

# Geometrie

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Pestalozzi-Kalender**

Band (Jahr): **20 (1927)**

Heft [2]: **Schüler**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

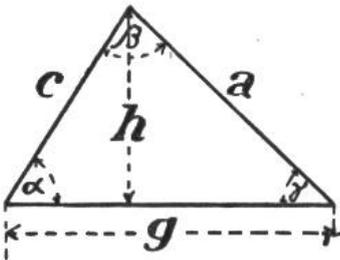
## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Geometrie

Tafel I

## Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen u Körpern



### Dreieck:

Grundlinie =  $g$ , Höhe =  $h$ , Fläche =  $F$ ,

$$F = \frac{g \cdot h}{2}; \quad g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g};$$

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ = 2 \text{ rechte } \sphericalangle$$

### Gleichseitiges Dreieck:

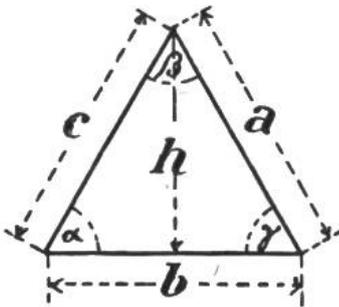
Seiten =  $a = b = c$ ,  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 0,433 a^2; \quad \sqrt{3} = 1,73205.$$

genauer  $0,4330125 \cdot a^2$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$

$$h = \frac{a \sqrt{3}}{2} = a \cdot 0,866025.$$

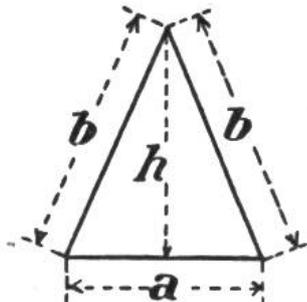


### Gleichschenkliges Dreieck:

Grundlinie =  $a$ , gleiche Seiten =  $b$

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a) \cdot (2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{(b+\frac{a}{2}) \cdot (b-\frac{a}{2})}$$

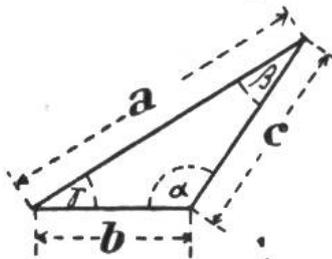
$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \sqrt{(b+\frac{a}{2}) \cdot (b-\frac{a}{2})};$$



### Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten  $a, b$  und  $c$ ,  $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

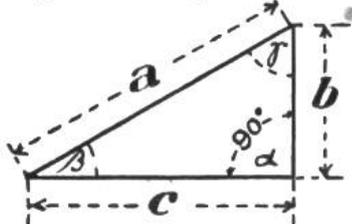


### Rechtwinkliges Dreieck: $\sphericalangle \alpha = 90^\circ$

Hypotenuse =  $a$ , Katheten =  $b, c$ ,

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

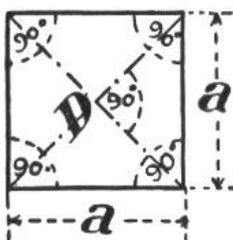
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

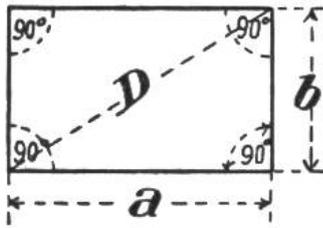


### Quadrat: Seite = $a$ , Diagonale = $D$ ,

$$F = a \cdot a = a^2, \quad a = \sqrt{F}.$$

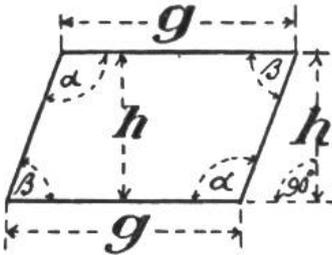
$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a \cdot \sqrt{2} = a \cdot 1,4142.$$





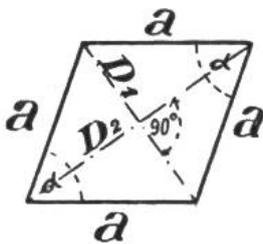
**Rechteck:**

Seiten  $a$  und  $b$ , Diagonale =  $D$ ,  
 $F = a \cdot b$ ;  $a = \frac{F}{b}$ ;  $b = \frac{F}{a}$ ;  
 $D = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;



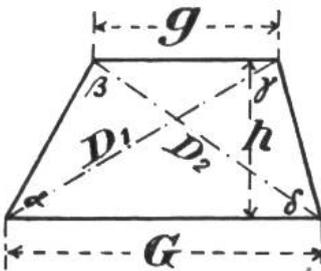
**Parallelogramm:**

Grundlinie =  $g$ , Höhe rechtwinklig  
 auf Grundlinie =  $h$ ,  
 $F = g \cdot h$ ;  $g = \frac{F}{h}$ ,  $h = \frac{F}{g}$ .



