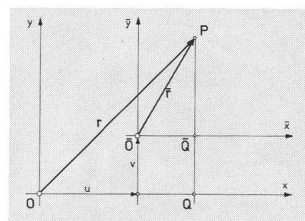


Fig. 2.a:

Beispiel:

$$\begin{aligned} u &= 5 & v &= 3 & 8 - 5 &= 3 = \bar{x} \\ x &= 8 & y &= 8 & 8 - 3 &= 5 = \bar{y} \end{aligned}$$

2.2 Drehungen

Zwei gleichorientierte kartesische Koordinatensysteme mit nicht parallelen Achsen lassen sich immer durch eine Drehung um einen bestimmten Punkt zur Deckung bringen; sind sie verschieden orientiert, so ist eine Spiegelung notwendig (vgl. 2.3).

Wir betrachten den speziellen Fall der gleichorientierten Systeme mit gemeinsamem Ursprung, der somit Drehpunkt ist. (Fig. 2.b)

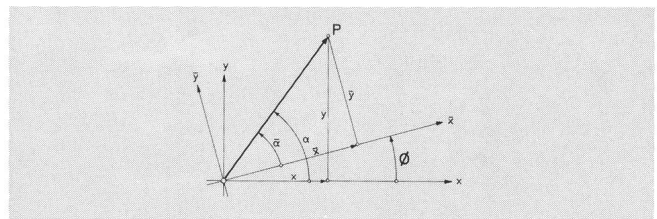


Fig. 2.b

Die Koordinaten von P sind
im System K
Ausgangssystem

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

im System $\bar{K}$
Zielsystem

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r} \cos \bar{\alpha} \\ \bar{y} &= \bar{r} \sin \bar{\alpha} \end{aligned}$$

Bei einer Drehung von K um den Winkel Φ gilt:

2.21

$$\begin{aligned} r &= \bar{r} \\ \alpha - \Phi &= \bar{\alpha} \end{aligned}$$

so dass

2.22

$$\begin{aligned} \bar{x} &= r \cos (\alpha - \Phi) \\ \bar{y} &= r \sin (\alpha - \Phi) \end{aligned}$$

Man merke sich:

Phi " Φ " ist der Winkel, welcher von der x-Achse des Ausgangssystems bis zur $\bar{x}$ -Achse des Zielsystems gemessen und im Sinne des Ausgangssystems gezählt wird.

Zum Rechnen mit einem Taschenrechner eignet sich folgende Anweisung: