**Zeitschrift:** Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft

**Herausgeber:** Schweizerische Astronomische Gesellschaft

**Band:** 67 (2009)

**Heft:** 350

**Artikel:** Ebene Sonnenuhren berechnen und herstellen : die Sonne als Zeitgeber

**Autor:** Laager, Erich

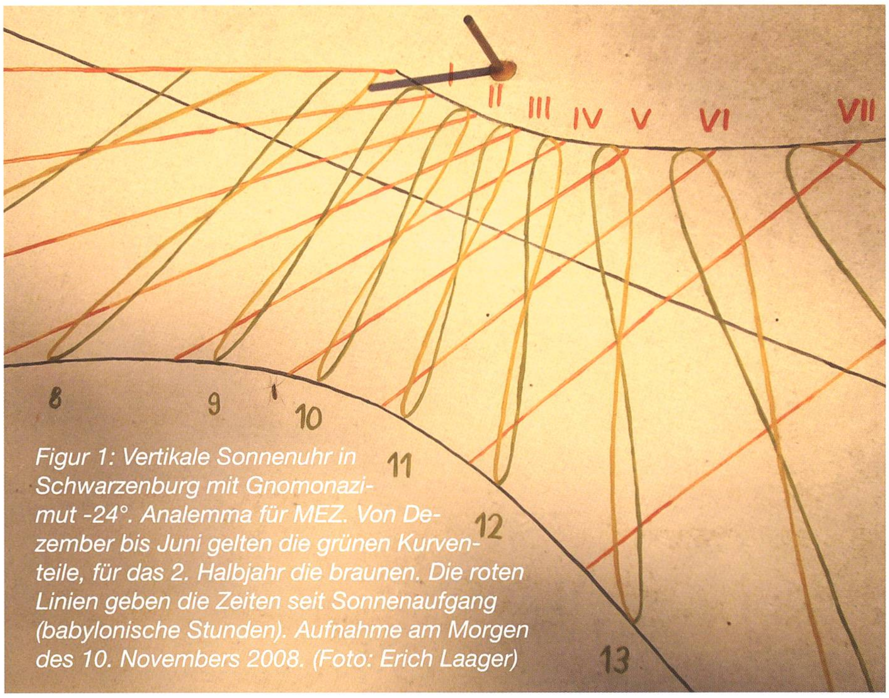
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-897250

## Ebene Sonnenuhren berechnen und herstellen

# Die Sonne als Zeitgeber

■ Von Erich Laager

*Im sonnigen Süden kam der Verfasser auf den Geschmack der Sonnenuhren. Bereits vor 25 Jahren ermöglichte ihm ein erstes Computerprogramm die Berechnung von Analemma-Sonnenuhren. Heute ist dies mit der Tabellenkalkulation Excel möglich. Hier wird der Weg dazu aufgezeigt. Beispiele für Uhren mit wahrer Sonnenzeit, mit antiken Stunden und mit einem Zifferblatt für MEZ zeigen Ergebnisse solcher Berechnungen. Derartige Uhren können mit beliebiger Orientierung des Zifferblattes und für irgendeinen Standort erstellt werden. – Wie genau zeigen sie die Zeit an?*
*Der Beitrag ist auch eine Ergänzung des Themas «Die Analemma-Sonnenuhr» in ORION Nr. 2/2008 [1].*




Figur 1: Vertikale Sonnenuhr in Schwarzenburg mit Gnomonazimut -24°. Analemma für MEZ. Von Dezember bis Juni gelten die grünen Kurventeile, für das 2. Halbjahr die braunen. Die roten Linien geben die Zeiten seit Sonnenaufgang (babylonische Stunden). Aufnahme am Morgen des 10. Novembers 2008. (Foto: Erich Laager)

Ferien mit der Familie auf einem Zeltplatz an Frankreichs Mittelmeerküste. Wir wollen ohne Uhr leben, die Zwänge des Alltags möglichst ablegen. Aber immerhin sollten wir wissen, wann das Lebensmittelgeschäft öffnet und wann der Eismann auf dem Gelände ist. Zur groben Orientierung pflanzen wir an einem besonnten Platz einen Stock auf und markieren einige wichtige Schattenpositionen mit Steinen. Die Kinder merken sich: «Wenn der Schatten des Stocks beim weissen Stein ist, kommt der Mann mit dem Eis für die Kühlboxe.»
Auf demselben Campingplatz habe ich mich später durch den Manuskriptentwurf für ein Sonnenuhrenbüchlein [2] hindurchgearbeitet. Ich habe dem Verfasser dann geraten, sein umfangreiches und etwas unübersichtliches Berechnungs-Puzzle in einem Computer-Programm zusammen zu fassen, so dass seine Anleitung leichter handhabbar sei. Dies ist geschehen und ich habe die eine Programm-Version (im damals verbreiteten BASIC) getestet und mit dem Verfasser bereinigt.
Das Programm lieferte eine Schar von Punkten. Ich habe es mit einem Zusatzprogramm ergänzt, das aus den Punkten Strecken und Kurven erzeugte. So konnte ich auf meinem ersten Computer nun selber Sonnenuhren berechnen und zeichnen.

