

Geometrie

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Pestalozzi-Kalender**

Band (Jahr): **11 (1918)**

Heft [2]: **Schüler**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

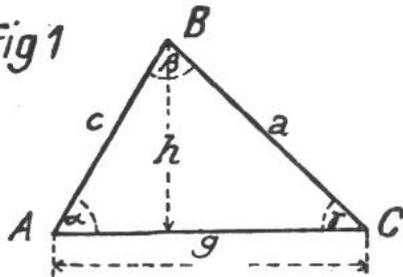
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

GEOMETRIE

Tafel I

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern.

Fig 1



Dreieck:

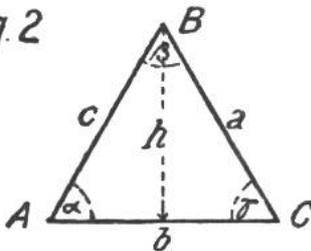
Grundlinie $\cdot g$; Höhe $= h$; Fläche $= F$

$$F = \frac{g \times h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g$$

$$g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g}$$

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ = 2R$$

Fig 2



Gleichseitiges Dreieck:

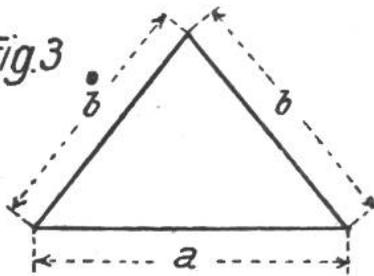
Seiten $= a = b = c$; $\sphericalangle \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 0.433 a^2$$

(genauer $0,4330127 a^2$)

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$$

Fig 3

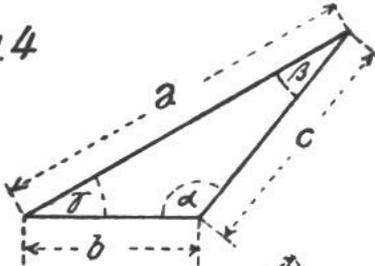


Gleichschenkliges Dreieck.

Grundlinie $= a$, gleiche Seiten $= b$

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a) \cdot (2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)}$$

Fig 4

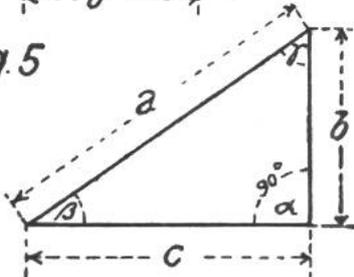


Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c , $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Fig 5



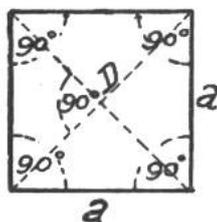
Rechtwinkliges Dreieck; $\sphericalangle \alpha = 90^\circ$

Hypotenuse $= a$, Katheten $= b$ und c .

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Fig 6



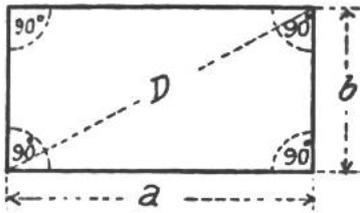
Quadrat:

Seite $= a$, Diagonale $= D$.

$$F = a \times a = a^2 \quad a = \sqrt{F}$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1,4142$$

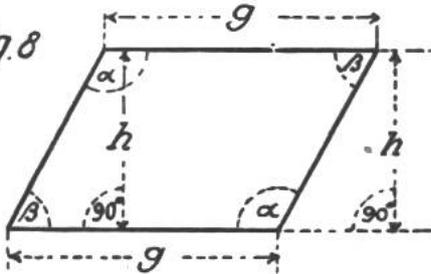
Fig. 7



Rechteck:

Seiten = a und b , Diagonale = D
 $F = a \cdot b$; $a = \frac{F}{b}$; $b = \frac{F}{a}$;
 $D = \sqrt{a^2 + b^2}$.

