

Zeitschrift: Pestalozzi-Kalender
Herausgeber: Pro Juventute
Band: 9 (1916)
Heft: [2]: Schüler

Rubrik: Geometrie

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

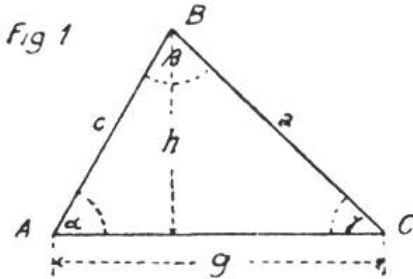
Download PDF: 18.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Geometrie.

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern

Dreieck.



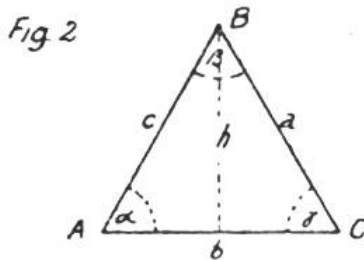
Grundlinie = g ; Höhe = h ; Fläche = F

$$F = \frac{g \times h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g;$$

$$g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g}$$

$$\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ = 2R.$$

Gleichseitiges Dreieck.



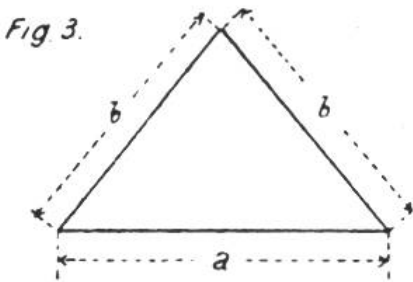
Seiten = $a = b = c$; $\angle \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = 0.433 a^2$$

(genauer 0.4330127 a^2)

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$

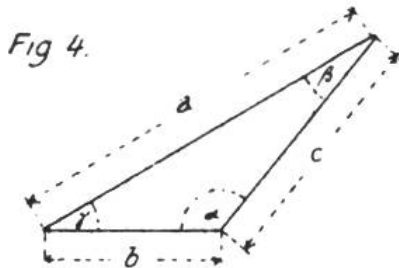
Gleichschenkliges Dreieck.



Grundlinie = a ; gleiche Seiten = b

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a)(2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)}$$

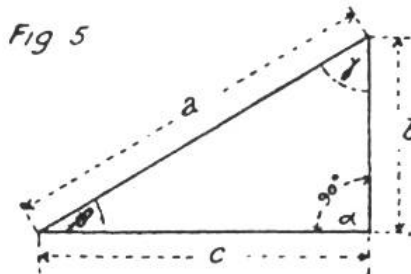
Ungleichseitiges Dreieck.



Seiten a, b und c , $s = \frac{a+b+c}{2}$,

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Rechtwinkliges Dreieck. $\angle \alpha = 90^\circ$

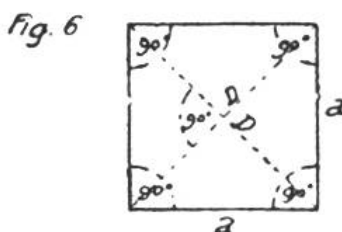


Hypotenuse = a ; Katheten = b und c ,

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Quadrat

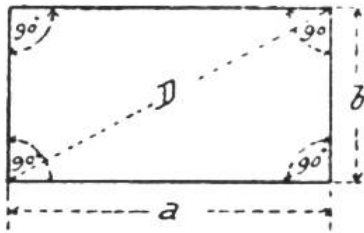


Seite = a ; Diagonale = D ;

$$F = a \times a = a^2 \quad a = \sqrt{a^2}$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1,4142$$

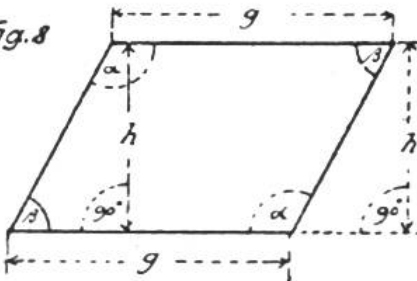
Fig. 7

Rechteck.Seiten a und b , Diagonale D ;

$$F = a \cdot b; \quad a = \frac{F}{b}; \quad b = \frac{F}{a};$$

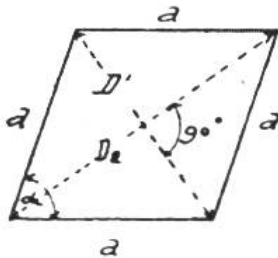
$$D = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fig. 8

