

Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 47 (1989)
Heft: 235

Artikel: Extremale Bahnbeschleunigung
Autor: Blatter, Heinz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-899067>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Extremale Bahnbeschleunigung

HEINZ BLATTER

Ein Planet bewegt sich auf einer Ellipse um die Sonne. In jedem Punkt der Bahn wird er durch die Gravitation auf die Sonne hin beschleunigt. Ein Teil dieser Beschleunigung wirkt senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung und ein Teil parallel dazu (Abb. 1). Der senkrechte Anteil der Beschleunigung bewirkt eine Krümmung der Bahn, der tangentielle Anteil eine Veränderung der Geschwindigkeit. Es ist aus Symmetriegründen ersichtlich, dass die senkrechte Komponente in den Apsiden extremal wird, maximal im Perihel und minimal im Aphel. Die tangentielle Komponente, die sogenannte Bahnbeschleunigung, wird Null in den Apsiden und muss deshalb irgendwo dazwischen extremal werden.

Die Frage ist nun: Wo auf der Bahn ist die Bahnbeschleunigung extremal?

Antwort:

Die tangentielle Komponente g_t der Gravitationsbeschleunigung ist (Abb. 1)

$$g_t = g \cos \alpha. \quad (1)$$

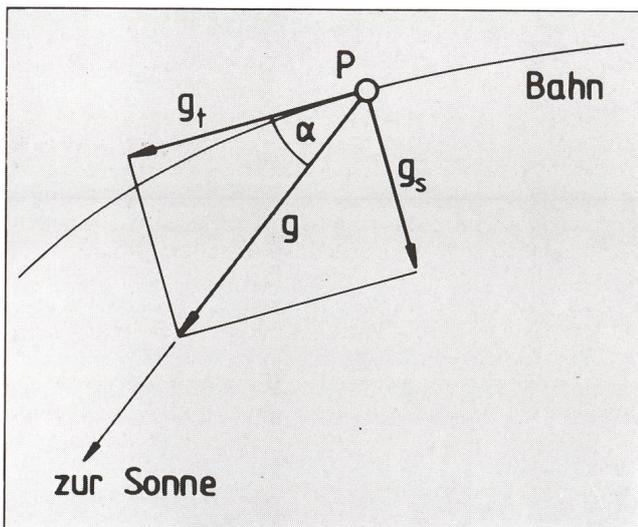


Abb. 1
Komponenten der Gravitationsbeschleunigung vertikal und tangential zur Bewegungsrichtung des Planeten.

Die radiale (auf die Sonne gerichtete) Beschleunigung ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$g = G \frac{M}{r^2}, \quad (2)$$

wobei G die Gravitationskonstante, M die Sonnenmasse und r der momentane Abstand des Planeten von der Sonne ist.

Für den Winkel α zwischen der momentanen Bewegungsrichtung und der Richtung zur Sonne gilt (Blatter, 1983)

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{b^2}{2ar - r^2}}, \quad (3)$$

wobei a und b die grosse, resp. kleine Halbachse der Bahnellipse und r wieder der Abstand Planet-Sonne ist. Die Gleichungen (2) und (3) und die Beziehung

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (4)$$

in die Gleichung (1) eingesetzt ergibt eine Beziehung zwischen der Bahnbeschleunigung und dem Abstand r :

$$g_t = G M \sqrt{\frac{2ar - r^2 - b^2}{r^4(2ar - r^2)}}. \quad (5)$$

Die Bahnbeschleunigung g_t wird jetzt extremal, wenn der Radikand (Ausdruck unter der Wurzel) extremal wird. Das Maximum oder Minimum einer Kurve, die durch eine Gleichung gegeben ist, kann durch Differenzieren gefunden werden. In diesem Falle muss die Funktionsgleichung

$$y = \frac{2ar - r^2 - b^2}{r^4(2ar - r^2)} \quad (6)$$

nach der Variablen r abgeleitet werden. Das Resultat ist

$$y' = 2 \frac{-2r^3 + 8ar^2 + r(-8a^2 - 3b^2) + 5ab^2}{r^4(2ar - r^2)}. \quad (7)$$

Die Extrema findet man durch Nullsetzen von y' , oder was hier das gleiche bedeutet, durch Nullsetzen des Zählers auf dem Bruch. Das ist eine kubische Gleichung für die Unbekannte r , deren Lösungen durch die etwas komplizierten Lösungsgleichungen für Gleichungen 3. Grades gefunden werden können. Heutzutage kann das einfacher mit einem numerischen Verfahren auf einem Taschenrechner, der entsprechend ausgerüstet ist, gerechnet werden. Das Resultat ist in der Abbildung 2 graphisch dargestellt. Die Abbildung zeigt den gesuchten Abstand r in Abhängigkeit vom Verhältnis b/a der kleinen zur grossen Ellipsenachse.