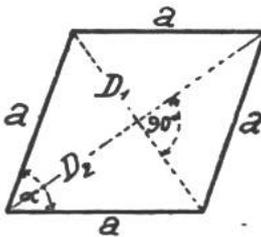
Fig. 8



Parallelogramm:

Grundlinie = g ; Höhe (rechtwinklig auf Grundlinie) = h
 $F = g \cdot h$; $g = \frac{F}{h}$; $h = \frac{F}{g}$;

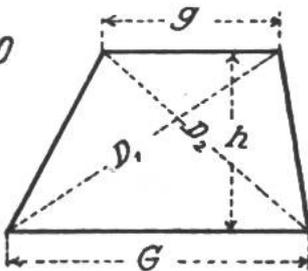
Fig. 9



Rhombus:

Gleiche Seiten = a ; Diagonalen D_1 u. D_2
 $F = a^2 \cdot \sin \alpha$; $F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$.

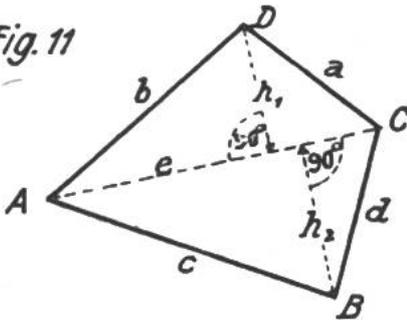
Fig. 10



Trapez:

Paralleelseiten = G und g ; Höhe = h
 Diagonalen = D_1 und D_2
 $F = \frac{G + g}{2} \cdot h$;

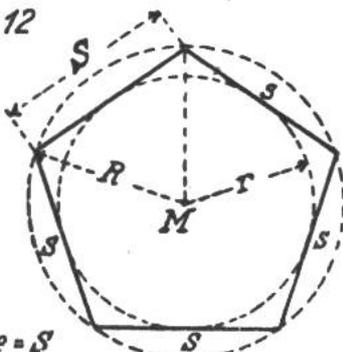
Fig. 11



Trapezoid:

Diagonale AC und rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2
 $F = \frac{AC}{2} \cdot h_1 + h_2 = \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2$;

Fig. 12



Seite = S
 Radius des umschriebenen Kreises = R
 Radius des eingeschriebenen Kreises = r

Reguläre Vielecke (Polygon):

Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S ² od. 1.299 R ²
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R = 2.000 r	1.000 S ² = 2.000 R ²
Fünfeck	0.851 S	0.695 S	1.176 R = 1.453 r	1.721 S ² = 2.378 R ²
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R = 1.155 r	2.598 S ² = 2.598 R ²
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R = 0.963 r	3.364 S ² = 2.736 R ²
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R = 0.828 r	4.828 S ² = 2.828 R ²
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R = 0.728 r	6.182 S ² = 2.892 R ²
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R = 0.649 r	7.694 S ² = 2.939 R ²
Elfleck	1.775 S	1.704 S	0.563 R = 0.587 r	9.366 S ² = 2.973 R ²
Zwölfleck	1.932 S	1.866 S	0.518 R = 0.536 r	11.190 S ² = 3.000 R ²