Parallelogramm.Grundlinie = g Höhe (rechtwinklig auf Grundlinie) = h

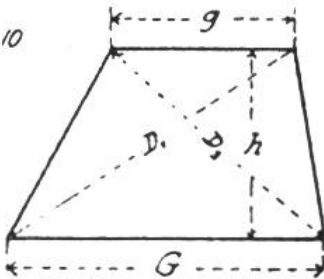
$$F = g \cdot h; \quad g = \frac{F}{h}; \quad h = \frac{F}{g};$$

Fig. 9

Rhombus.Gleiche Seiten a , Diagonalen D_1 u. D_2

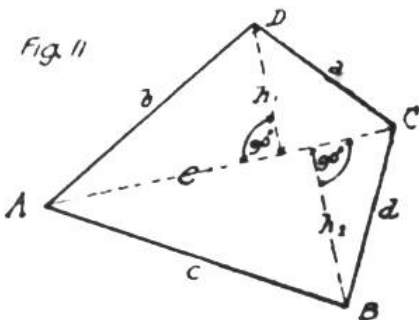
$$F = a^2 \cdot \sin \alpha; \quad F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2};$$

Fig. 10

Trapez.Parallelseiten = G und g , Höhe = h Diagonalen = D_1 und D_2

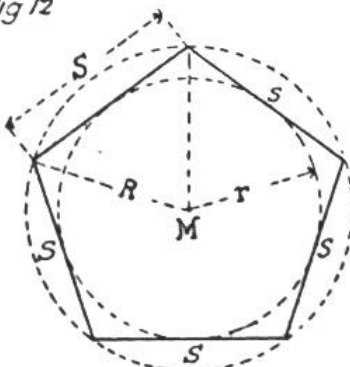
$$F = \frac{G + g}{2} \cdot h;$$

Fig. 11

Trapezoid.Diagonale $\overline{AC}$ und rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2

$$F = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{e}{2} \cdot (h_1 + h_2).$$

Fig. 12

Reguläre Vielecke (Polygon)Seite = S
Radius des umschriebenen Kreises = R ;
Radius des eingeschriebenen Kreises = r .

Polygon	R	r	S	F
Dreieck	$0.577 S$	$0.289 S$	$1.732 R$ od. $3.463 r$	$0.433 S^2$ od. $1.299 R^2$
Quadrat	$0.707 S$	$0.500 S$	$1.414 R$ " $2.000 r$	$1.000 S^2$ " $2.000 R^2$
Fünfeck	$0.851 S$	$0.695 S$	$1.776 R$ " $1.453 r$	$1.721 S^2$ " $2.378 R^2$
Sechseck	$1.000 S$	$0.866 S$	$2.000 R$ " $1.732 r$	$2.598 S^2$ " $2.598 R^2$
Siebeneck	$1.152 S$	$1.038 S$	$2.309 R$ " $2.098 r$	$3.364 S^2$ " $2.736 R^2$
Achteck	$1.307 S$	$1.208 S$	$2.618 R$ " $2.414 r$	$4.353 S^2$ " $2.828 R^2$
Neuneck	$1.462 S$	$1.374 S$	$2.954 R$ " $2.747 r$	$5.428 S^2$ " $2.892 R^2$
Zehneck	$1.618 S$	$1.540 S$	$3.307 R$ " $3.097 r$	$6.881 S^2$ " $2.939 R^2$
Elfteck	$1.775 S$	$1.704 S$	$3.681 R$ " $3.464 r$	$8.366 S^2$ " $3.073 R^2$
Zwölfeck	$1.932 S$	$1.866 S$	$4.064 R$ " $3.857 r$	$9.906 S^2$ " $3.200 R^2$

