Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft

Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft

Band: 44 (1986)

Heft: 212

Artikel: Geometrische Bestimmung der Bahnelemente von Doppelsternen aus der scheinbaren Bahn (2)

Autor: Blatter, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899133

Geometrische Bestimmung der Bahnelemente von Doppelsternen aus der scheinbaren Bahn (2)

H. BLATTER

Im gleichnamigen Beitrag im ORION 210, S. 165, wurde eine Lösung des Problemes, die sich auf Darstellende Geometrie und die Rytzsche Hauptachsenkonstruktion stützt, angegeben. Eine andere Lösung des Problemes, bei der der konstruktive Aufwand bedeutend kleiner ist, benützt einen mathematischen Satz, der von Mlodziewsky (1890) beschrieben und bewiesen wurde:

In dem Dreieck, das der Hauptstern mit den beiden Brennpunkten der scheinbaren Bahnellipse bildet, halbiert die Knotenlinie den Aussenwinkel am Hauptstern.

Für den Beweis des Satzes von Mlodziewsky wird ein Hilfssatz benötigt, der hier zuerst bewiesen werden soll:

Gegeben sei ein Dreieck ABS und zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden i und k, die durch S gehen, schneiden die Gerade AB in den Punkten I und K. Die Mitte der Strecke IK sei Z und die Mitte von AB sei M (Abb. 1). Der Hilfssatz sagt nun folgendes aus:

Sind die Geraden i und k die innere und die äussere Halbierende des Dreieckswinkels bei S, dann gilt

$$AZ \cdot BZ = MZ^2 \qquad (1)$$

und umgekehrt. Ausserdem gilt dann

$$MI \cdot MK = MA^2 = MB^2 \qquad (2)$$

Beweis:
Sind die Geraden i und k die innere und die äussere Halbierende des Dreieckswinkels bei S, dann gilt

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AS}{BS} = \frac{AK}{BK} \qquad (3)$$

und mit IZ = SZ = KZ können die Strecken in der Gleichung (3) wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} AI &= AZ - IZ \\ BI &= IZ - BZ \\ AK &= AZ + ZK = AZ + IZ \\ BK &= ZK + BZ = IZ + BZ \end{aligned} \qquad (4)$$

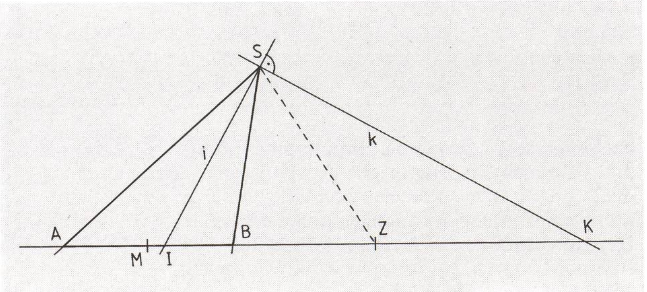


Abb. 1.: Zum Beweis des Hilfssatzes.

Damit wird die Gleichung (3) zu

$$\frac{AZ - IZ}{IZ - BZ} = \frac{AZ + IZ}{IZ + BZ} \qquad (5)$$

und durch Multiplizieren mit den Nennern ergibt sich

$$AZ \cdot BZ = IZ^2 = SZ^2$$

womit der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen ist. Gilt nun umgekehrt die Gleichung (1), dann gilt für die Seiten in den Dreiecken AZS und BZS:

$$\frac{AZ}{SZ} = \frac{SZ}{BZ}, \qquad (6)$$

dass also entsprechende Seitenverhältnisse gleich sind. Damit und mit dem gemeinsamen Winkel bei Z ergibt sich, dass die Dreiecke AZS und BZS zueinander ähnlich sind. Da nun die Winkel ZAS und BSZ einander gleich sind, und gleichzeitig die beiden Basiswinkel des gleichschenkligen Dreieckes IZS einander gleich sind, folgt aus den Gleichungen für die Winkel:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASI &= \sphericalangle ZIS - \sphericalangle ZAS \\ \text{und} \quad \sphericalangle ISB &= \sphericalangle ZSI - \sphericalangle ZSB \end{aligned} \qquad (7)$$

die Gleichheit der Winkel ASI und ISB, oder dass die Gerade i den Winkel ASZ halbiert. Damit ist auch die Umkehrung des Hilfssatzes bewiesen.