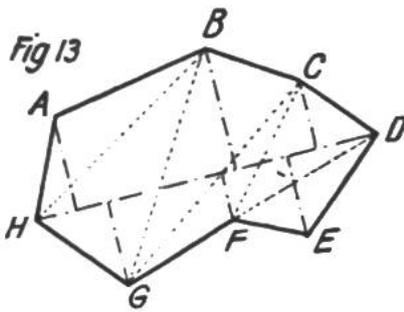


Fig 14

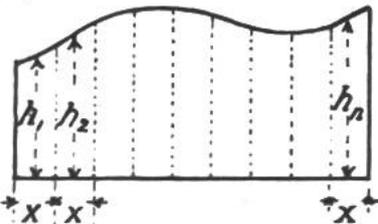


Fig 15

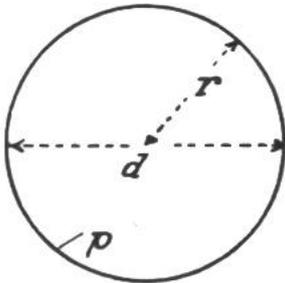


Fig 16

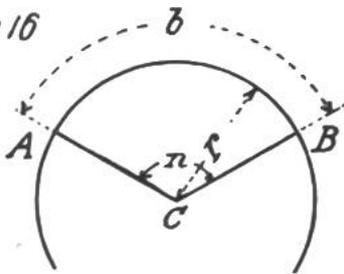


Fig 17

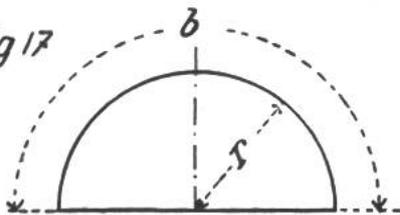
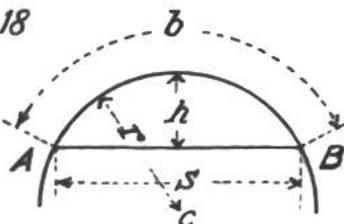


Fig 18



Unregelmässige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen und Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittelst der Koordinaten der Eckpunkte auf eine rechtwinklig gewählte Axe Fig 13.

Durch Zerlegung in parallele Streifen gleicher Breite Fig 14

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$

Kreis:

Durchmesser = d ; Radius = r

Umfang = p ; Inhalt = F

$$p = d \cdot \pi = d \cdot 3,14159$$

$$= 2r\pi;$$

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = 0,785 d^2 = r^2 \pi.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0,564 \sqrt{F};$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1,128 \sqrt{F}.$$

Kreis Sektor: (ABC) Fig 16

Radius = r ; Bogen = b ;

Zentriwinkel = n ;

$$F = \frac{r^2 \pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi} \cdot \frac{360}{n}} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = 360 \frac{F}{r^2 \pi} = \frac{b}{r \pi} \cdot 180$$

$$b = 2r\pi \cdot \frac{n}{360} = r\pi \cdot \frac{n}{180}.$$

Halbkreis: Bogen = $b = \pi \cdot r$; Fläche = $F = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

Viertelkreis: Bogen = $b = \frac{\pi \cdot r}{2}$; Fläche = $F = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

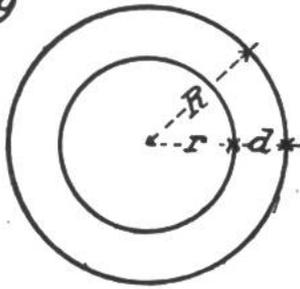
Kreisabschnitt: Fig 18

Sehne = s , Höhe = h , $F = \frac{2}{3} s \cdot h$;

$$\text{genau } F = \frac{r^2 \pi n}{360} - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} = \frac{br - s \cdot (r - h)}{2}$$

$$s = 2\sqrt{h(2r - h)}; \quad r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

Fig. 19



Kreisring:

Äusserer Radius = R ,

Innerer Radius = r ,

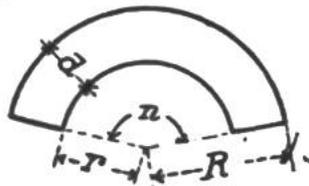
$$F = R^2\pi - r^2\pi.$$

$$= \pi \cdot (R+r) \cdot (R-r).$$

wenn d = radiale Breite des Kreisrings

so ist $F = \pi \cdot (2r+d) \cdot d$.

Fig. 20



Kreisringstück: (Konzentrisch)

Äusserer Radius = R ,

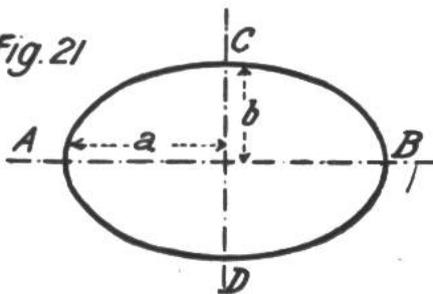
Innerer Radius = r ,

Zentriwinkel = n , radiale Breite = d

$$F = (R^2\pi - r^2\pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \cdot \frac{\pi \cdot n}{360}$$

$$= (R+r)d \frac{\pi \cdot n}{360} = (R+r)d \cdot n \cdot 0.0087$$

Fig. 21

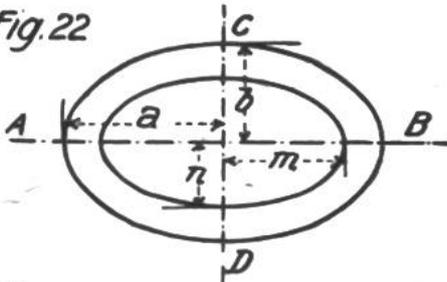


Ellipse:

Halbe Achsen der Ellipse = a und b ,

$$F = a \cdot b \cdot \pi;$$

Fig. 22



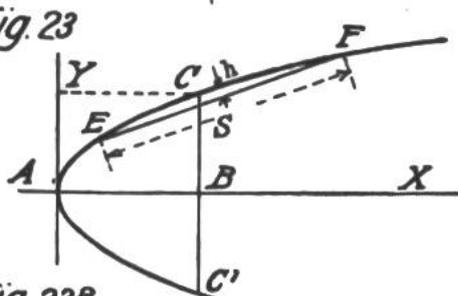
Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse = a, b

Halbe Achsen der innern Ellipse = m, n

$$F = \pi \cdot (a \cdot b - m \cdot n).$$

Fig. 23



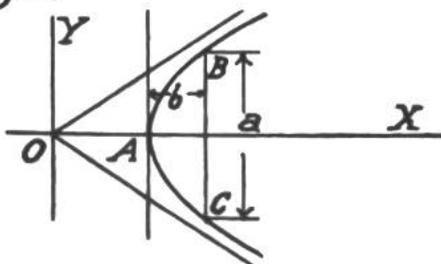
Parabelsegment ECF:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h; \quad s = \sqrt{EF}$$

Parabelfläche CAC':

$$F = \frac{2}{3} CC' \cdot AB;$$

Fig. 23a

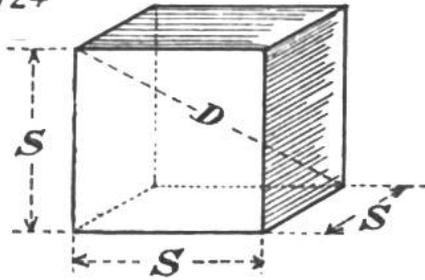


Hyperbelsegment ABC:

Sehne = a ; Höhe = b

$$F \text{ (annähernd) } = \frac{3}{5} b \cdot a;$$

Fig. 24

Würfel:Seite = s , Inhalt = K , Oberfläche = O

$$K = s^3, \quad O = 6s^2;$$

$$s = \sqrt[3]{K}$$

$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} = s \cdot 1,732050$$

Fig. 25

Parallelefläch:Länge = l , Breite = b , Höhe = h ,Inhalt = $K = l \cdot b \cdot h$,Oberfläche = $O = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$

Fig. 26

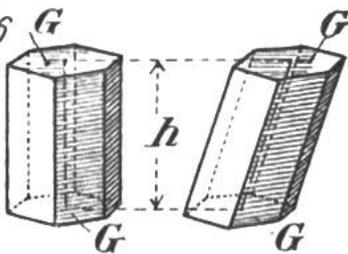
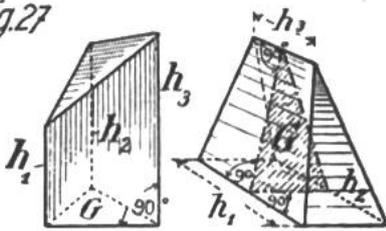
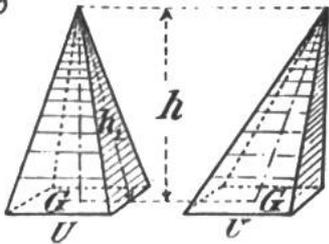
Prisma:Grundfläche = G , Höhe = h ;Inhalt = $K = G \cdot h$.Oberfläche $O =$ Umfang der Grundfläche $U \cdot h + 2G$.