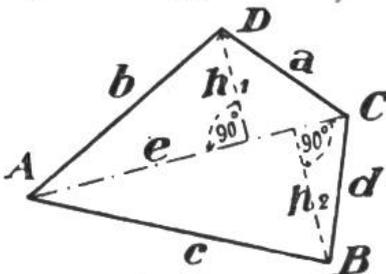
**Rhombus:**

Gleiche Seiten =  $a$ , Diagonalen  $D_1$  u.  $D_2$   
 $F = a^2 \cdot \sin \alpha$ ;  $F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$ ;  
 $D_1 = \frac{2F}{D_2}$ ;  $D_2 = \frac{2F}{D_1}$ .



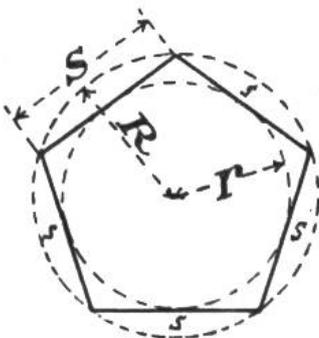
**Trapez:**

Paralleelseiten =  $G$  und  $g$ , Höhe =  $h$ ,  
 Diagonalen =  $D_1$  und  $D_2$ ,  
 $F = \frac{G+g}{2} \cdot h$ ;  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$ ;



**Trapezoid.**

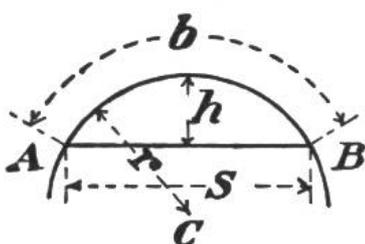
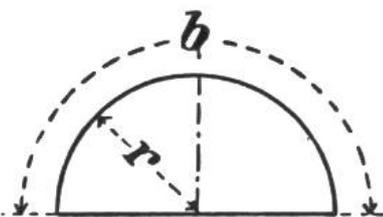
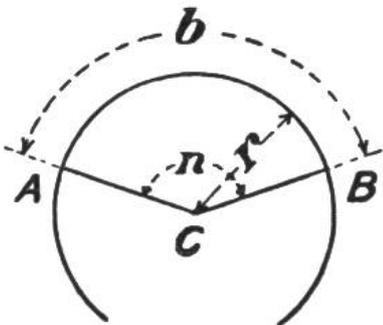
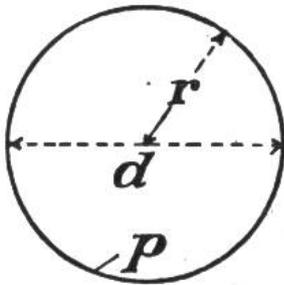
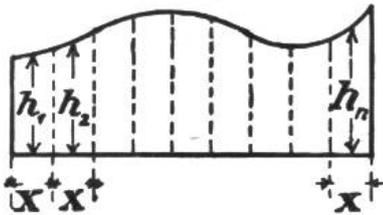
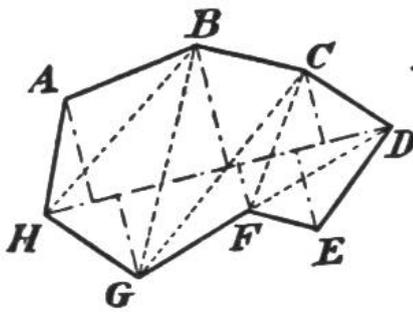
Diagonale  $AC$ , rechtwinklig darauf  
 die Höhen  $h_1$  und  $h_2$   
 $F = \frac{AC}{2} \cdot h_1 + h_2$ ;  $= \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2$ .