Um noch die Gleichung (2) zu beweisen, wird die Gleichung (3) unter Berücksichtigung von AM = BM umgeschrieben:

$$\frac{AM + MI}{AM - MI} = \frac{AM + MK}{MK - AM} \qquad (8)$$

und daraus erhält man durch Multiplizieren mit den Nennern die Gleichung (2).

Dieser Hilfssatz soll nun zum Beweis des Satzes von Mlodziewsky benützt werden. Bekannt sei die scheinbare Ellipse mit ihren Brennpunkten E und F, und mit dem Ort des Hauptsternes S sind dann auch die Brennpunkte S und B der wahren Bahnellipse bekannt.

Die Gerade XY (Abb. 2) durch S sei die Knotenlinie und OT eine dazu parallele Tangente an die Ellipse im Punkt A. Die Geraden OT, XY, AN und SU bilden nun ein Rechteck.

Bei Ellipsen wird ein Strahl, der aus einem Brennpunkt stammt, an der Ellipse in den anderen Brennpunkt reflektiert. Das heisst nun, dass eine Ellipsentangente die beiden Geraden von den Brennpunkten durch den Berührungspunkt unter dem gleichen Winkel schneidet und die Senkrechte zur Tangente den Winkel zwischen den beiden Strahlen halbiert. Bei einer Normalaffinität bleibt eine Winkelhalbierende, die parallel oder senkrecht zur Affinitätsachse liegt, bei der Ab-

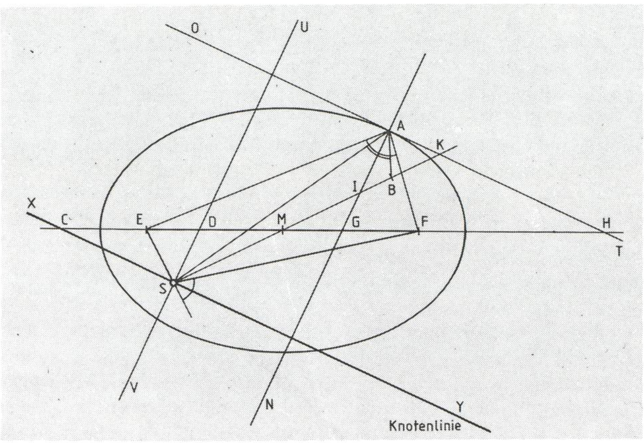


Abb. 2: Zum Beweis des Satzes von Mlodziewsky.

bildung als Winkelhalbierende erhalten. Also sind die Winkel SAI und BAI einander gleich und mit dem Hilfssatz folgt

$$MI \cdot MK = MS^2. \tag{9}$$

Aus dem gleichen Grund gilt, dass die Winkel EAG und FAG einander gleich sind und wieder folgt

$$MG \cdot MH = ME^2. \tag{10}$$

Da nun XY parallel zu OT und UV parallel zu AN sind, folgt mit dem Strahlensatz

$$\frac{MD}{MS} = \frac{MG}{MI} \text{ und } = \frac{MH}{MK} \tag{11}$$

und durch Multiplizieren der entsprechenden Seiten der beiden Gleichungen (11) ergibt sich

$$\frac{MD \cdot MC}{MS^2} = \frac{MG \cdot MH}{MI \cdot MK} \tag{12}$$

und daraus mit den Gleichungen (9) und (10)

$$MC \cdot MD = ME^2 = MF^2 \tag{13}$$

Das heisst nun mit der Umkehrung des Hilfssatzes, dass die Gerade UV den Winkel bei S im Dreieck EFS halbiert und die Senkrechte dazu also den entsprechenden Aussenwinkel halbiert. Das entspricht aber genau der Aussage des Satzes von Mlodziewsky, der damit bewiesen ist.