Fig. 27

Schiefabgeschnittenes Prisma:Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G ,Länge der Kanten = h, h_2, h_3, \dots, h_n ,Inhalt $K = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymmetrie

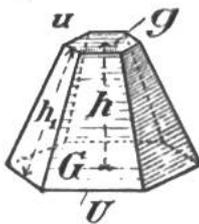
Fig. 28

Pyramide:Grundfläche = G , Höhe = h ,

$$K = \frac{G \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3K}{G}, \quad G = \frac{3K}{h}$$

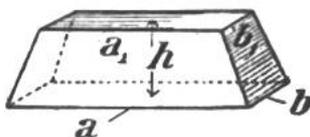
Mantel $M =$ Umfang der Grundfläche $U \cdot \frac{h}{2}$;Oberfläche $O = M + G$

Fig. 29

Abgestumpfte Pyramide:Parallele Endflächen = G, g , ihr Abstand = h ,ihre Umfänge U, u . Mantel $M = \frac{U+u}{2} \cdot h$,

$$K = \frac{h}{3} (G + g + \sqrt{Gg}); \quad O = M + G + g.$$

Fig. 30

Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$$K = \frac{1}{6} h [(2a + a_1) b + (2a_1 + a) b_1]$$

Fig. 31

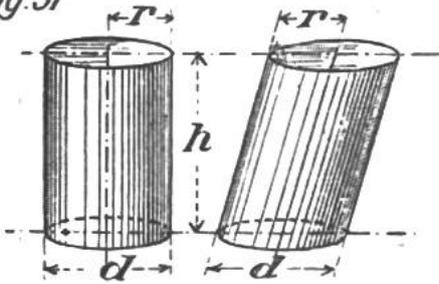


Fig. 32

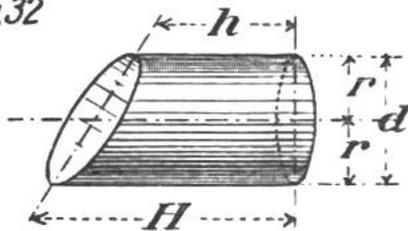


Fig. 33

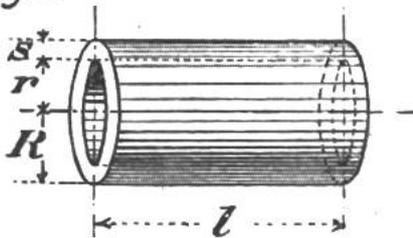


Fig. 34

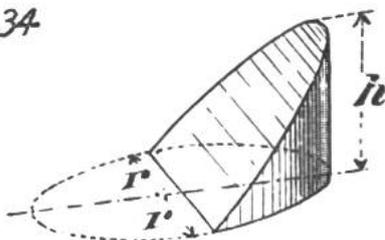


Fig. 35

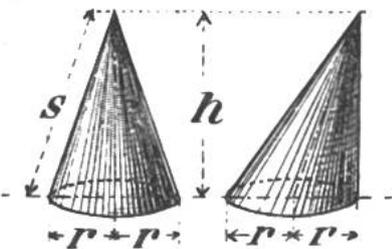
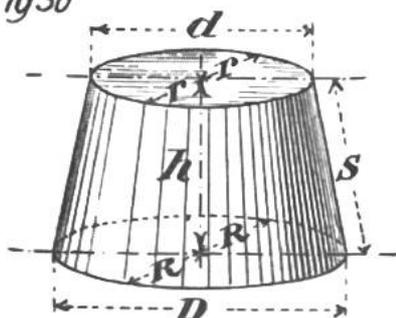


Fig. 36

Cylinder (Walze)

Radius = r , Durchmesser = d , Höhe = h

Inhalt $K = r^2 \pi h$ oder $\frac{d^2}{4} \pi h$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}; \quad h = \frac{K}{r^2 \pi}$$

Mantel = $2r\pi h$ oder $d\pi h$.

Oberfläche = $2r\pi(r+h)$ oder $d\pi(\frac{d}{2}+h)$.

Schiefabgeschnittener Cylinder.

