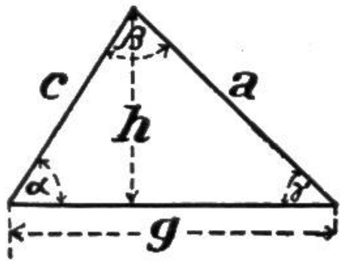
Geometrie

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen u. Körpern

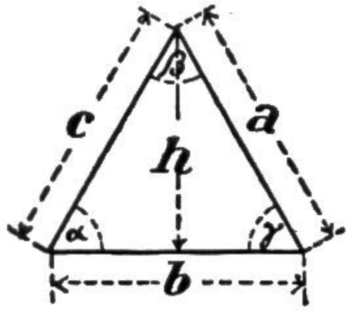


Dreieck:

Grundlinie $= g$, Höhe $= h$, Fläche $= F$,

$F = \frac{g \cdot h}{2}$; $g = \frac{2F}{h}$; $h = \frac{2F}{g}$;

$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma = 180° = 2$ rechte $\sphericalangle$



Gleichseitiges Dreieck:

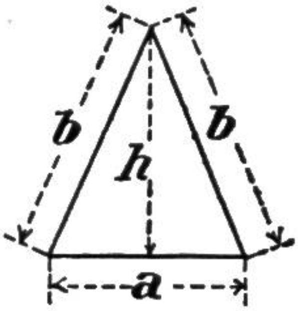
Seiten $= a = b = c$, $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma = 60°$.

$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 0{,}433\,a^2$; $\sqrt{3} = 1{,}73205$.

genauer $0{,}4330125 \cdot a^2$

$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$;

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = a \cdot 0{,}866025$.

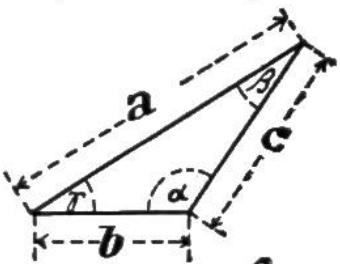


Gleichschenkliges Dreieck:

Grundlinie $= a$, gleiche Seiten $= b$

$F = \frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)\cdot(2b-a)} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}$

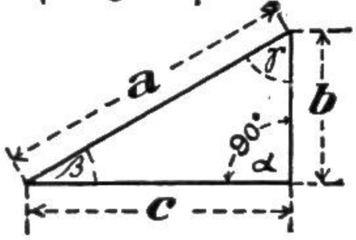
$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $h = \sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}$;



Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$F = \sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$.

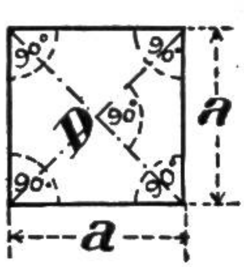


Rechtwinkliges Dreieck: $\sphericalangle a = 90°$;

Hypotenuse $= a$, Katheten $= b, c$,

$F = \frac{b \cdot c}{2}$; $a^2 = b^2 + c^2$; $a = \sqrt{b^2 + c^2}$;

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

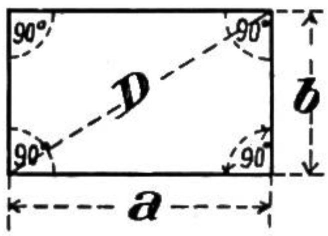


Quadrat: Seite $= a$, Diagonale $= D$,

$F = a \cdot a = a^2$, $a = \sqrt{F}$.

$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a\ 1{,}4142$.