Fig. 13

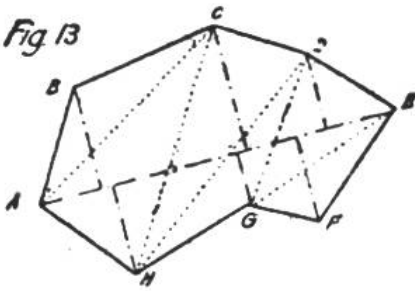


Fig. 14

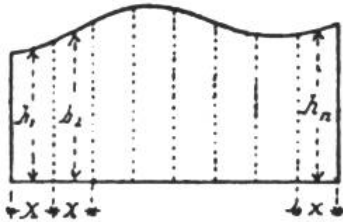


Fig. 15

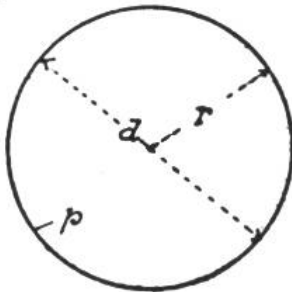


Fig. 16

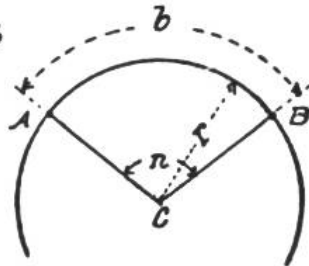


Fig. 17

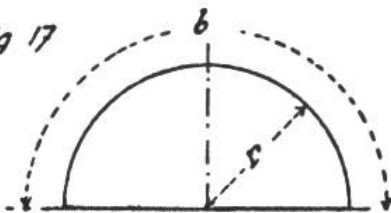
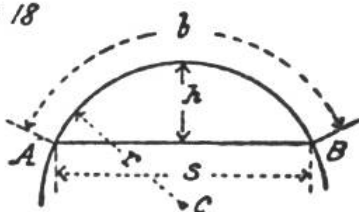


Fig. 18



Unregelmässige Vielecke od Flächen:

Fläche kann bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen und Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittelt der Koordinaten der Eckpunkte auf eine rechtwinklig gewählte Axe. Fig. 13

Durch Zerlegung in parallele Streifen gleicher Breite Fig. 14

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$

Kreis:

Durchmesser = d ; Radius = r

Umfang = p ; Inhalt = F .

$$p = d \pi = d \cdot 3.14159$$

$$= 2r \pi,$$

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = 0.785 d^2 = r^2 \pi$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0.564 \sqrt{F};$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1.128 \sqrt{F}$$

Kreissector: (A.B.C) Fig. 16.

Radius = r ; Bogen = b ;

Zentriwinkel = n ;

$$F = \frac{r^2 \pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \cdot \frac{360}{n} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = 360 \cdot \frac{F}{r^2 \pi} = \frac{b}{r \pi} \cdot 180$$

$$b = 2 r \pi \frac{n}{360} = r \pi \cdot \frac{n}{180}.$$

Halbkreisbogen = $b = \pi \cdot r$.

Halbkreisfläche = $F = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$.

Viertelkreisbogen = $b = \frac{\pi \cdot r}{2}$.

Viertelkreisfläche = $F = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$.

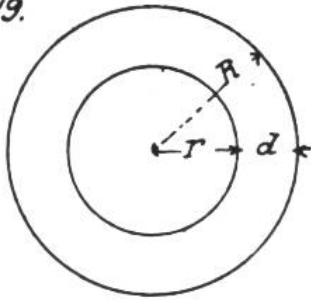
Kreisabschnitt:

Sehne = S Höhe = h . $F = \frac{2}{3} S \cdot h$.

$$\text{genau. } F = \frac{r^2 \pi n}{360} - \frac{1}{2} S \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} S^2} = \frac{b r - S(r-h)}{2}$$

$$S = 2 \sqrt{h(2r-h)} \quad r = \frac{S^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

Fig 19.

Kreisring:Äusserer Radius = R ;Innerer Radius = r

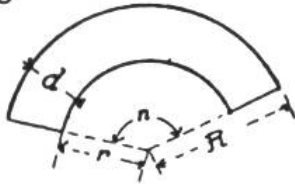
$$F = R^2 \pi - r^2 \pi.$$

$$= \pi (R+r) (R-r).$$

wenn d = radiale Breite des Kreisrings,

$$\text{so ist } F = \pi (2r+d) d.$$

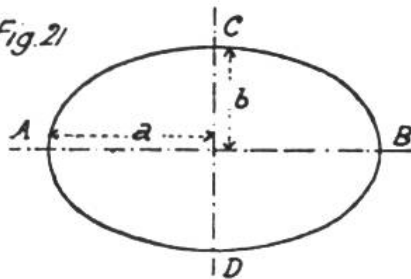
Fig. 20

Kreisringstück: (Konzentrisch)Äusserer Radius = R Innerer Radius = r Zentriwinkel = n .