### Was kann eine Sonnenuhr anzeigen?

Die Berechnungen gelten für ebene Sonnenuhren mit einem Schattenstab, der senkrecht auf der Uhrenfläche steht (Gnomon). Das Zifferblatt kann sich irgendwo auf der Welt befinden und beliebig orientiert sein (angegeben durch Azimut und Neigung des Gnomons). Auf derartigen Sonnenuhren kann das Schatten-Ende folgende Dinge zeigen:

- *Den Tageslauf der Sonne (Figur 3)*
  - *a) am kürzesten Tag (Hyperbel für das Winter-Solstitium / Winter-Sonnenwende)*
  - *b) am längsten Tag (Hyperbel für das Sommer-Solstitium / Sommer-Sonnenwende)*
  - *c) bei Tagundnachtgleiche (eine Gerade für das Äquinoktium)*
  - *d) an irgend einem Tag, etwa am Ersten jedes Monats.*
- *Wahre Sonnenzeit (bei 12 Uhr wahrer Sonnenzeit steht die Sonne im Süden).*
- *Antike Stunden*
  - *a) Babylonische Stunden = Stunden seit Sonnenaufgang am mathematischen Horizont*
  - *b) Italienische Stunden = Stunden seit dem Sonnenaufgang am Vortag. (Variante: 24 Stunden – italienische Stunde = Zeit bis Sonnenuntergang.)*
- *Zonenzeit (bei uns wahlweise MEZ oder MESZ).*

Meine Zifferblätter sind in ganze Stunden unterteilt.
Alte Sonnenuhren im Tessin und in Italien zeigen oft nur antike Stunden an, markiert durch einige gerade Linien. Dem Betrachter können diese Uhren rätselhaft erscheinen, wenn er nicht weiss, dass man hier z. B. ablesen kann, wie lange es noch dauert bis zum Sonnenuntergang. (Das konnte wichtig sein für

Reisende beim Planen ihrer Wanderung.)

### Die Berechnung mit neuen Möglichkeiten

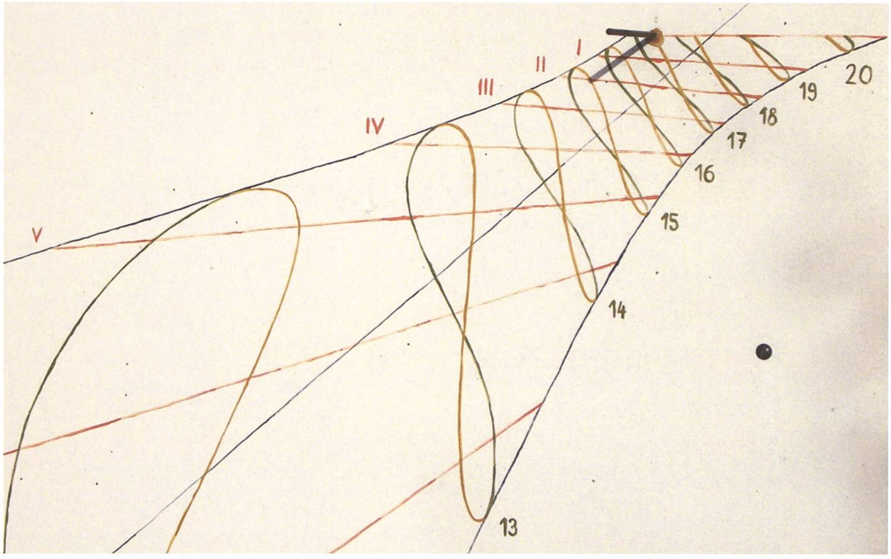
Bei mir ist dann viele Jahre später der Wunsch erwacht, wieder selber Sonnenuhren berechnen zu können. – Aber wie vorgehen?
Das alte BASIC-Programm läuft längst nicht mehr und in neue BASIC-Versionen mag ich mich nicht einarbeiten. Die alte Papier-Liste enthält 440 Programmzeilen, darunter – für BASIC typisch – sehr viele Sprünge in Unterprogramme und häufig Programmteile mit Schlaufen und Abbruchbedingungen. Könnte man diese Vorschriften nicht in das vertraute Excel umsetzen?
Ich versuche es, komme aber nicht über die ersten Zeilen hinaus. Wie soll man Befehle wie «GOTO» (gehe in Zeile ...) / «GOSUB» (springe in ein Unterprogramm) / «RETURN» (zurück ins Hauptprogramm) / «IF ... THEN» (Bedingung) in Excel erfassen?
Es reift die Einsicht: Ich muss das Problem ganz neu anpacken. Dazu habe ich heute auch andere Möglichkeiten, neue Grundlagen und Quellen.
Meine Aufgabe besteht aus 3 Teilen:

- *Die Orientierung des Zifferblattes muss durch Vermessen bestimmt werden und dessen Ort (geogr. Länge und Breite) muss bekannt sein.*
- *Für alle mit der Uhr darzustellenden Dinge sind die entsprechenden Positionen der Sonne am Himmel in Deklination und Stundenwinkel (Abweichung vom Ortsmeridian) zu erfassen.*
- *Diese sphärischen Himmels-Koordinaten müssen in rechtwinklige Koordinaten auf dem Zifferblatt umgerechnet werden. Diese Umrechnung beschreibt die Projektion des Sonnenzentrums über das Ende des Schattenstabs auf die Ebene des Zifferblattes.*

### Aufbereitung der Sonnenpositionen

- *a)* ***Linien für Äquinoktium und Solstitien*** *(Figuren 3 und 4). Diese bilden die Grenzen für die Zifferblattlinien.*

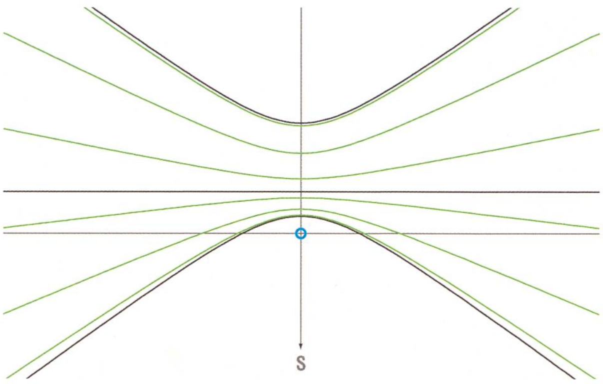
  - *Erster Punkt: Deklination 23,44°, Stundenwinkel 0.*
  - *Weitere Punkte: Deklination unverändert, Stundenwinkel soweit nötig in Schritten von einer Viertelstunde (3,75°) vergrössern und verkleinern.*
  - *Diese Punkte markieren den Sonnenlauf am längsten Tag.*
  - *Gleiches Vorgehen für Punkte mit den Deklinationen 0° und -23,44°.*



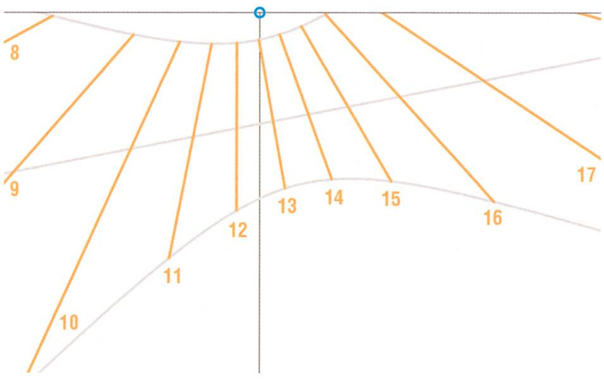
*Figur 2: Vertikale Sonnenuhr in Schwarzenburg mit Gnomonazimut +66°. Analemma für MEZ. Von Dezember bis Juni gelten die grünen Kurventeile, für das 2. Halbjahr die braunen. Die roten Linien geben die Zeiten bis Sonnenuntergang («modifizierte italienische Stunden»). Aufnahme am Nachmittag des 10. Novembers 2008. (Foto: Erich Laager)*

- *b)* ***Wahre Sonnenzeit*** *(Figur 4)*

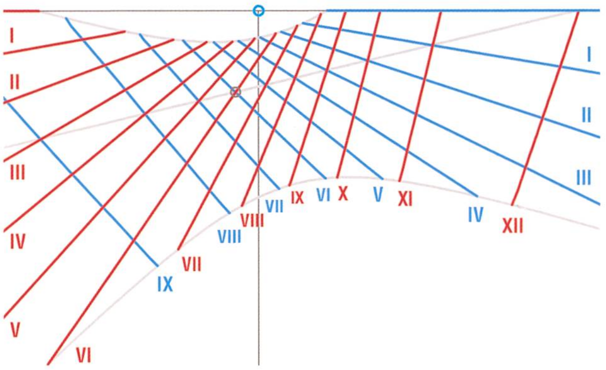
  - *Zwei Punkten mit Deklinationen 23,44° und -23.44°, beide mit Stundenwinkel 0.*
  - *Weiter Punkte mit gleichem Stundenwinkel und Deklinationen zwischen den ersten Punkten in einigermassen gleichmässiger Verteilung.*
  - *Diese Punkte markieren die Strecke für 12 Uhr wahre Sonnenzeit («wahrer Mittag»).*
  - *Weitere Stundenmarken: Deklinationen gleich lassen, Stundenwinkel*



*Figur 3: Horizontalsonnenuhr für Zürich. Tagesläufe der Sonne für den kürzesten und den längsten Tag (schwarz), so wie für den Monatsersten von Januar bis Juni (grün). Diese Kurven sind Hyperbeln. Einzig bei Tagundnachtgleiche entsteht eine Gerade (schwarz).*