In der Abbildung 3 wird dasselbe Resultat gezeigt, aber an Stelle des Abstandes r stehen die entsprechenden Anomalien, die wahre Anomalie V und die exzentrische Anomalie E (Abb. 4). Die Beziehung zwischen den Anomalien und dem Abstand r sind

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos V} = a(1 - e \cos E) \quad (8)$$

mit der Exzentrizität e der Bahnellipse

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (9)$$

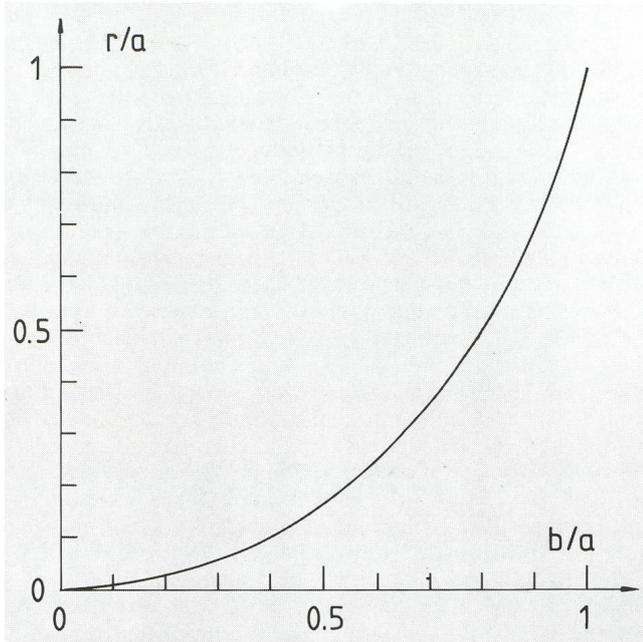


Abb. 2
Verhältnis r/a des Bahnpunktes mit extremaler Bahnbeschleunigung in Abhängigkeit vom Verhältnis b/a der kleinen zur grossen Ellipsenachse.

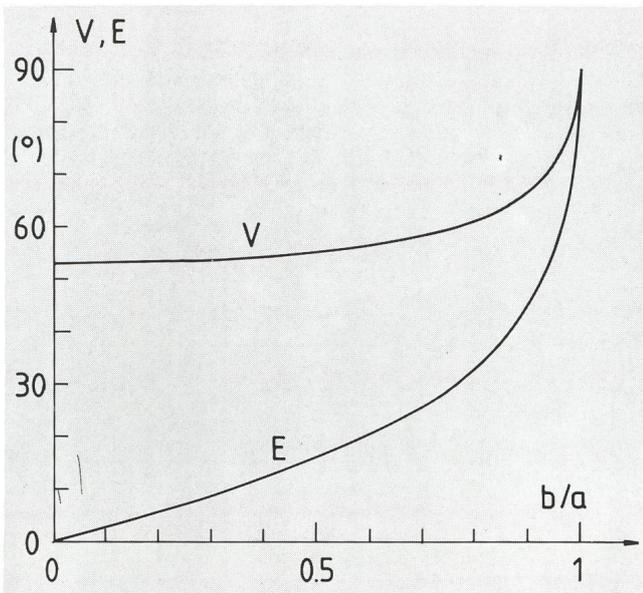


Abb. 3
Wahre und exzentrische Anomalie des Bahnpunktes mit extremaler Bahnbeschleunigung in Abhängigkeit vom b/a der kleinen zur grossen Ellipsenachse.

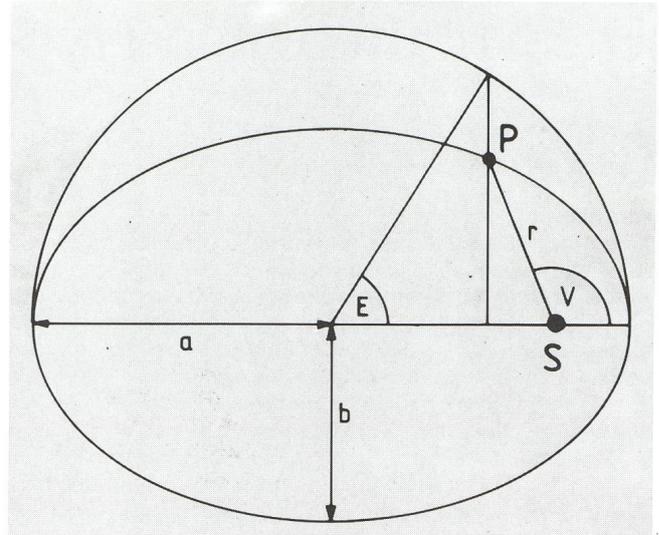


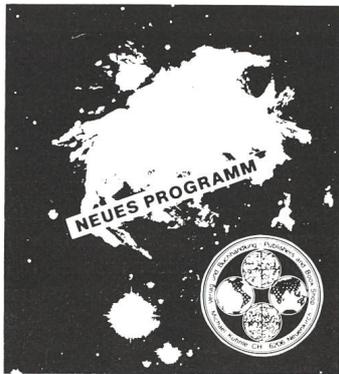
Abb. 4
Zur Definition der wahren (V) und exzentrischen (E) Anomalie des Planeten P. Die Sonne S steht in einem der Brennpunkte der Bahnellipse.

Das Problem der extremalen Bahnbeschleunigung bietet auch ein hübsches Beispiel für Mittelschulen. Es vereint Geometrie, Analysis und Physik, die etwa vor der Maturität verfügbar sein sollte.

Literatur:

BLATTER, H. 1983. Astronomische Bahnen. Zofingen, Schriftenreihe der Kantonsschule Zofingen, 42 s. (erhältlich beim Sekretariat der Kantonsschule Zofingen, 4800 Zofingen, Tel. 062-51 89 58)

DR. H. BLATTER, Luzernerstr. 13, CH - 4800 Zofingen



Astro-Bilderdienst
Astro Picture-Centre
Service de Astrophotographies
Patronat:
Schweiz. Astronomische Gesellschaft

Auf Wunsch stellen wir Ihnen die jeweils neuesten Preislisten zu.

Verlag und Buchhandlung
Michael Kuhnle
Surseestrasse 18, Postfach 181
CH - 6206 Neuenkirch
Switzerland
Tel. 041 98 24 59