$$F = (R^2 \pi - r^2 \pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \cdot \frac{\pi \cdot n}{360}$$

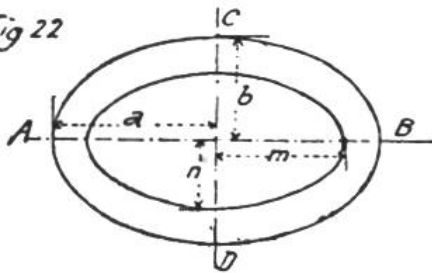
$$= (R+r) d \frac{\pi \cdot n}{360} = (R+r) d \cdot n \cdot 0.0087.$$

Fig. 21

Ellipse:Halbe Achsen der Ellipse = a und b

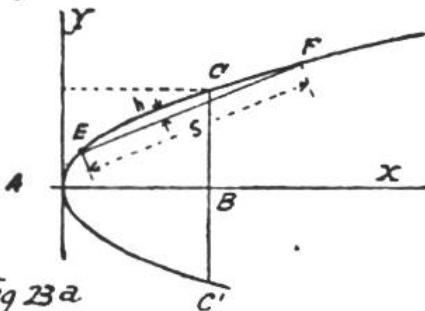
$$F = a \cdot b \cdot \pi;$$

Fig 22

Elliptischer Ring:Halbe Achsen der äusseren Ellipse a, b ,
Halbe Achsen der inneren Ellipse m, n

$$F = \pi (ab - mn).$$

Fig 23.

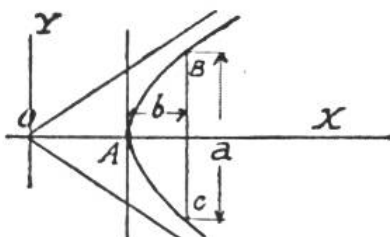
Parabelsegment ECF:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h, \quad s = EF.$$

Parabelfläche CAC':

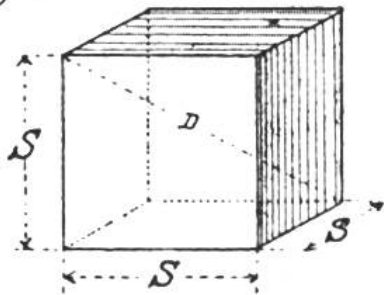
$$F = \frac{2}{3} CC' \cdot AB.$$

Fig 23a

Hyperbelsegment ABCSehne = a , Höhe = b

$$F(\text{annähernd}) = \frac{3}{5} b \cdot a.$$

Fig 24

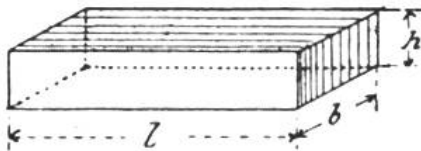
Würfel:Seite = S ; Inhalt = K ; Oberfläche = O ;

$$K = S^3; \quad O = 6S^2;$$

$$S = \sqrt[3]{K};$$

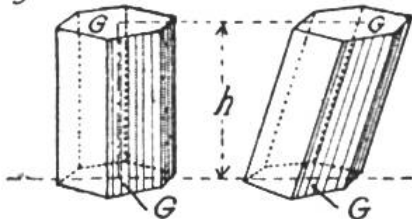
$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3}S^2 = S\sqrt{3} = S \cdot 1.732050$$

Fig 25

Parallelepipiped:Länge = l , Breite = b , Höhe = h ;

$$K = l \cdot b \cdot h.$$

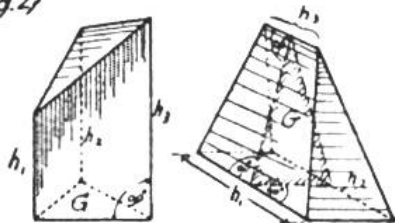
Fig. 26

Prisma:Grundfläche = G ; Höhe = h ;

$$K = G \cdot h;$$

Oberfläche O = Umfang der Grundfläche $U \times h + 2G$.