*Figur 4: Vertikaluhr für Zürich mit Gnomonazimut 15°. Die Uhr zeigt* ***wahre Sonnenzeit****. Es ist 12 Uhr, wenn die Sonne im Süden steht. Die 12-Uhr-Linie steht senkrecht, aber nicht unter dem Schattenstab, weil dieser nicht nach Süden weist. (Grafiken: Max Stöckli, Schwarzenburg)*




Figur 5: Vertikaluhr für Zürich mit Gnomonazimut 15°. Uhr für **antike Stunden**: Stunden seit Sonnenaufgang (rot) und Stunden bis Sonnenuntergang (blau). Die Schnittpunkte liegen auf der Äquinoktial-Linie, derjenige für die beiden 6-Uhr Linien im wahren Mittag (Süden oder 12 Uhr wahre Sonnenzeit).

*bei allen Punkten soweit nötig in Schritten von jeweils 1 Stunde (15°) vergrössern und verkleinern.*

Die bisher beschriebenen Punkte können für jede Sonnenuhr verwendet werden.

*c) **Antike Stunden** (Figur 5)*
*Hier ist der Aufwand nun beträchtlich grösser! Die Punkte müssen für jede geogr. Breite neu berechnet werden, sie gelten aber für beliebige Orte auf diesem Breitenkreis. Die Stundenmarken sind gerade Linien. Vorerst wird erklärt, weshalb das so ist, gleichzeitig wird das Prinzip der Berechnung einsichtig.*

- *Man bestimmt für eine Reihe von Tagen (verteilt zwischen längstem und kürzestem Tag) den Ort der Sonne am Ost-Horizont. Diese Orte liegen alle auf dem Horizontkreis, also auf einem Grosskreis. Die Projektion jedes Grosskreises auf das Zifferblatt liefert eine Gerade. Beispiel: Auf einem senkrechten Zifferblatt liegt diese Gerade für Sonnenaufgang und Sonnenuntergang waagrecht, sie enthält den Fusspunkt des Schattenstabes.*
- *Eine Stunde nach Sonnenaufgang: Wir übertragen die Punkteschar am Horizont auf das Himmelsgewölbe. Sie erscheinen uns zunächst immer noch am selben Ort, aber wenn sich nun das Himmelsgewölbe dreht, gelangen sie in eine neue Position. Bei Drehung um 1 Stunde befinden sich die Punkte immer noch auf demselben – nun gedrehten – Grosskreis. Dieser enthält alle möglichen Positionen der Sonne 1 Stunde nach Sonnenaufgang; und dessen Projektion liefert wiederum eine Strecke, nämlich die Linie für die babylonische Stunde 1.*
- *Bei weiteren Drehungen um 2, 3 usw. Stunden erhält man die übrigen Stundenlinien.*
- *Marken für italienische Stunden entstehen, wenn man «Sonnenuntergangs-Punkte» vom westlichen Horizont aus in gleicher Art rückwärts dreht.*

So werden diese Punkte berechnet:

*Da ich mit dem Programm «Voyager» [4] die Daten leicht generieren kann, verzichte ich hier auf aufwendige Berechnungen und wähle folgendes Vorgehen:*

- *In «Voyager» den Ort wählen*
- *Für den längsten Tag die Deklination und die Kulminationszeit der Sonne suchen.*
- *Für denselben Tag die Zeit suchen, bei der das Sonnenzentrum am Morgen auf dem math. Horizont steht.*
- *Die Differenz dieser Zeiten ergibt die Länge des halben Tagbogens.*
- *0 Uhr - halber Tagbogen = Stundenwinkel der aufgehenden Sonne an diesem Tag.*

*Mit diesem Stundenwinkel und der Deklination ist der erste Punkt am Horizont bestimmt.*

- *Gleiches Vorgehen für beliebig viele andere Tage zwischen dem 21. Juni und 21. Dezember*

*Die Punkteschar bestimmt einen Teil der Horizontlinie, diese sind durch Äquatorkoordinaten der Himmelskugel festgelegt.*

- *Für eine nächste Punkteschar die Deklinationen belassen, die Stundenwinkel aller Punkte um je 1 Stunde (15°) verkleinern.*

*Diese Punkteschar liefert die Linie für die babylonische Stunde 1.*

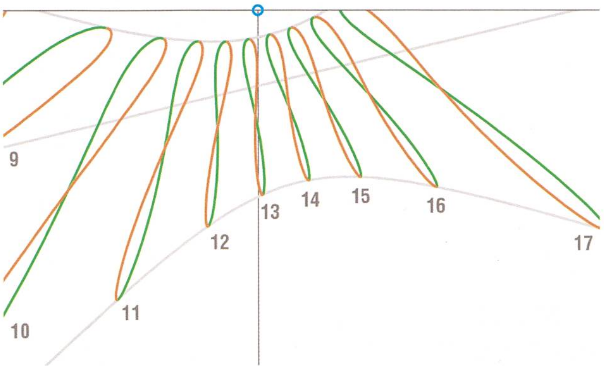
- *Weitere Drehungen um je 15° liefern die nächsten babylonischen Stunden.*
- *0 Uhr + halber Tagbogen = Stundenwinkel der untergehenden Sonne an diesem Tag.*
- *Ein analoges Vorgehen wie oben liefert die italienischen Stunden.*

