

# Geometrie

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Pestalozzi-Kalender**

Band (Jahr): **10 (1917)**

Heft [1]: **Schüler**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

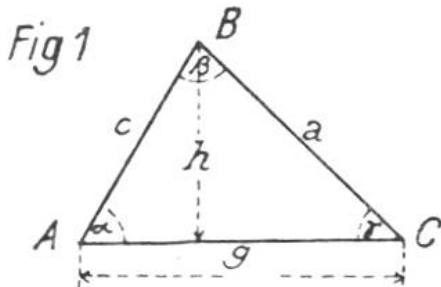
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern.



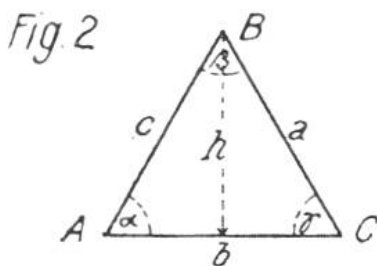
### Dreieck:

Grundlinie  $\cdot$  g; Höhe = h; Fläche = F

$$F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g;$$

$$g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g}$$

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ = 2R$$



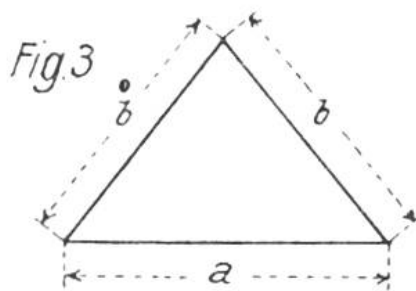
### Gleichseitiges Dreieck:

Seiten =  $a = b = c$ ;  $\sphericalangle \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 0,433 a^2$$

(genauer 0,4330127  $a^2$ )

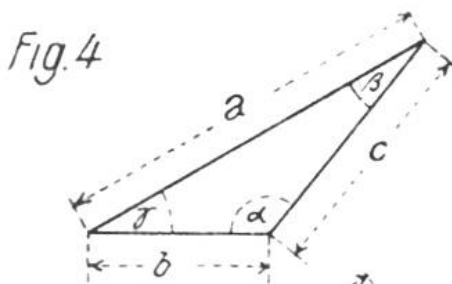
$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$



### Gleichschenkliges Dreieck.

Grundlinie = a, gleiche Seiten = b

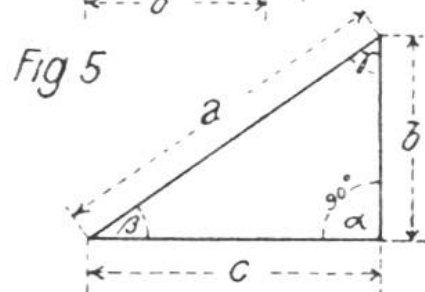
$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a) \cdot (2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)}$$



### Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c,  $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

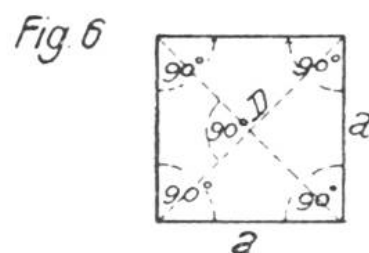


### Rechtwinkliges Dreieck; $\sphericalangle \alpha = 90^\circ$

Hypothense = a, Katheten = b und c,

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$



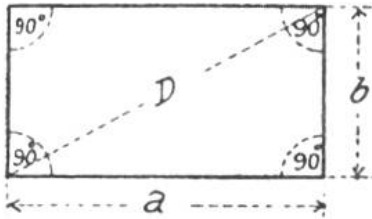
### Quadrat:

Seite = a, Diagonale = D,

$$F = a \times a = a^2 \quad a = \sqrt{F}$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1,4142$$

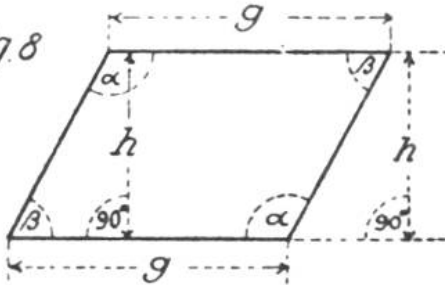
Fig. 7



Rechteck:

Seiten =  $a$  und  $b$ , Diagonale =  $D$   
 $F = a \cdot b$ ;  $a = \frac{F}{b}$ ;  $b = \frac{F}{a}$ ;  
 $D = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

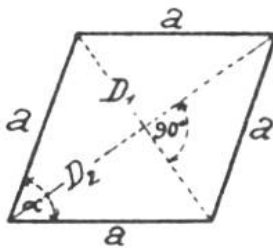
Fig. 8



Parallelogramm:

Grundlinie =  $g$ ; Höhe (rechtwinklig auf Grundlinie) =  $h$   
 $F = g \cdot h$ ;  $g = \frac{F}{h}$ ;  $h = \frac{F}{g}$ ;

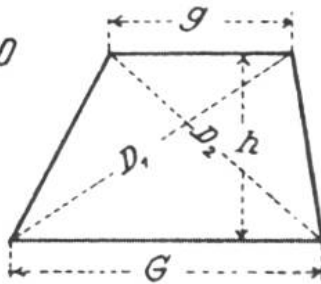
Fig. 9



Rhombus:

Gleiche Seiten =  $a$ ; Diagonalen  $D_1$  u.  $D_2$   
 $F = a^2 \cdot \sin \alpha$ ;  $F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$ .

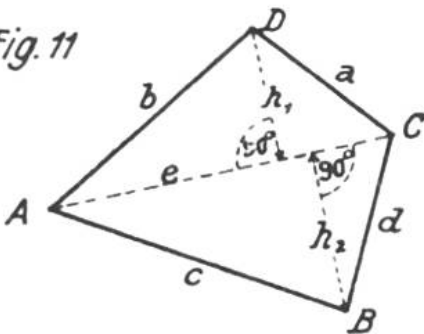
Fig. 10



Trapez:

Parallelseiten =  $G$  und  $g$ ; Höhe =  $h$   
 Diagonalen =  $D_1$  und  $D_2$   
 $F = \frac{G + g}{2} \cdot h$ ;

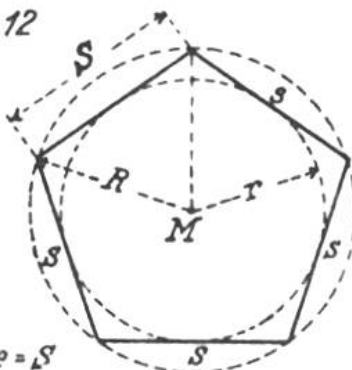
Fig. 11



Trapezoid:

Diagonale  $\overline{AC}$  und rechtwinklig darauf die Höhen  $h_1$  und  $h_2$   
 $F = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot h_1 + h_2 = \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2$ ;

Fig. 12



Seite =  $s$   
 Radius des umschriebenen Kreises =  $R$   
 Radius des eingeschriebenen Kreises =  $r$

Reguläre Vielecke (Polygon):

Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S <sup>2</sup> od. 1.299 R <sup>2</sup>
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R = 2.000 r	1.000 S <sup>2</sup> = 2.000 R <sup>2</sup>
Fünfeck	0.851 S	0.695 S	1.176 R = 1.453 r	1.721 S <sup>2</sup> = 2.378 R <sup>2</sup>
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R = 1.155 r	2.598 S <sup>2</sup> = 2.598 R <sup>2</sup>
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R = 0.963 r	3.364 S <sup>2</sup> = 2.736 R <sup>2</sup>
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.766 R = 0.828 r	4.828 S <sup>2</sup> = 2.828 R <sup>2</sup>
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R = 0.728 r	6.182 S <sup>2</sup> = 2.892 R <sup>2</sup>
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R = 0.649 r	7.694 S <sup>2</sup> = 2.939 R <sup>2</sup>
Elfteck	1.775 S	1.704 S	0.563 R = 0.587 r	9.366 S <sup>2</sup> = 2.973 R <sup>2</sup>
Zwölfeck	1.932 S	1.865 S	0.518 R = 0.536 r	11.190 S <sup>2</sup> = 3.000 R <sup>2</sup>