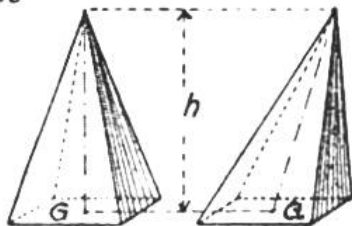
Fig. 27

Schiefabgeschnittenes PrismaFlächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G .Länge der Kanten = $h, h_1, h_2, \dots, h_n$

$$K = G \times \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$$

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymmetrie.

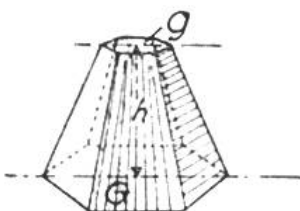
Fig 28

Pyramide:Grundfläche = G ; Höhe = h ;

$$K = \frac{G \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3K}{G}.$$

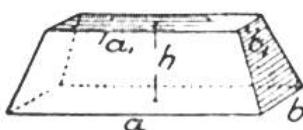
$$G = \frac{3K}{h};$$

Fig 29

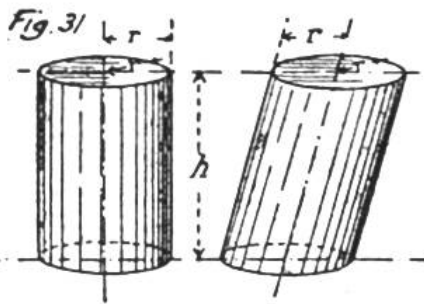
Abgestumpfte Pyramide:Inhalt der beiden Grundflächen = G u. g .

$$K = \frac{h}{3} \cdot (G + g + \sqrt{G \cdot g})$$

Fig 30

Obelisk, Wall, regelmässig aufgeschütteter Haufen.

$$K = \frac{1}{6} h [(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b]$$

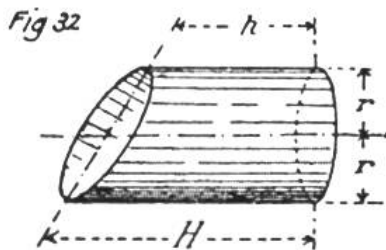


Cylinder. (Walze)

$$K = r^2 \pi \cdot h \quad \text{Mantel} = 2r\pi \cdot h$$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi \cdot h}}; \quad h = \frac{K}{r^2 \pi};$$

$$\text{Mantel} = 2r\pi \cdot h.$$

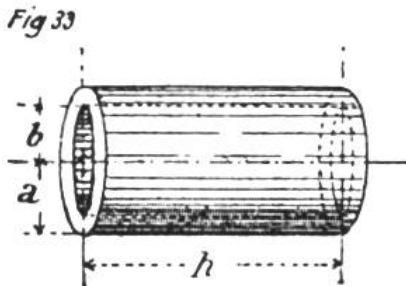


Schiefgeschnittener Cylinder

Grösste Höhe = H ; kleinste Höhe = h ;

$$K = r^2 \pi \cdot \frac{H+h}{2}$$

$$\text{Mantel} = \pi r (H+h)$$



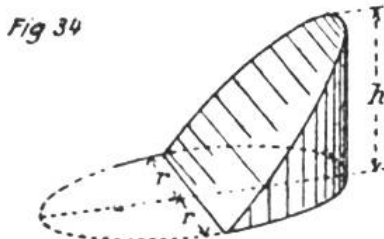
Hohlzylinder:

Innerer Halbmesser = b

äusserer Halbmesser = a , Länge = h ,

$$K = \pi \cdot h (a+b) \cdot (a-b).$$

$$K = \pi \cdot h (a^2 - b^2)$$



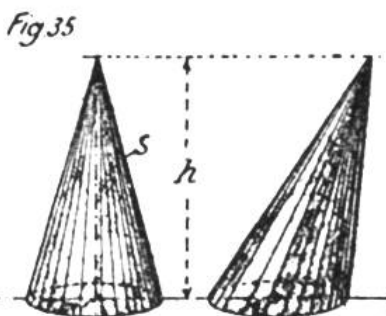
Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r

Höhe des Hufes = h

$$K = \frac{2}{3} r^2 h$$

$$M = 2r \cdot h.$$



Kegel.