E. Pochon

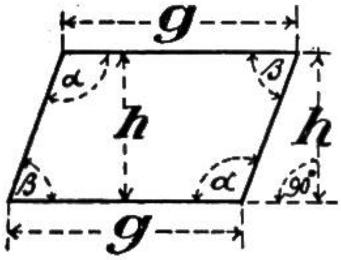


Rechteck:

Seiten a und b, Diagonale $= D$,

$F = a \cdot b$; $a = \frac{F}{b}$; $b = \frac{F}{a}$;

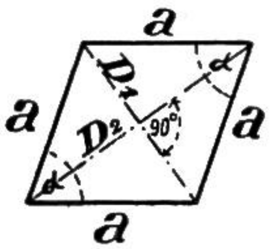
$D = \sqrt{a^2 + b^2}$;



Parallelogramm:

Grundlinie $= g$, Höhe rechtwinklig auf Grundlinie $= h$,

$F = g \cdot h$; $g = \frac{F}{h}$; $h = \frac{F}{g}$.

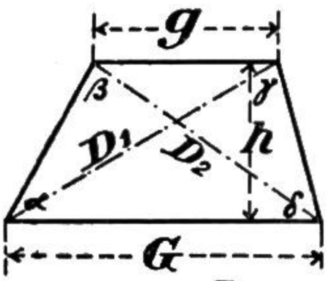


Rhombus:

Gleiche Seiten $= a$, Diagonalen D_1 u. D_2

$F = a^2 \cdot \sin\alpha$; $F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$;

$D_1 = \frac{2F}{D_2}$; $D_2 = \frac{2F}{D_1}$.

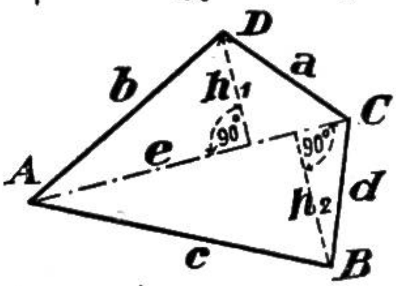


Trapez:

Parallelseiten $= G$ und g, Höhe $= h$,

Diagonalen $= D_1$ und D_2,

$F = \frac{G+g}{2} \cdot h$; $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$;

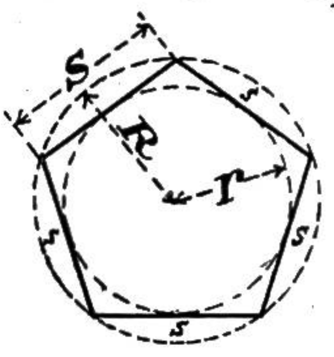


Trapezoid:

Diagonale AC, rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2

$F = \frac{AC}{2} \cdot h_1 + h_2$; $= \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2$.

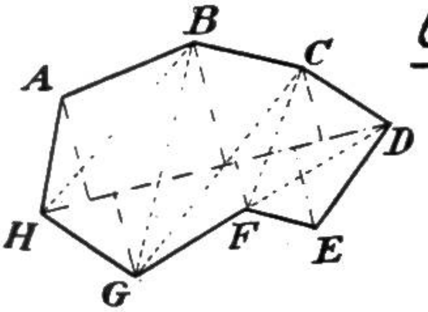
Reguläre Vielecke (Polygone):



Seite $= S$,
Radius des umschriebenen Kreises $= R$
Radius d. eingeschriebenen Kreises $= r$.

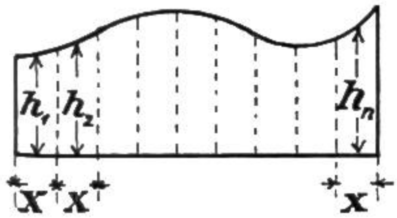
Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S^2 od. 1.299 R^2
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R „ 2.000 r	1.000 S^2 „ 2.000 R^2
Fünfeck	0.851 S	0.688 S	1.176 R „ 1.453 r	1.721 S^2 „ 2.378 R^2
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R „ 1.155 r	2.598 S^2 „ 2.598 R^2
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R „ 0.963 r	3.634 S^2 „ 2.736 R^2
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R „ 0.828 r	4.828 S^2 „ 2.828 R^2
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R „ 0.728 r	6.182 S^2 „ 2.892 R^2
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R „ 0.649 r	7.694 S^2 „ 2.939 R^2
Elfeck	1.775 S	1.704 S	0.563 R „ 0.587 r	9.366 S^2 „ 2.973 R^2
Zwölfeck	1.932 S	1.866 S	0.518 R „ 0.536 r	11.196 S^2 „ 3.000 R^2