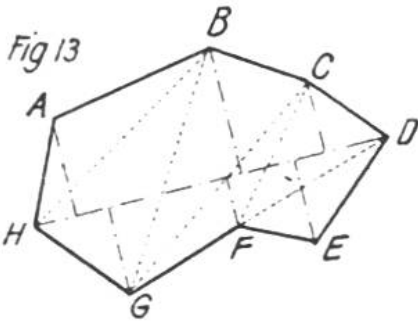


Fig 14

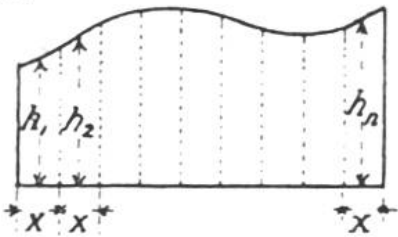


Fig 15

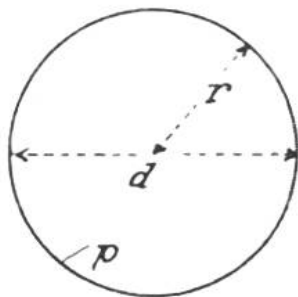


Fig 16

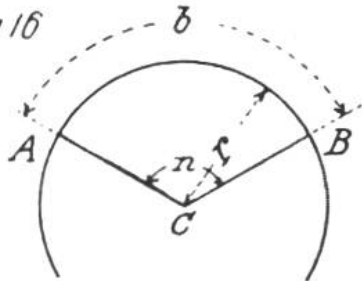


Fig 17

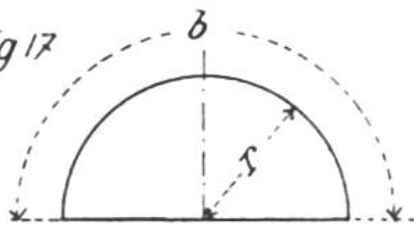
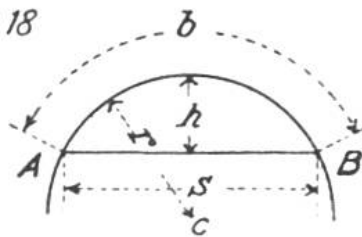


Fig 18



Unregelmässige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen und Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder durch Einteilung in Trapeze u Dreiecke vermittelst der Koordinaten der Eckpunkte auf eine rechtwinklig gewählte Axe Fig 13

Durch Zerlegung in parallele Streifen gleicher Breite Fig 14

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$

Kreis:

Durchmesser =  $d$ ; Radius =  $r$   
 Umfang =  $p$ ; Inhalt =  $F$   
 $p = d \cdot \pi = d \cdot 3,14159$   
 $= 2r \cdot \pi$ ;  
 $F = \frac{d^2 \pi}{4} = 0,785 d^2 = r^2 \pi$ .

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0,564 \sqrt{F};$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1,128 \sqrt{F}.$$

Kreissector: (ABC) Fig 16

Radius =  $r$ ; Bogen =  $b$ ;  
 Zentriwinkel =  $n$ ;

$$F = \frac{r^2 \pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \cdot \frac{360}{n} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = 360 \cdot \frac{F}{r^2 \pi} = \frac{b}{r \pi} \cdot 180$$

$$b = 2r \pi \cdot \frac{n}{360} = r \pi \cdot \frac{n}{180}$$

Halbkreis: Bogen =  $b = \pi \cdot r$ ; Fläche =  $F = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

Viertelkreis: Bogen =  $b = \frac{\pi \cdot r}{2}$ ; Fläche =  $F = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