**Reguläre Vielecke (Polygone):**

Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S <sup>2</sup> od. 1.299 R <sup>2</sup>
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R,, 2.000 r	1.000 S <sup>2</sup> ,, 2.000 R <sup>2</sup>
Fünfeck	0.851 S	0.688 S	1.176 R,, 1.453 r	1.721 S <sup>2</sup> ,, 2.378 R <sup>2</sup>
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R,, 1.155 r	2.598 S <sup>2</sup> ,, 2.598 R <sup>2</sup>
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R,, 0.968 r	3.634 S <sup>2</sup> ,, 2.736 R <sup>2</sup>
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R,, 0.828 r	4.828 S <sup>2</sup> ,, 2.828 R <sup>2</sup>
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R,, 0.728 r	6.182 S <sup>2</sup> ,, 2.892 R <sup>2</sup>
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R,, 0.649 r	7.684 S <sup>2</sup> ,, 2.939 R <sup>2</sup>
Elfleck	1.775 S	1.704 S	0.563 R,, 0.587 r	9.366 S <sup>2</sup> ,, 2.973 R <sup>2</sup>
Zwölfleck	1.932 S	1.866 S	0.518 R,, 0.536 r	11.196 S <sup>2</sup> ,, 3.000 R <sup>2</sup>

Seite =  $S$ ,  
 Radius des umschrie-  
 benen Kreises =  $R$ .  
 Radius d. eingeschrie-  
 benen Kreises =  $r$ .



## Unregelmässige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann berechnet werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen u. Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder auch durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittels einer passend gewählten Abszisse und rechtwinklig auf diese errichteten Koordinaten der Eckpunkte, Summierung des ermittelten Inhalts dieser Trapeze u. Dreiecke.

Durch Zerlegung in parallele Streifen von gleicher Breite  $x$  und mittl. Höhen  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n).$$

Kreis: Durchmesser =  $d$ , Radius =  $r$ ,  
Umfang =  $p$ , Inhalt =  $F$ .

$$p = 2r\pi = d\pi = d \cdot 3,14159,$$

$$F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4} = 0,785 \cdot d^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0,564 \cdot \sqrt{F}.$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1,128 \sqrt{F}.$$

## Kreisesektor: (ABCA)

Radius =  $r$ , Bogen =  $b$ , Zentriwinkel =  $n$

$$F = \frac{r^2\pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F \cdot 360}{\pi \cdot n}} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = \frac{360 \cdot F}{r^2 \pi} = \frac{b}{r \cdot \pi} \cdot 180;$$

$$b = 2r\pi \cdot \frac{n}{360} = r\pi \cdot \frac{n}{180};$$

Halbkreis: Bogen =  $b = \pi r$ , Fläche =  $F = \frac{\pi r^2}{2}$ .

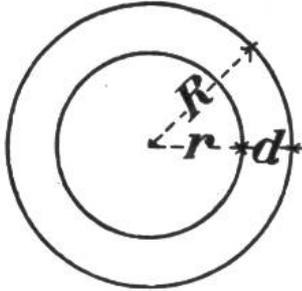
Viertelkreis: „ =  $\frac{b}{2} = \frac{\pi r}{2}$ ;  $F = \frac{\pi r^2}{4}$ ;

## Kreisabschnitt:

Sehne =  $s$ , Höhe =  $h$ ,  $F = \frac{2}{3} s \cdot h$ .

$$\text{genau } F = \frac{r^2\pi \cdot n}{360} - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$$

$$s = 2\sqrt{h(2r-h)}; \quad r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

Kreisring:

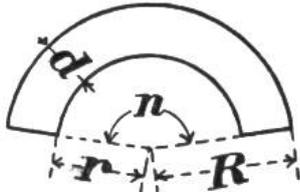
Äusserer Radius =  $R$ ,

Innener Radius =  $r$ ,

$$F = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R+r)(R-r)$$

wenn  $d =$  radiale Breite des Kreisrings

$$\text{so ist } F = \pi(2r+d) \cdot d,$$

Kreisringstück (Konzentrisch)