Grösste Höhe = H , kleinste Höhe = h ,

Inhalt $K = r^2 \pi \frac{H+h}{2}$ oder $\frac{d^2 \pi}{4} \frac{H+d}{2}$

Mantel = $r\pi(H+h)$

Hohlzylinder (Rohr):

Innerer Radius = r ,

Aüsserer Radius = R , Länge = l ,

Wandstärke = $s = R - r$,

Inhalt $K = \pi l (R^2 - r^2)$, oder

$$K = \pi l s (2R - s) \text{ oder } \pi l s (2r + s).$$

Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r ,

Höhe des Hufes = h , Mantel = $2r \cdot h$.

Inhalt: $K = \frac{2}{3} r^2 h$.

Kegel:

Radius der Grundfläche = r .

Höhe = h , Seite = $s = \sqrt{r^2 + h^2}$,

Mantel $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ oder $\pi r s$,

Oberfläche = $\pi r^2 + r\pi s$ oder $r\pi(r+s)$

$$\text{oder} = \pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

Inhalt $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h$;

$$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi h}}; \quad h = \frac{3K}{r^2 \pi}$$

Abgestumpfter Kegel:

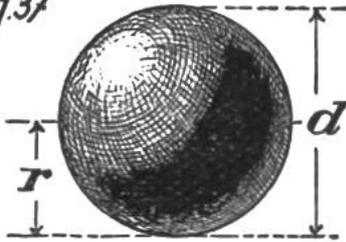
Radien der parallelen Endflächen = R und r ,
Durchmesser = D und d , Höhe = h , Seite = s ,

Inhalt $K = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$

$$= \frac{\pi h^2}{12} (D^2 + Dd + d^2)$$

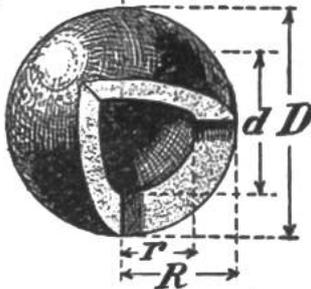
Mantel $M = \pi s (R+r)$.

Fig.37

Kugel:

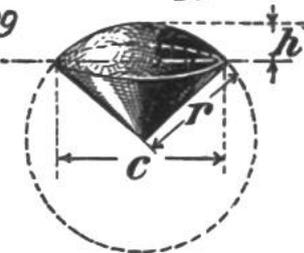
Radius = r , Durchmesser = d ,
 Oberfläche $O = 4r^2\pi = 12,566r^2$, oder $d^2\pi$.
 Inhalt $K = \frac{4}{3}r^3\pi = 4,189r^3$, $K = \frac{0,5236}{3}d^3$,
 „ $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0,5236 \cdot d^3$,
 Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$

Fig.38

Hohlkugel:

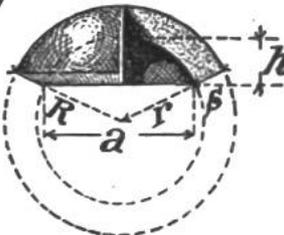
Aeusserer Radius = R , innerer = r ,
 Aeusserer Durchmesser = D , innerer = d ,
 Inhalt $K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$.

Fig.39

Kugelsektor:

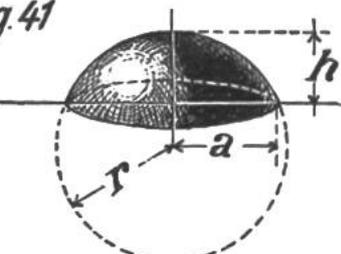
Radius der Kugel = r
 Begrenzende Kalotte, Höhe = h , Durchm. = c ,
 Oberfläche $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$
 Inhalt $K = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot h = 2,0944r^2h$.

Fig.40

Hohlkugelsektor:

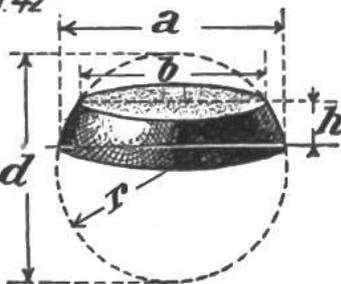
Aeusserer Radius = R innerer = r
 Wanddicke = $R - r = s$, $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$
 Inhalt $K = 2,094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$.