*d) **Zonenzeit** (Figuren 6 und 7)*
*Die Grundlage für die Zonenzeit ist die Achterschlaufe, welche die Sonne während eines Jahres am Himmel beschreibt.*

In ORION Nr. 2/2008 [1] ist das Analemma sehr schön und ausführlich erklärt und dargestellt.
Es liegt leicht schief in Bezug auf die mittlere Sonne, d.h. der oberste Punkt liegt etwas östlich, der unterste ein wenig westlich der Nulllinie. Zeitgleichung Null ist im Jahr 2010 u.a. am 13. Juni und am 25. Dezember, also 8 Tage vor dem längsten resp. 4 Tage nach dem kürzesten Tag. (Siehe dort 1) auch die Grafik auf S. 28 unten).
Für unsere geogr. Breiten gilt: Der breitere Teil des Analemmas befindet sich am Himmel unten, auf einer Vertikaluhr jedoch oben, auf einer Horizontaluhr ist dieser vom Schattenstab weg gerichtet.

*Zur mathematischen Abbildung des Analemmas brauche ich für 74 Tage (ab 1. Januar 2010 in Schritten von 5 Tagen) jeweils die Deklination der Sonne und die Zeitgleichung (z.B. beides für 12 Uhr UT).*
*Ich berechne das Analemma zunächst für denjenigen Orte am Himmel, wo die Punkte mit Zeitgleichung = 0 auf dem Meridian (Stundenwinkel = 0) liegen. Dieses nenne ich «Mittagsanalemma».*

- *Deklination aus Programm «Voyager» [4].*
- *Zeitgleichung berechnet nach der Anleitung bei Meeus [3]. Umrech nung Zeitminuten in Grad.*
- *Die 74 Zahlenpaare ergeben das «Mittagsanalemma». Wenn die Uhr sich auf demjenigen Längengrad befindet, welcher die Zonenzeit bestimmt (z.B. auf 15° östl. Länge für MEZ), zeigt dieses Analemma 12 Uhr Zonenzeit (MEZ) an (Figur 7 A und B).*
- *In Zürich (8.5° östl. Länge) kulminiert die Sonne 26 Minuten später, also um 12:26 Uhr. Um 12 Uhr MEZ steht die Sonne somit 26 Zeit-Minuten (entspricht einem Stunden winkel von 6,5°) östlich des Meridians.*
  *Das Analemma muss um diesen Betrag verschoben werden, d. h. bei allen Punkten werden vom Stundenwinkel 6,5° subtrahiert. In dieser neuen Position zeigt es auf*




*Figur 6: Vertikaluhr für Zürich mit Gnomonazimut 15°. Uhr für Zonenzeit MEZ. Auf dieser kann bei den ganzen Stunden die Zeit auf wenige Minuten genau abgelesen werden. (Grafik: Max Stöckli, Schwarzenburg, info@artmax.ch).*

*der Uhr in Zürich 12 Uhr MEZ an (Figur 7 C).*

☞ *Von diesem «lokale» Mittagsanalemma» aus die weiteren Schlaufen für ganze Stunden MEZ erzeugen, indem man Vielfache von 15° bei den Stundenwinkeln addiert oder subtrahiert.*

### *Kontrollmöglichkeiten auf dem Zifferblatt*

Bei Tagundnachtgleiche ist der Tagbogen der Sonne 12 Stunden lang, der halbe Tagbogen misst 6 Stunden.

Im wahren Mittag (Sonne im Süden) gilt an diesem Tag: Vor 6 Stunden ist die Sonne aufgegangen, vor 18 Stunden ist sie untergegangen. Die entsprechenden Marken der antiken Stunden schneiden sich auf der Geraden für den Äquinoktial-Tageslauf. Auf dieser Geraden liegen auch die übrigen Kreuzungspunkte je für die babylonische Stunde (n) und die italienische Stunde (24 - n).

Zu beachten: Dies gilt nur, wenn wir hier den Sonnenaufgang definieren als Höhe des Sonnenzentrums = Null, nicht wie bei der üblichen Berechnung des Sonnenaufgangs, wo man h = -0.833° (Sonnenradius + Refraktion) für das Sonnenzentrum annimmt.

## Wie kommen die Sonnenpositionen vom Himmel auf das Zifferblatt?

Ich versuchte, im Dschungel der Winkel und Winkelfunktionen selbständig einen Weg zu finden, leider trotz verschiedener Ansätze immer wieder mit fehlerhaften Ergebnissen.

Dann entdeckte ich bei Meeus [3] eine Anleitung zur Lösung genau dieses Problems.

Wer sich für die Formelsammlung interessiert, liest den Kasten «Mit Mathematik vom Himmel auf das Zifferblatt».