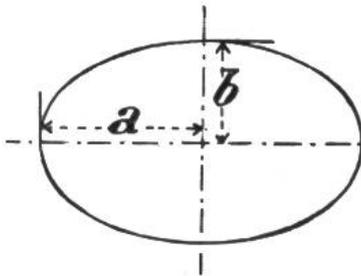
Äusserer Radius =  $R$ ,

Innener Radius =  $r$ ,

Zentriwinkel =  $n$ , radiale Breite =  $d$ ,

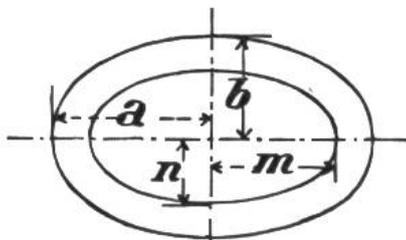
$$F = (R^2\pi - r^2\pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \frac{\pi n}{360};$$

$$= (R+r)d \frac{\pi n}{360} = (R+r)d \cdot n \cdot 0.0087,$$



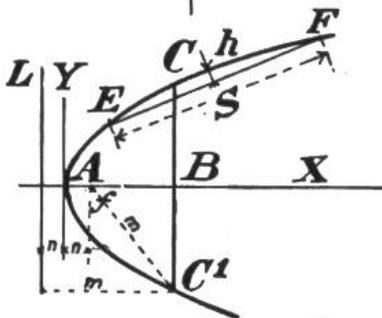
Ellipse: Halbe grosse Achse =  $a$ ,  
Halbe kleine Achse =  $b$ ,

$$\text{Fläche } F = a \cdot b \cdot \pi,$$

Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse =  $a, b$ ,  
Halbe Achsen der innern Ellipse =  $m, n$ ,

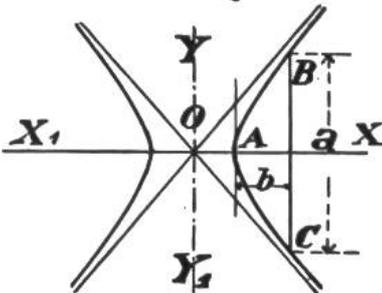
$$\text{Fläche: } F = \pi(ab - mn).$$

Parabelsegment ECFE:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h, \quad s = \overline{EF},$$

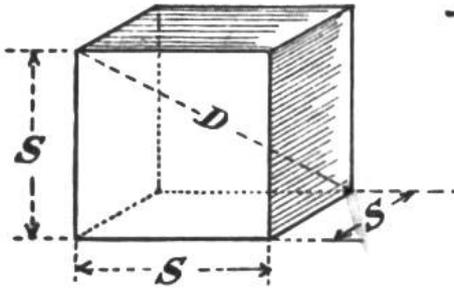
Parabelfläche CAC'C:

$$F = \frac{2}{3} \overline{CC'} \cdot \overline{AB},$$

Hyperbelsegment ABCA:

Sehne =  $a$ ; Höhe =  $b$ ,

$$F \text{ (annähernd) } = \frac{3}{5} a \cdot b,$$

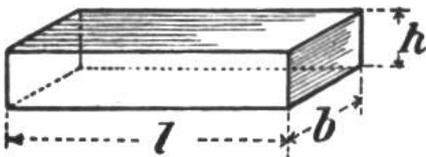
Würfel:

Seite =  $s$ , Inhalt =  $K$ , Oberfläche =  $O$

$$K = s^3, \quad O = 6s^2;$$

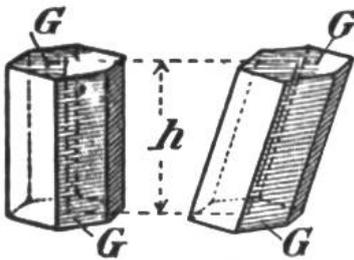
$$s = \sqrt[3]{K}$$

$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} = s \cdot 1,732050.$$

Parallelepipedon:

Länge =  $l$ , Breite =  $b$ , Höhe =  $h$ ,  
Inhalt =  $K = l \cdot b \cdot h$ .

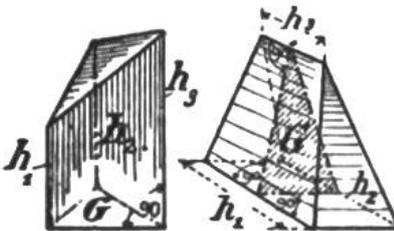
$$\text{Oberfläche} = O = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$$

Prisma:

Grundfläche =  $G$ , Höhe =  $h$ ;

Inhalt =  $K = G \cdot h$ .

Oberfläche  $O = \text{Umfang der Grundfläche} \times h + 2G$ .