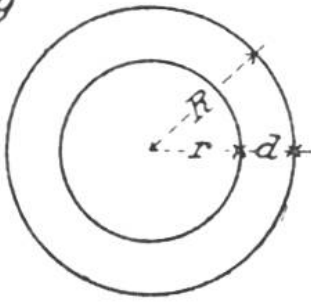
Kreisabschnitt: Fig 18

Sehne =  $s$ , Höhe =  $h$ ,  $F = \frac{2}{3} s \cdot h$ ;

$$\text{genau } F = \frac{r^2 \pi n}{360} - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} = \frac{b r - s \cdot (r - h)}{2}$$

$$s = 2 \sqrt{h(2r - h)}; \quad r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

Fig. 19

Kreisring:

Äusserer Radius =  $R$ ,

Innerer Radius =  $r$ ,

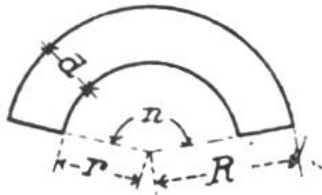
$$F = R^2\pi - r^2\pi.$$

$$= \pi \cdot (R+r) \cdot (R-r).$$

wenn  $d$  = radiale Breite des Kreisrings

so ist  $F = \pi \cdot (2r+d) \cdot d$ .

Fig. 20

Kreisringstück: (konzentrisch)

Äusserer Radius =  $R$ ,

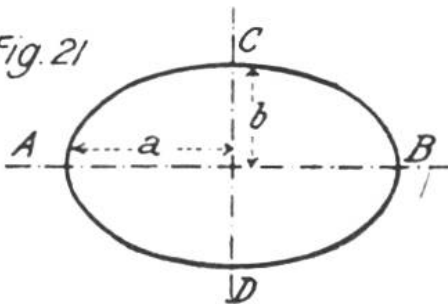
Innerer Radius =  $r$ ,

Zentriwinkel =  $n$ , radiale Breite =  $d$

$$F = (R^2\pi - r^2\pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \cdot \frac{\pi \cdot n}{360}$$

$$= (R+r)d \frac{\pi \cdot n}{360} = (R+r)d \cdot n \cdot 0.0087$$

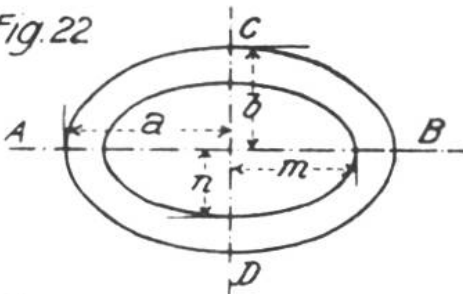
Fig. 21

Ellipse:

Halbe Achsen der Ellipse =  $a$  und  $b$ ,

$$F = a \cdot b \cdot \pi;$$

Fig. 22

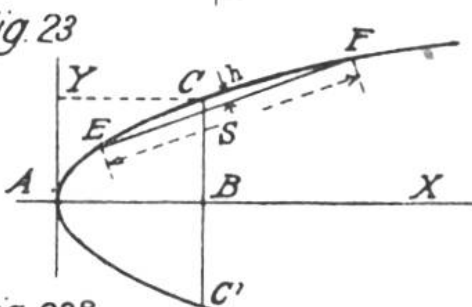
Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse =  $a, b$

Halbe Achsen der innern Ellipse =  $m, n$

$$F = \pi \cdot (a \cdot b - m \cdot n).$$

Fig. 23

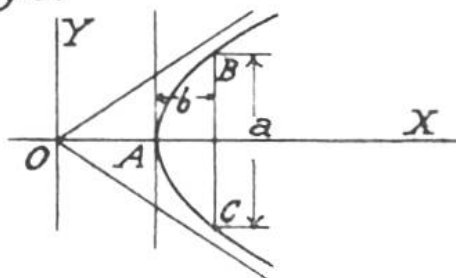
Parabelsegment ECF:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h; \quad s = \overline{EF};$$