Bitte jetzt keine Panik! – Man kann die Fortsetzung verstehen, ohne sich mit diesen mathematischen Details zu befassen.

## Beispiele für Zifferblätter

Der Fusspunkt des Gnomons ist mit einem blauen Ring markiert. Hier schneiden sich die Achsen des rechtwinkligen x,y-Koordinatensystems.

**Figur 3**
Horizontalzifferblatt für Zürich mit Tageskurven der Sonne, keine Zeiteinteilung.

**Figuren 4 bis 6**
Drei Vertikaluhren, alle für Zürich oder für andere Orte auf der gleichen geogr. Breite (47,5° N).
Gnomonazimut überall 15°.

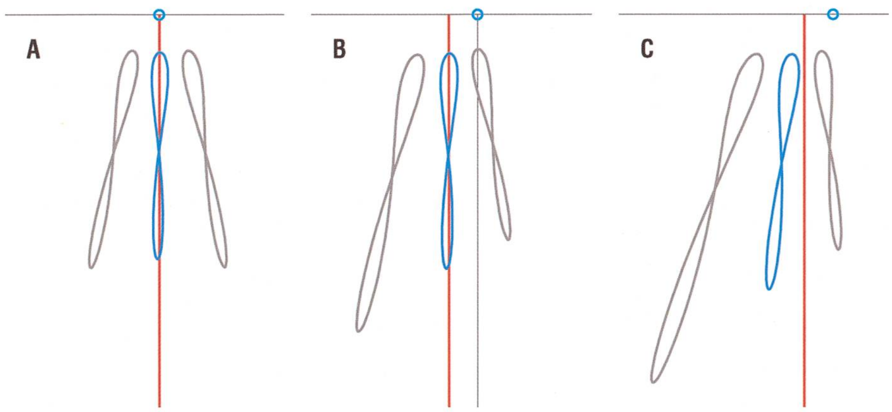
Die grauen Linien entsprechen drei schwarzen Kurven in Figur 3. Je mehr das Zifferblatt von der Südrichtung weg gedreht wird, desto steiler verläuft die Äquinoktien-Gerade. Eine Ebene, welche diese Gerade und das Ende des Schattenstabs enthält, liegt parallel zur Äquatorebene.

**Figur 7**
Drei Vertikaluhren, alle auf 47,5° nördl. Breite. Die Abbildung des Ortsmeridians ist die rote Gerade. Das «Mittagsanalemma» (für 12 Uhr MEZ) ist blau gezeichnet, diejenigen für 11 Uhr und 13 Uhr sind grau dargestellt.

**A**
Süd-Uhr auf 15° östl. Länge, also auf dem Meridian, welcher MEZ definiert.
Das «Mittagsanalemma» liegt beim Meridian, dieser läuft durch den Gnomon-Fusspunkt.

**B**
**Uhr A um 15° in Richtung Westen gedreht** (Gnomonazimut 15°).
Das «Mittagsanalemma» liegt weiterhin beim Meridian, dieser verläuft jedoch wegen der Drehung der Uhr neben dem Gnomon-Fusspunkt.

**C**
**Uhr B nach Zürich verschoben.**
Das «Mittagsanalemma» liegt jetzt neben dem Meridian, dieser verläuft auch hier neben dem Gnomon-Fusspunkt.
Dies ist die Ausgangposition für die Uhr mit Zonenzeit (Figur 6).




*Figur 7: Zur Frage: Wie findet man den richtigen Ort der Analemmas auf dem Zifferblatt? – Weitere Erklärungen im Text. (Grafiken: Max Stöckli, Schwarzenburg)*

## Die Gestaltung des Zifferblattes

Ich kann entscheiden, welche Linien, welche Skala ich auf meinem Zifferblatt darstellen möchte.

Soll dieses nur eine Zeitskala enthalten oder mehrere gleichzeitig?

### *Möglichkeiten für die praktische Ausführung*

*Papierausdruck der Grafik (allenfalls vergrössert) mit Kohlepapier auf die Zeichnungsfläche übertragen und die Linien mit wetterfester Farbe nachzeichnen. So sind meine beiden – jetzt 20 Jahre alten – Sonnenuhren seinerzeit entstanden (Figuren 1 und 2).*

*Grafik mit einem Farbdrucker ausdrucken, wetterfest einschweissen (laminieren) und auf ein Brett kleben.*

*Grafik auf eine feste Platte drucken*

*lassen, z.B. auf eine Aluplatte. Muster: Darstellung der Stadtbefestigung beim Südaufgang in der neuen Unterführung des Bahnhofs Bern.*

**Die Uhr ablesen und die Zeiten auswerten**

Dazu habe ich am 10. November 2008 meine beiden Sonnenuhren fotografiert (Figuren 1 und 2).
Die östliche Uhr enthält rot die babylonischen Stunden (römische Zahlen).
Die westliche Uhr zeigt rot die «modifizierten italienischen Stunden», d. h. die Stunden bis Sonnenuntergang.
Beide Uhren zeigen MEZ. Hiezu muss man im November bei der braunen Linie des Analemmas ablesen.