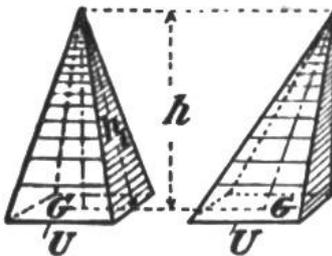
Schiefabgeschnittenes Prisma:

Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes =  $G$ ,

Länge der Kanten =  $h, h_2, h_3, \dots, h_n$ ,

Inhalt  $K = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$ .

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Achsensymmetrie

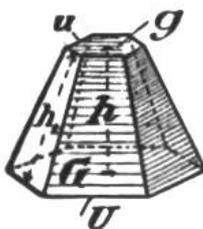
Pyramide:

Grundfläche =  $G$ , Höhe =  $h$ ,

$$K = \frac{G \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3K}{G}, \quad G = \frac{3K}{h};$$

Mantel  $M = \text{Umfang der Grundfläche} \times \frac{h}{2}$ ;

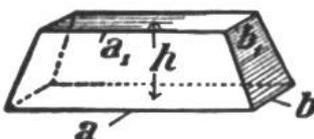
Oberfläche  $O = M + G$ .

Abgestumpfte Pyramide:

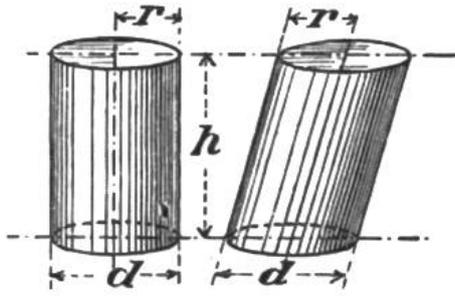
Parallele Endflächen =  $G, g$ , ihr Abstand =  $h$ ,

ihr Umfänge  $U, u$ , Mantel  $M = \frac{U+u}{2} \cdot h$ ;

$$K = \frac{h}{3} (G + g + \sqrt{Gg}); \quad O = M + G + g.$$

Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$$K = \frac{1}{6} h [(2a+a_1) b + (2a_1+a) b_1].$$



### Cylinder (Walze)

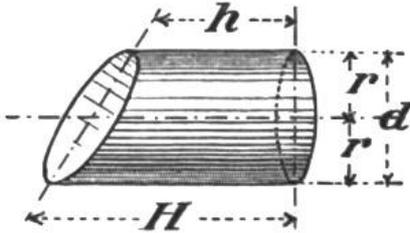
Radius =  $r$ , Durchmesser =  $d$ , Höhe =  $h$

Inhalt  $K = r^2 \pi h$  oder  $\frac{d^2 \pi h}{4}$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}, \quad h = \frac{K}{r^2 \pi}$$

Mantel =  $2r\pi h$  oder  $d\pi h$ .

Oberfläche =  $2r\pi(r+h)$  oder  $d\pi(\frac{d}{2}+h)$ .

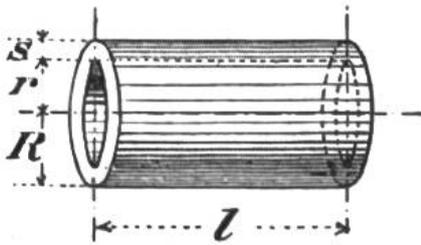


### Schiefabgeschnittener Cylinder:

Grösste Höhe =  $H$ , kleinste Höhe =  $h$ ,

Inhalt  $K = r^2 \pi \frac{H+h}{2}$  oder  $\frac{d^2 \pi (H+h)}{4}$

Mantel =  $r\pi(H+h)$



### Hohlzylinder (Rohr):

Innerer Radius =  $r$ ,

Aeusserer Radius =  $R$ , Länge =  $l$ ,

Wandstärke =  $s = R - r$ ,

Inhalt  $K = \pi l (R^2 - r^2)$ , oder

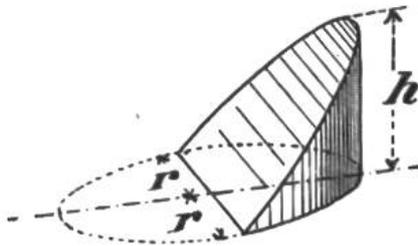
$$K = \pi l s (2R - s) \text{ oder } \pi l s (2r + s).$$

### Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche =  $r$ ,

Höhe des Hufes =  $h$ , Mantel =  $2r h$ .

Inhalt:  $K = \frac{2}{3} r^2 h$ .



### Kegel:

Radius der Grundfläche =  $r$ .