Parabelfläche CAC':

$$F = \frac{2}{3} \overline{CC'} \cdot \overline{AB};$$

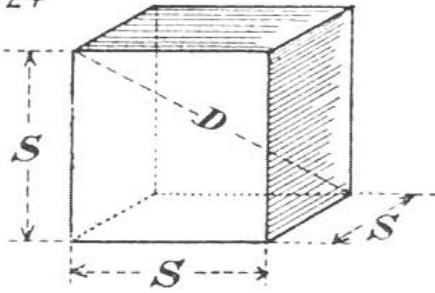
Fig. 23a

Hyperbelsegment ABC:

Sehne =  $a$ ; Höhe =  $b$

$$F \text{ (annähernd) } = \frac{3}{5} b \cdot a;$$

Fig.24



Würfel:

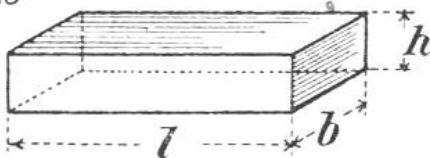
Seite =  $s$ , Inhalt =  $K$ , Oberfläche =  $O$

$$K = s^3, \quad O = 6s^2;$$

$$s = \sqrt[3]{K}$$

$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} = s \cdot 1,732050$$

Fig.25



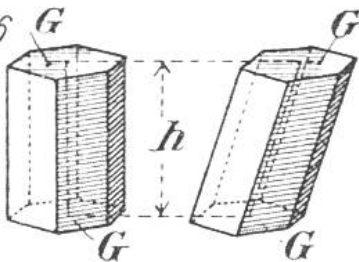
Parallelelflach:

Länge =  $l$ , Breite =  $b$ , Höhe =  $h$ ,

Inhalt =  $K = l \cdot b \cdot h$ ,

Oberfläche =  $O = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$

Fig.26



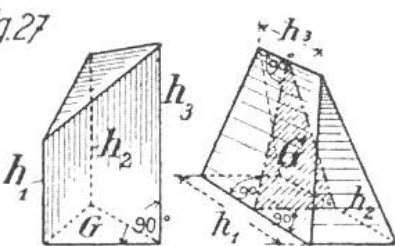
Prisma:

Grundfläche =  $G$ , Höhe =  $h$ ,

Inhalt =  $K = G \cdot h$ .

Oberfläche  $O =$  Umfang der Grundfläche  $U \cdot h + 2G$ .

Fig.27



Schiefabgeschnittenes Prisma:

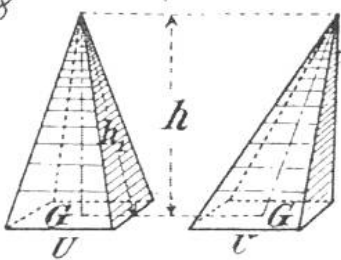
Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes =  $G$ ,

Länge der Kanten =  $h, h_2, h_3, \dots, h_n$ ,

Inhalt  $K = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymmetrie

Fig.28



Pyramide:

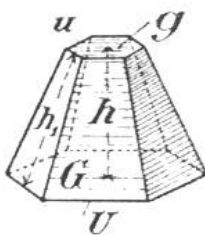
Grundfläche =  $G$ , Höhe =  $h$ ,

$$K = \frac{G \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3K}{G}, \quad G = \frac{3K}{h}$$

Mantel  $M =$  Umfang der Grundfläche  $U \cdot \frac{h_1}{2}$ ,

Oberfläche  $O = M + G$

Fig.29



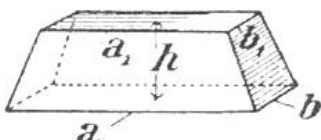
Abgestumpfte Pyramide:

Parallele Endflächen =  $G, g$ , ihr Abstand =  $h$ ,

ihr Umfänge  $U, u$ , Mantel  $M = \frac{U+u}{2} \cdot h$ ,

$$K = \frac{h}{3} (G + g + \sqrt{Gg}); \quad O = M + G + g.$$

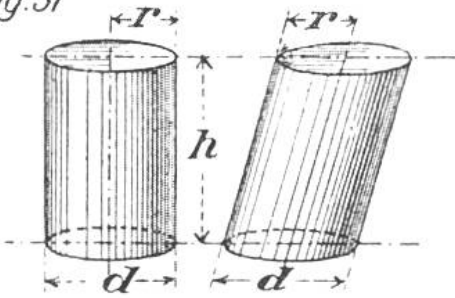
Fig.30



Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$$K = \frac{1}{6} h [(2a + a_1) b + (2a_1 + a) b]$$