## «Schatzgräber»

Sonnenuhrzifferblätter enthalten ein Schatz an Informationen, vor allem wenn – wie in den vorliegenden Beispielen – verschiedene Zifferblätter kombiniert sind.
Man beantworte an Hand der Fotos (Figuren 1 und 2) folgende Fragen für den 10. November. Es empfiehlt sich dabei, Schritt für Schritt vorzugehen, da man jeweils gewonnene Erkenntnisse braucht, um die nächste Frage beantworten zu können.
Für die letzte Frage kann der erwähnte Beitrag in ORION 2/2008 hilfreich sein.

- *Wann ist ungefähr Sonnenaufgang (MEZ)?*
- *Wann ist ungefähr Sonnenuntergang (MEZ)?*
- *Wie lang ist der ganze, wie lang der halbe Tagbogen?*
- *Zu welcher Zeit kulminiert die wahre Sonne?*
- *Wann kulminiert die mittlere Sonne? (Sonnenuhr auf 7,34° östl. Länge)*
- *Wie gross ist die Zeitgleichung?*
- *Geht die Sonnenuhr gegenüber der mittleren Sonne vor oder nach?*
- *Wenn die beiden Fotos im Frühling entstanden wären, zu welcher Uhrzeit etwa?*

Die Antworten und die Überlegungen dazu werden in der nächsten ORION-Nummer publiziert.

*Figur 8: Winkelmessgerät zum Bestimmen der Richtung des Gnomons. Dazu müssen der Winkel beim besonnten Streifen und die genaue Uhrzeit abgelesen werden.*

**Wie genau ist die Sonnenuhr?**

Im erwähnten ORION-Artikel [1] steht am Schluss: «Die moderne Analemma-Sonnenuhr ... vermittelt dem Beobachter minutengenaue kosmische Uhrzeit.»

Dies ist grundsätzlich möglich. Es fragt sich, wieweit und womit dieses Ideal erreichbar ist. – In einer Minute wandert die Sonne 0,25° auf dem Äquator, 0,23° bei den Solstitien. Diese Genauigkeit müsste also mindestens eingehalten werden. Die rechnerisch erhaltenen Daten sind sicher auf Bogenminuten genau, die Berechnungen liegen somit innerhalb der «Toleranz».

Die Tücken liegen bei der praktischen Umsetzung:

**a) Die Orientierung des Zifferblattes**

Ich ermittle das Azimut mit Hilfe eines Winkelmessgerätes (Figur 8) und des Sonnenazimuts. Den Winkel kann ich auf etwa 0.5° genau ablesen. Der Durchschnitt aus 8 Messungen liefert eine Genauigkeit von etwa 0,1°. Eine 80 cm lange Wasserwaage zeigt 0,25° Abweichung von der Senkrechten deutlich an.

**b) Die Länge und die Montage des Schattenstabes**

Ein 50 mm (Soll–Wert) langer Schattenstab darf höchstens 0.5 mm zu lang oder zu kurz sein, damit bei 45° Sonneneinstrahlung der Winkelfehler 0,25° nicht übersteigt. Eine Abweichung von 0,25° von der Senkrechten macht am Stabende 0,2 mm aus. Beim Prüfen mit einem Anschlagwinkel könnte ein solcher Fehler erkannt werden.

**c) Wo ist das Schatten-Ende?**

Die Sonne ist keine punktförmige Lichtquelle, die einen klar begrenzten Schlagschatten erzeugt, sondern eine leuchtende Fläche von einem halben Grad Durchmesser. Dadurch wird auch das Schatten-Ende etwas «verschmiert». – Beim Ablesen entsteht vermutlich der grösste Fehler. Zwischen ganzen Stunden kann ohnehin nur geschätzt werden!
Eine Lochblende ergäbe zwar einen besser definierten Schattenort, sie ist aber für unsere Uhr schlecht geeig-

net und kommt eher bei Stäben zur Anwendung, die zum Pol zeigen.

**d) Ist das Analemma unveränderlich?**

Ich habe für dessen Konstruktion Daten aus dem Jahr 2010 gewählt als «Durchschnittsjahr» zwischen zwei Schaltjahren.
Meeus 3) zeigt, dass sich die Kurve der Zeitgleichung im Laufe der Jahrtausende merklich ändert, dies wegen der Änderung der Ekliptikschiefe, der Exzentrizität und der Perihellänge der Erdbahn.
Wie genau wäre eine heute erbaute Sonnenuhr nach 50 Jahren noch? Die auf dem Analemma abgelesene Zeit wäre je nach Jahreszeit etwas zu gross oder zu klein. Der Fehler würde jedoch 0,7 Minuten nirgends übersteigen.