Halbmesser der Grundfläche = r

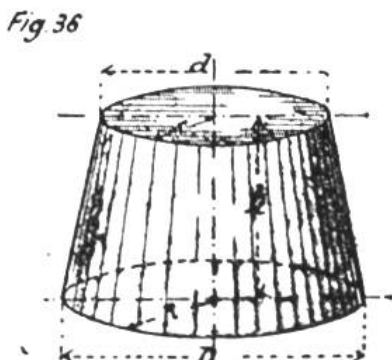
Höhe = h , Seite = s

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{Mantel } M = r\pi \cdot s$$

$$\text{Ganze Oberfläche } \Theta = \pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

$$= \pi r (s + r).$$



Abgestumpfter Kegel

Halbmesser der Grundflächen R und r

Durchmesser der Grundflächen = D und d

$$K = \frac{(R^2 + r^2 + Rr)}{3} \pi \cdot h = \frac{D^2 + d^2 + Dd}{12} \pi \cdot h$$

$$\text{Mantel} = \pi s (R+r)$$

Fig. 37

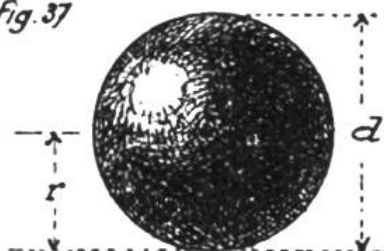


Fig. 38

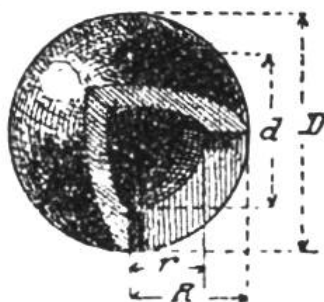


Fig. 39

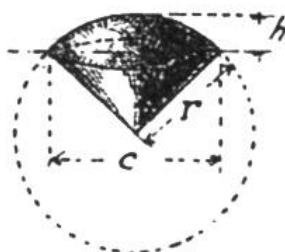


Fig. 40

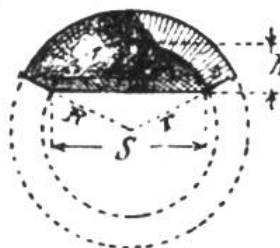


Fig. 41

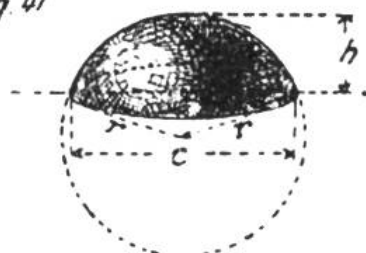
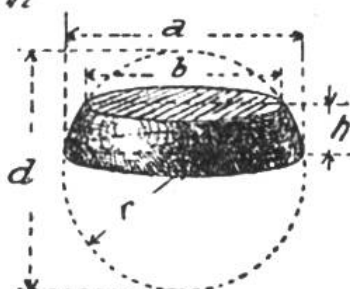


Fig. 42

Kugel:Radius = r ; Durchmesser = d

$$\text{Oberfläche } O = 4r^2\pi = d^2\pi.$$

$$= 12.566 r^2$$

$$\text{Inhalt } K = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{d^3\pi}{6} = \frac{0.5236}{3}d^3.$$

$$K = 4.189 r^3 = 0.5236 d^3.$$

$$\text{Radius } r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}; = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$$

Hohlkugel:Äusserer Radius = R innerer = r .• Durchmesser = D • • d .

$$K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3).$$

Kugelsektor:Radius der Kugel = r Begrenzende Kalotte: Höhe = h • Durchmesser = c

$$\text{Oberfläche} = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$$

$$K = \frac{2}{3}r^2\pi h = 2.094 r^2 h.$$

Hohlkugelsektor:Äusserer Radius = R innerer = r Wanddicke = s ; $R = r + s$.