Fig.41

Kugelsegment (Kugelkalotte):

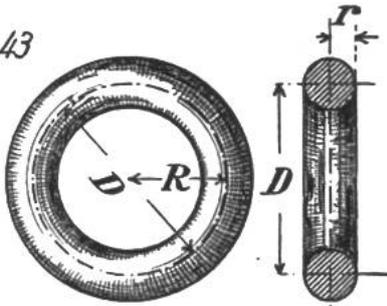
Radius der Kugel = r ,
 Radius der Grundfläche = a ,
 Höhe der Kalotte = h ,
 Oberfläche = $O = 2\pi r h = \pi(a^2 + h^2)$
 Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ oder
 $= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

Fig.42

Kugelzone:

Höhe der Zone = h , Radius der Kugel = r
 Durchmesser der Endflächen = a und b ,
 Mantel $M = 2r\pi h$, Oberfläche $O = M + a^2\pi + b^2\pi$,
 Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$

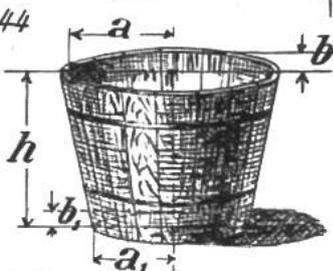
Fig 43



Cylindrischer Ring :

Radius des kreisförmigen Querschnittes = r ,
 Durchmesser des Ringes = D , Radius = R ,
 Inhalt $K = 2\pi^2 Rr^2 = 2,467 Dd^2$.
 Oberfläche $O = 4\pi^2 Rr = 9,87 Dd$.

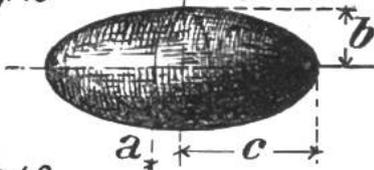
Fig. 44



Kübel.

Die unter sich parallelen Endflächen sind
 Ellipsen mit den Halbachsen a b und a_1 b_1 ,
 Höhe zwischen den Endflächen = h .
 Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h[2(ab+a_1b_1)+ab_1+a_1b]$

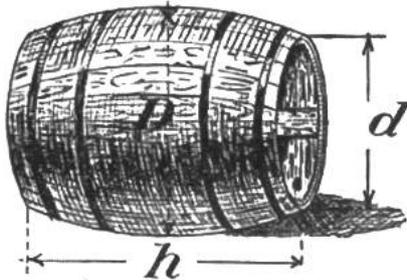
Fig 45



Ellipsoid:

Bezeichnung der 3 Halbachsen = a, b, c ,
 Inhalt $K = \frac{4}{3}\pi a b c$.

Fig. 46

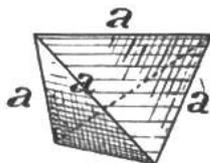


Fass.

Spunddurchmesser = D ,
 Bodendurchmesser = d ,
 Höhe (resp. Länge) = h ,
 Inhalt $K = 1,0453 h(0,4D^2 + 0,2Dd + 0,15d^2)$

Reguläre Polyeder:

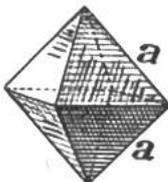
Fig. 47



Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante = a , Oberfl. $O = a^2\sqrt{3} = 1,732a^2$
 Inhalt $K = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2} = 0,11785 a^3$

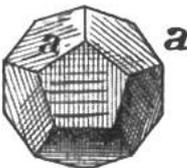
Fig. 48



Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a , Oberfl. $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,464116a^2$
 Inhalt $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0,4714045 a^3$.

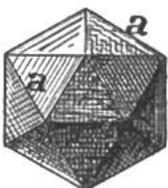
Fig. 49



Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante = a , $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20,645729a^2$
 Inhalt $K = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = 7,663119 a^3$.

Fig. 50



Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a , $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545 a^2$.
 Inhalt $K = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}) = 2,181695 a^3$.