Höhe =  $h$ , Seite =  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ,

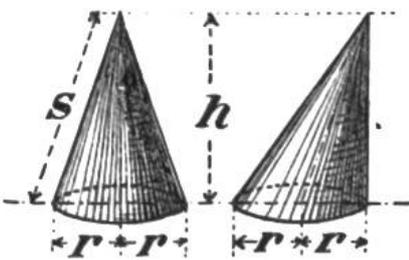
Mantel  $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$  oder  $\pi r s$ ,

Oberfläche =  $\pi r^2 + r\pi s$  oder  $r\pi(r+s)$

$$\text{oder } = \pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

Inhalt  $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ ,

$$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi h}}, \quad h = \frac{3K}{r^2 \pi}$$



### Abgestumpfter Kegel:

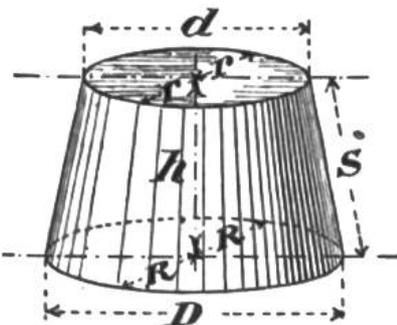
Radien der parallelen Endflächen =  $R$  und  $r$ ,

Durchmesser =  $D$  und  $d$ , Höhe =  $h$ , Seite =  $s$ ,

Inhalt  $K = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$

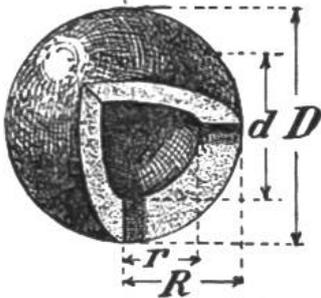
Mantel  $M = \pi s (R+r)$ .

Oberfläche  $O = \pi [R^2 + r^2 + (R+r)s]$ .

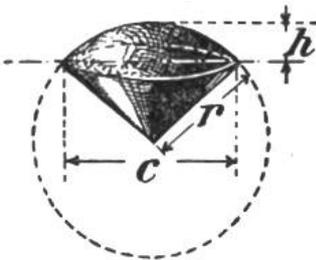


Kugel:

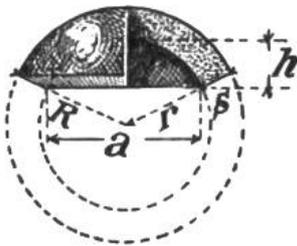
Radius =  $r$ , Durchmesser =  $d$ ,  
 Oberfläche  $O = 4r^2\pi = 12,566r^2$ , oder  $d^2\pi$ .  
 Inhalt  $K = \frac{4}{3}r^3\pi = 4,189r^3$ ,  $K = \frac{0,5236}{3}d^3$ ,  
 „  $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0,5236 \cdot d^3$ ,  
 Radius  $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$ ;  $r = \sqrt{\frac{3K}{4\pi}}$ .

Hohlkugel:

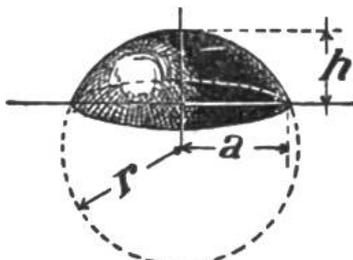
Aeusserer Radius =  $R$ , innerer =  $r$ ,  
 Aeusserer Durchmesser =  $D$ , innerer =  $d$ ,  
 Inhalt  $K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$ .

Kugelsektor:

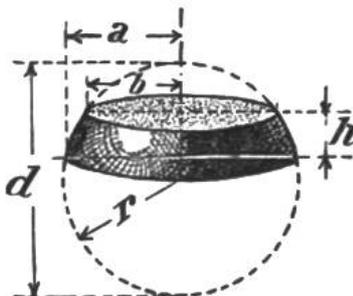
Radius der Kugel =  $r$   
 Begrenzende Kalotte, Höhe =  $h$ , Durchm. =  $c$ ,  
 Oberfläche  $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$   
 Inhalt  $K = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot h = 2,0944r^2h$ .