Literatur:

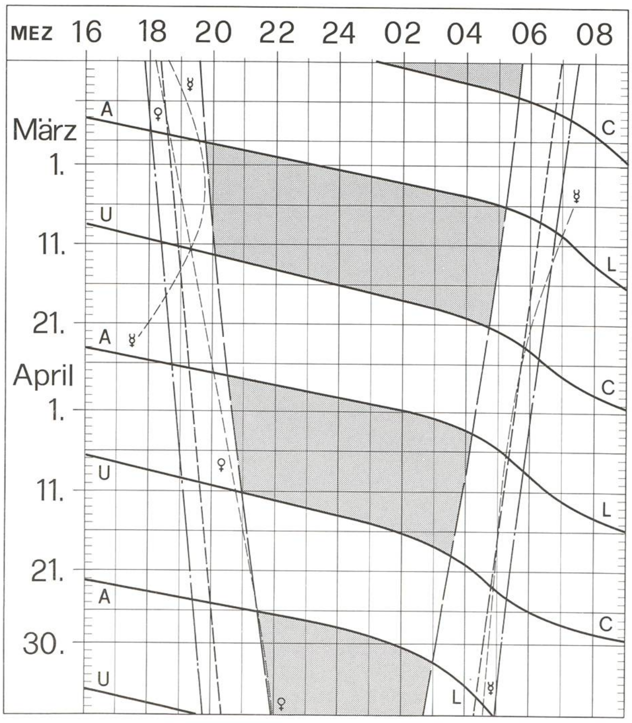
MLODZIEWSKY, B. 1890. Über die Bestimmung von Doppelsternbahnen. Moskau, Arbeiten der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturwissenschaften, Anthropologie und Ethnographie, Bd. 3, Nr. 2, S. 17–19.

BLATTER, H. 1984. Geometrische Bestimmung der Bahnelemente von Doppelsternen aus der scheinbaren Bahn (1). ORION 210, S. 165.

Adresse des Autors:
Dr. HEINZ BLATTER, Luzernerstrasse 13, 4800 Zofingen

Sonne, Mond und innere Planeten

Soleil, Lune et planètes intérieures



Aus dieser Grafik können Auf- und Untergangszeiten von Sonne, Mond, Merkur und Venus abgelesen werden.

Die Daten am linken Rand gelten für die Zeiten vor Mitternacht. Auf derselben waagrechten Linie ist nach 00 Uhr der Beginn des nächsten Tages aufgezeichnet. Die Zeiten (MEZ) gelten für 47° nördl. Breite und 8°30′ östl. Länge.

Bei Beginn der bürgerlichen Dämmerung am Abend sind erst die hellsten Sterne — bestenfalls bis etwa 2. Grösse — von blossem Auge sichtbar. Nur zwischen Ende und Beginn der astronomischen Dämmerung wird der Himmel von der Sonne nicht mehr aufgehellt.

Les heures du lever et du coucher du soleil, de la lune, de Mercure et de Vénus peuvent être lues directement du graphique.

Les dates indiquées au bord gauche sont valables pour les heures avant minuit. Sur la même ligne horizontale est indiqué, après minuit, le début du prochain jour. Les heures indiquées (HEC) sont valables pour 47° de latitude nord et 8°30′ de longitude est.

Au début du crépuscule civil, le soir, les premières étoiles claires — dans le meilleur des cas jusqu'à la magnitude 2 — sont visibles à l'œil nu. C'est seulement entre le début et la fin du crépuscule astronomique que le ciel n'est plus éclairé par le soleil.

Sonnenaufgang und Sonnenuntergang
Lever et coucher du soleil

Bürgerliche Dämmerung (Sonnenhöhe —6°)
Crépuscule civil (hauteur du soleil —6°)

Astronomische Dämmerung (Sonnenhöhe —18°)
Crépuscule astronomique (hauteur du soleil —18°)

A L
Mondaufgang / Lever de la lune

U C
Monduntergang / Coucher de la lune

Kein Mondschein, Himmel vollständig dunkel
Pas de clair de lune, ciel totalement sombre