Fig. 31

Cylinder (Walze)

Radius =  $r$ , Durchmesser =  $d$ , Höhe =  $h$

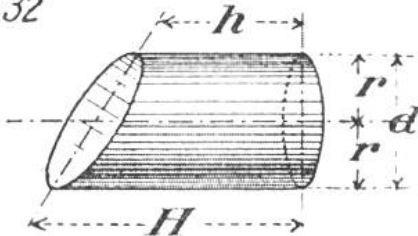
Inhalt  $K = r^2 \pi h$  oder  $\frac{d^2 \pi h}{4}$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}; \quad h = \frac{K}{r^2 \pi}$$

Mantel =  $2r\pi h$  oder  $d\pi h$ .

Oberfläche =  $2r\pi(r+h)$  oder  $d\pi(\frac{d}{2}+h)$ .

Fig. 32

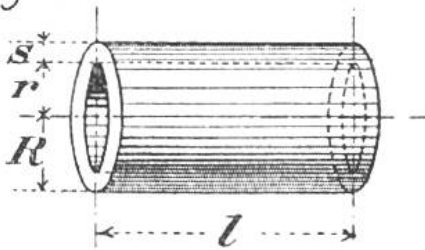
Schiefabgeschnittener Cylinder.

Grösste Höhe =  $H$ , kleinste Höhe =  $h$ ,

Inhalt  $K = r^2 \pi \frac{H+h}{2}$  oder  $\frac{d^2 \pi (H+d)}{4}$

Mantel =  $r\pi(H+h)$

Fig. 33

Hohlzylinder (Rohr):

Innerer Radius =  $r$ ,

Aüsserer Radius =  $R$ , Länge =  $l$ ,

Wandstärke =  $s = R - r$ ,

Inhalt  $K = \pi l (R^2 - r^2)$ , oder

$K = \pi l s (2R - s)$  oder  $\pi l s (2r + s)$ .

Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche =  $r$ ,

Höhe des Hufes =  $h$ , Mantel =  $2r h$ .

Inhalt:  $K = \frac{2}{3} r^2 h$ .

Fig. 34

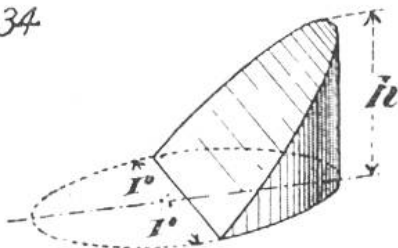
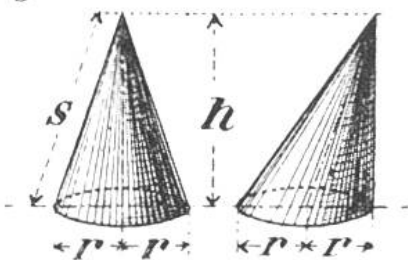


Fig. 35



Radius der Grundfläche =  $r$ ,

Höhe =  $h$ , Seite =  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ,

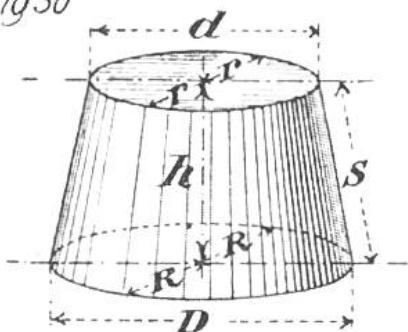
Mantel  $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$  oder  $\pi r s$ ,

Oberfläche =  $\pi r^2 + r\pi s$  oder  $r\pi(r+s)$   
oder =  $\pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2})$ .