Hohlkugelsektor:

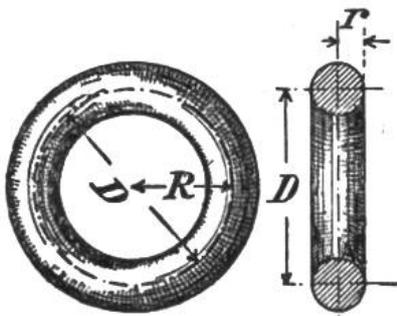
Aeusserer Radius =  $R$  innerer =  $r$   
 Wanddicke =  $R - r = s$ ,  $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$   
 Inhalt  $K = 2,094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$ .

Kugelsegment (Kugelkalotte):

Radius der Kugel =  $r$ ,  
 Radius der Grundfläche =  $a$ ,  
 Höhe der Kalotte =  $h$ ,  
 Oberfläche =  $O = 2\pi r h = \pi(a^2 + h^2)$   
 Inhalt  $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$  oder  
 $= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ .

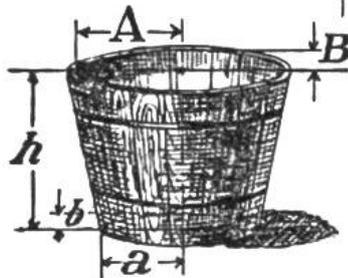
Kugelzone:

Höhe der Zone =  $h$ , Radius der Kugel =  $r$   
 Radius der Endflächen =  $a$  und  $b$ ,  
 Mantel  $M = 2r\pi h$ , Oberfläche  $O = M + a^2\pi + b^2\pi$ ,  
 Inhalt  $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$ .



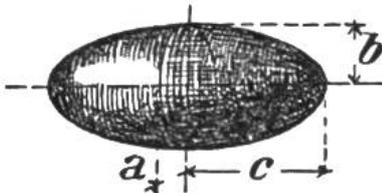
### Cylindrischer Ring:

Radius des kreisförmigen Querschnittes =  $r$ ,  
 Durchmesser des Ringes =  $D$ , Radius =  $R$   
 Inhalt  $K = 2\pi^2 Rr^2 = 2,467 Dd^2$ .  
 Oberfläche  $O = 4\pi^2 Rr = 9,87 Dd$ .



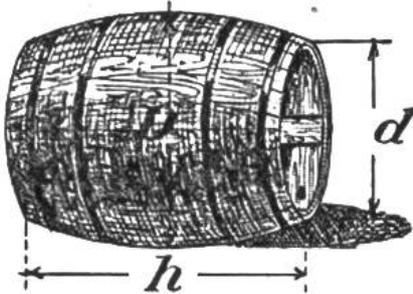
### Kübel:

Die unter sich parallelen Endflächen sind  
 Ellipsen mit den Halbachsen  $A, B$  und  $a, b$ ,  
 Höhe zwischen den Endflächen =  $h$ .  
 Inhalt  $K = \frac{1}{6}\pi h[2(AB+ab)+Ab+aB]$ .



### Ellipsoid:

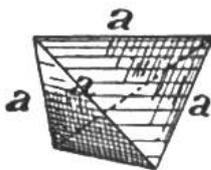
Bezeichnung der 3 Halbachsen =  $a, b, c$ ,  
 Inhalt  $K = \frac{4}{3}\pi a b c = 4,189 abc$ .



### Fass:

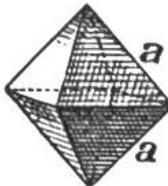
Spunddurchmesser =  $D$ , Bodendurchmesser =  $d$ ,  
 Höhe (resp. Länge) =  $h$ ,  
 Inhalt  $K = \frac{1}{12}\pi h(2D^2+d^2)$ ,  
 $K = \frac{1}{15}\pi h(2D^2+Dd+\frac{3}{4}d^2)$ .

### Reguläre Polyeder:



### Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante =  $a$ , Oberfl.  $O = a^2\sqrt{3} = 1,732 a^2$ .  
 Inhalt  $K = \frac{1}{12} a^3\sqrt{2} = 0,11785 a^3$ .



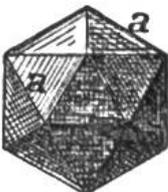
### Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante =  $a$ , Oberfl.  $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,4641016 a^2$ .  
 Inhalt  $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0,4714045 a^3$ .



### Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante =  $a$ ,  $O = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 20,645729 a^2$ .  
 Inhalt  $K = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}) = 7,663119 a^3$ .



### Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante =  $a$ ,  $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545 a^2$ .  
 Inhalt  $K = \frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5}) = 2,181695 a^3$ .