Für meine Uhren habe ich festgestellt, dass man – vor allem bei langen Schatten – die Zeit zur vollen Stunde auf etwa 2 bis 3 Minuten genau «erwischt».
Also: Lasst uns ruhig eine Sonnenuhr bauen. Sie wird uns noch während vieler Jahre dienen, wenn sie nicht zufällig gerade ausgeschaltet ist.
Der Verfasser steht wenn nötig als Berater und Helfer zur Verfügung.

**Die Vermessung der Wand**

Dazu verwende ich ein Winkelmessgerät, wie es Figur 8 zeigt. Das Grundbrett liegt waagrecht, dessen Längskante ist an der Wand angeschlagen. Ein Schlitz im senkrechten Brettchen lässt die Sonne auf die Winkelskala scheinen. Dort kann ich den Einstrahlwinkel (E) bezüglich der Wand ablesen und die genaue Uhrzeit notieren.
«Voyager» [4] liefert mir für diese Zeit das Sonnenazimut (A) ab Norden gemessen, aus diesem erhalte ich das Azimut des Schattenstabes (die «gnomonische Deklination» D) mit der Beziehung D = A – E.
Ob die Wand senkrecht ist, muss man mit einer Wasserwaage kontrollieren und allenfalls die Neigung berechnen.
Es bleibt dann zu hoffen, dass die Wandfläche eine einigermassen ideale Ebene ist.

**Erich Laager**
Schlüchtern 9
CH-3150 Schwarzenburg

### «Mit Mathematik vom Himmel auf das Zifferblatt»

Formeln zum Berechnen der Zifferblattpunkte aus den Koordinaten der Sonne am Himmel. Nach Jean Meeus: Astronomische Algorithmen, S.403 [3]

**Gegebene Grössen**

a) Für die Uhr

- $\phi$ geografische Breite des Ortes
- D gnomonische Deklination, das ist das Azimut der Gnomon-Richtung, gemessen von Süden über Westen von 0° bis 360°. Wenn D = 0° ist es eine Süduhr; ist D = 270° haben wir eine Ostuhr.
- z Zenitabstand der Gnomon-Richtung. Wenn z = 0° ist es eine Horizontaluhr; in diesem Fall ist D sinnlos (man setze D = 0). Mit z = 90° haben wir eine Vertikaluhr.
- a Länge des Gnomons
  Für meine Berechnungen habe ich a = 1 gesetzt und am Schluss im Koordinatennetz der Grafik die Länge der Einheit x (im mm) gemessen; dieses Mass bestimmt die Stablänge.

b) Für jede Sonnenposition

- d Deklination in Grad
- H Stundenwinkel in Grad. Der Stundenwinkel der Sonne H wird vom oberen Meridiandurchgang (wahrer Mittag) aus gemessen; er wächst um 15 Grad in einer Stunde. Zum Beispiel 15° entspricht 13 Uhr am Nachmittag, -45° entsprechend 9 Uhr am Vormittag.

**Das Ergebnis**

Für jede Sonnenposition liefern die Formeln ein Zahlenpaar x, y.

Die Koordinaten x und y des Schatten-Endes des Gnomons mit der Länge a werden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gemessen, das in der Ebene der Sonnenuhr liegt. Der Ursprung dieses Systems ist der Fusspunkt des Gnomons. Die x-Achse liegt horizontal, die y-Achse liegt bei einer Vertikaluhr senkrecht, sie weist bei einer Horizontaluhr gegen Süden. In allen Fällen wird x positiv nach rechts und y positiv nach oben gemessen.

**Die Formeln**

$$P = \sin\phi \cos z - \cos\phi \sin z \cos D$$
$$Q = \sin D \sin z \sin H + (\cos\phi \cos z + \sin\phi \sin z \cos D) \cos H + P \tan\delta$$
$$N_x = \cos D \sin H - \sin D (\sin\phi \cos H - \cos\phi \tan\delta)$$
$$N_y = \cos z \operatorname{sind} D \sin H - (\cos\phi \sin z - \sin\phi \cos z \cos D) \cos H - (\sin\phi \sin z + \cos\phi \cos z \cos D) \tan\delta$$

Dann sind die Koordinaten x und y gegeben durch

$$x = a\frac{N_x}{Q} \qquad y = a\frac{N_y}{Q}$$

## Bibliographie


- [1] ORION Nr. 2/2008 S. 26 ff. Heinz Leemann, Markus Griesser, Thomas Baer: Die Analemma-Sonnenuhr / Eine Acht am Himmel?
- [2] Heinz Schilt: Ebene Sonnenuhren verstehen und planen, berechnen und zeichnen. Selbstverlag, 1985.H. Schilt war Professor für Mathematik an der Universität Bern, wohnhaft gewesen in Biel.
  Er hat seinerzeit verschiedene Sonnenuhren restauriert und neue berechnet und erstellt.
- [3] Jean Meeus: Astronomische Algorithmen. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Berlin, Heidelberg, 1992. Kapitel 27 Zeitgleichung und Kapitel 56 Berechnung einer ebenen Sonnenuhr.
- [4] «Voyager 4», Dynamic Sky Simulator. Carina-Software, Danville, CA 94526 USA, 1990-2006.