Inhalt  $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ ;

$$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi h}}; \quad h = \frac{3K}{r^2 \pi}$$

Fig. 36

Abgestumpfter Kegel:

Radien der parallelen Endflächen =  $R$  und  $r$ ,  
Durchmesser =  $D$  und  $d$ , Höhe =  $h$ , Seite =  $s$ ,

Inhalt  $K = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$   
=  $\pi h^2 \frac{D^2 + Dd + d^2}{12}$

Mantel  $M = \pi s (R+r)$ .

Fig. 37



Fig. 38

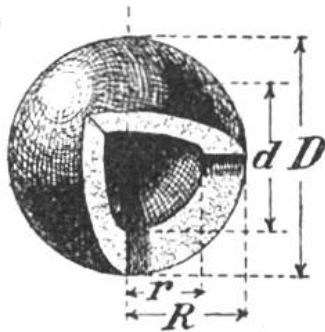


Fig. 39

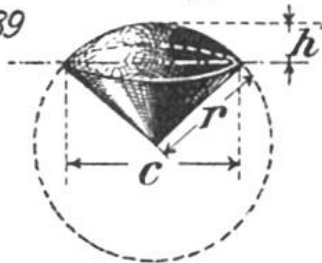


Fig. 40

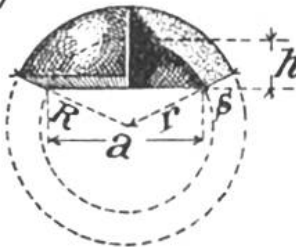


Fig. 41

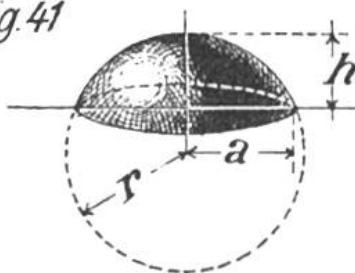
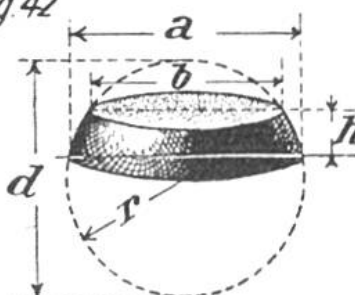


Fig. 42

Kugel:

Radius =  $r$ , Durchmesser =  $d$ ,

Oberfläche  $O = 4r^2\pi = 12,566r^2$ , oder  $d^2\pi$ .

Inhalt  $K = \frac{4}{3}r^3\pi = 4,189r^3$ ,  $K = \frac{0,5236}{3}d^3$ ,

»  $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0,5236 \cdot d^3$ ;

Radius  $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0}{\pi}}$ ;  $r = \sqrt{\frac{3K}{4\pi}}$

Hohlkugel:

Aeusserer Radius =  $R$ , innerer =  $r$ ,

Aeusserer Durchmesser =  $D$ , innerer =  $d$ ,

Inhalt  $K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$ .

Kugelsektor:

Radius der Kugel =  $r$

Begrenzende Kalotte, Höhe =  $h$ , Durchm. =  $c$ ,

Oberfläche  $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$

Inhalt  $K = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot h = 2,0944r^2h$ .

Hohlkugelsektor:

Aeusserer Radius =  $R$  innerer =  $r$

Wanddicke =  $R - r = s$ ,  $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$

Inhalt  $K = 2,094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$ .

Kugelsegment (Kugelkalotte):

Radius der Kugel =  $r$ ,

Radius der Grundfläche =  $a$ ,

Höhe der Kalotte =  $h$ ,

Oberfläche =  $O = 2\pi r h = \pi(a^2 + h^2)$

Inhalt  $K = \frac{1}{6}\pi \cdot h(3a^2 + h^2)$  oder

$= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ .

Kugelzone:

Höhe der Zone =  $h$ , Radius der Kugel =  $r$

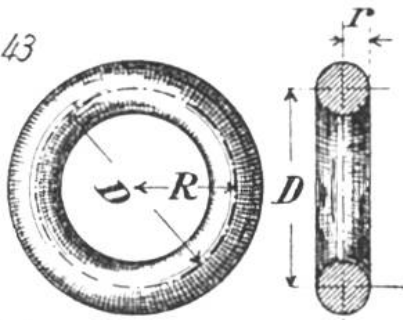
Durchmesser der Endflächen =  $a$  und  $b$ ,

Mantel  $M = 2r\pi h$ , Oberfläche  $O = M + a^2\pi + b^2\pi$ ;

Inhalt  $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$



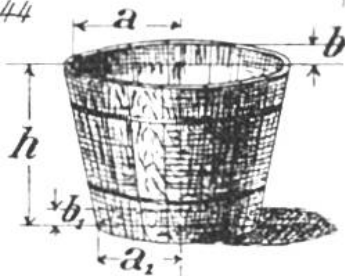
Fig 43



### Cylindrischer Ring :

Radius des kreisförmigen Querschnittes =  $r$ ,  
 Durchmesser des Ringes =  $D$ , Radius =  $R$ ,  
 Inhalt  $K = 2\pi^2 Rr^2 = 2,467 Dd^2$ .  
 Oberfläche  $O = 4\pi^2 Rr = 9,87 Dd$ .

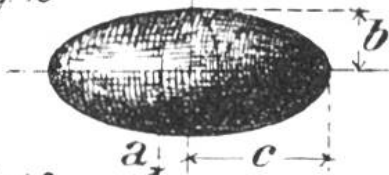
Fig. 44



### Kübel.

Die unter sich parallelen Endflächen sind  
 Ellipsen mit den Halbachsen  $a$   $b$  und  $a_1$   $b_1$ ,  
 Höhe zwischen den Endflächen =  $h$ .  
 Inhalt  $K = \frac{1}{6}\pi h [2(ab+a_1b_1)+ab_1+a_1b]$

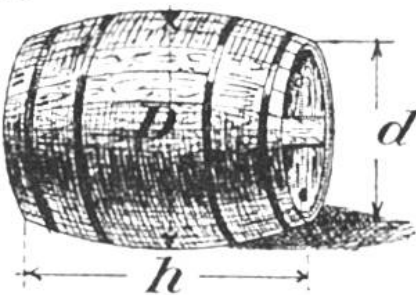
Fig 45



### Ellipsoid:

Bezeichnung der 3 Halbachsen =  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  
 Inhalt  $K = \frac{4}{3}\pi a b c$ .

Fig 46

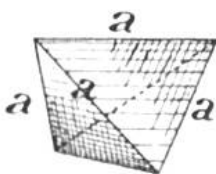


### Fass.

Spunddurchmesser =  $D$ ,  
 Bodendurchmesser =  $d$ ,  
 Höhe (resp. Länge) =  $h$ ,  
 Inhalt  $K = 1,0453 h (0,4D^2 + 0,2Dd + 0,15d^2)$

### Reguläre Polyeder:

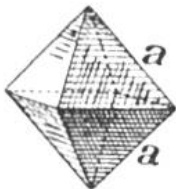
Fig 47



### Tetraeder : ( 4 gleichseitige Dreiecksflächen )

Länge der Kante =  $a$ , Oberfl.  $O = a^2\sqrt{3} = 1,732a^2$   
 Inhalt  $K = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2} = 0,11785 a^3$

Fig 48



### Oktaeder : ( 8 gleichseitige Dreiecksflächen )

Kante =  $a$ , Oberfl.  $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,464116a^2$   
 Inhalt  $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0,4714045 a^3$ .

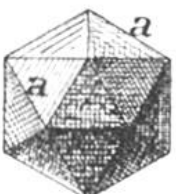
Fig 49



### Dodekaeder : ( 12 regelmässige Fünfecke )

Kante =  $a$ ,  $O = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 20,645729 a^2$   
 Inhalt  $K = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}) = 7,663119 a^3$ .

Fig 50



### Ikosaeder : ( 20 gleichseitige Dreiecksflächen )

Kante =  $a$ ,  $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545 a^2$ .  
 Inhalt  $K = \frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5}) = 2,181695 a^3$ .