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

$$\text{Inhalt } K = 2.094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3).$$

Kugelsegment:Radius der Kugel = r Kalottendurchmesser = c Höhe = h Gewölbte Oberfläche = O

$$O = 2r\pi h = \pi\left(\frac{c^2}{4} + h^2\right).$$

$$K = \frac{1}{6}\pi h(3c^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

$$= \pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right) = \pi h\left(\frac{c^2}{8} + \frac{h^2}{6}\right).$$

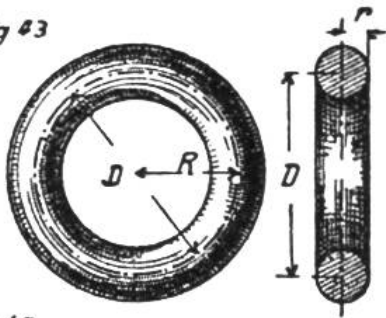
Kugelzone.Höhe der Zone = h Halbmesser der Kugel = r Halbmesser der Endflächen a und b

$$\text{Mantel} = 2r\pi h.$$

$$\text{Oberfläche} = M + a^2\pi + b^2\pi.$$

$$\text{Inhalt } K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

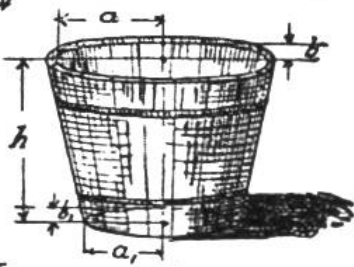
Fig. 43

Cylindrischer Ring.Radius des Kreisförm. Querschnittes = r Durchmesser des Ringes = D Radius des Ringes = R . siehe Figur.

$$K = 2\pi^2 R r^2 = 2.467 D d^2$$

$$\text{Oberfläche } O = 4\pi^2 R r = 9.87 D d$$

Fig. 44

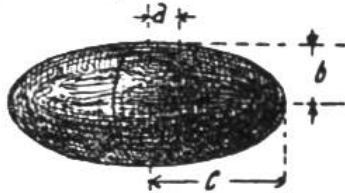
Kübel

Die Endflächen sind Ellipsen mit

den Halbachsen a, b und a, b ,Höhe zwischen den Endflächen = h

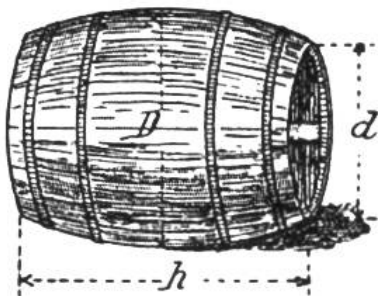
$$\text{Inhalt } K = \frac{1}{6} \pi h [2(ab + a, b) + ab + a, b]$$

Fig. 45

EllipsoidBezeichnung der 3 Halbachsen = a, b, c .

$$\text{Inhalt } K = \frac{4}{3} \pi \cdot a \cdot b \cdot c$$

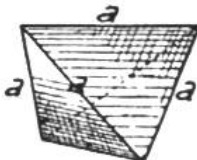
Fig. 46

FassSpunddurchmesser = D Bodendurchmesser = d Höhe = h (resp Länge)

$$\text{Inhalt } K = 1.0453 h (0.4 D^2 + 0.2 D d + 0.15 d^2)$$

Reguläre Polyeder:

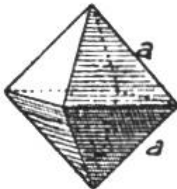
Fig. 47

Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

$$\text{Länge der Kante} = a, O = a^2 \sqrt{3} = 1.732 a^2$$

$$K = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} = 0.11785 a^3$$

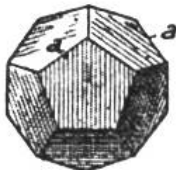
Fig. 48

Oktaeder. (8 gleichseit. Dreiecksflächen)

$$\text{Kante} = a, O = 2a^2 \sqrt{3} = 3.464116 a^2$$

$$K = \frac{a^3}{3} \sqrt{2} = 0.4714045 a^3$$

Fig. 49

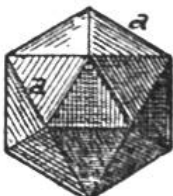
Dodekaeder (12 regelmässige Fünfecke)

$$\text{Kante} = a, O = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$= 20.645729 a^2$$

$$K = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}) = 7.663119 a^3$$

Fig. 50

Ikosaeder 20 gleichseitige Dreiecksflächen.

$$\text{Kante} = a, O = 5a^2 \sqrt{3} = 8.6602545 a^2$$

$$K = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}) = 2.181695 a^3$$