E. Pochon



Unregelmässige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann berechnet werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen u. Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder auch durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittels einer passend gewählten Abszisse und rechtwinklig auf diese errichteten Koordinaten der Eckpunkte, Summierung des ermittelten Jnhalts dieser Trapeze u. Dreiecke.

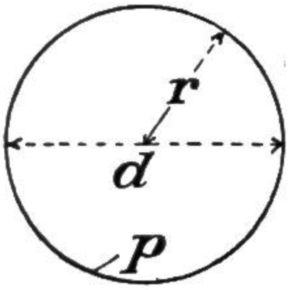


Durch Zerlegung in parallele Streifen von gleicher Breite x und mittl. Höhen $h_1 h_2 \ldots h_n$.

$$F = x.(h_1 + h_2 \ldots + h_n).$$

Kreis:

Durchmesser = d, Radius = r, Umfang = p, Inhalt = F.



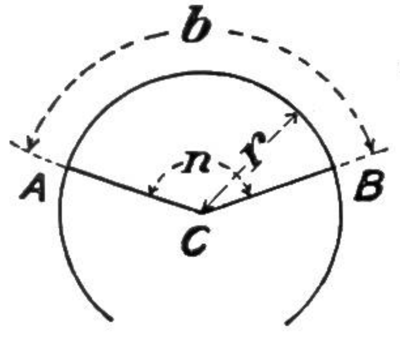
$$p = 2r\pi = d\pi = d.3{,}14159,$$

$$F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4} = 0{,}785.d^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}564\sqrt{F}.$$

$$d = 2.\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1{,}128\sqrt{F}.$$

Kreissektor: (ABCA)



Radius = r, Bogen = b Zentriwinkel = n

$$F = \frac{r^2\pi.n}{360} = \frac{b.r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F.360}{\pi.n}} = \frac{b}{\pi}\cdot\frac{180}{n};$$

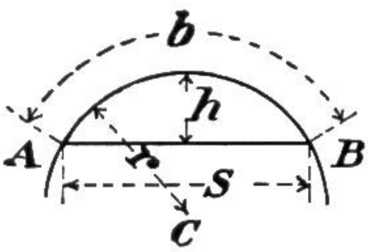
$$n = \frac{360.F}{r^2\pi} = \frac{b}{r.\pi}\cdot 180;$$

$$b = 2r\pi.\frac{n}{360} = r\pi.\frac{n}{180};$$

Halbkreis: Bogen = $b = \pi r$; Fläche = $F = \frac{\pi.r^2}{2}$.

Viertelkreis: » $= \frac{b}{2} = \frac{\pi r}{2}$; $F = \frac{\pi.r^2}{4}$;

Kreisabschnitt:



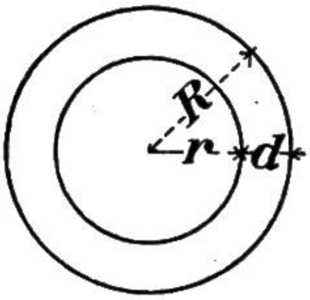
Sehne = s, Höhe = h, $F = \frac{2}{3}s.h$.

genau $F = \frac{r^2\pi.n}{360} - \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$.

$s = 2\sqrt{h(2r-h)}$; $r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}$.

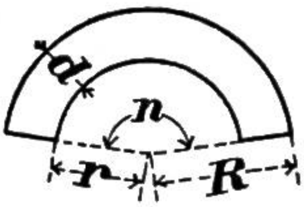
E. Pochon.

Kreisring:

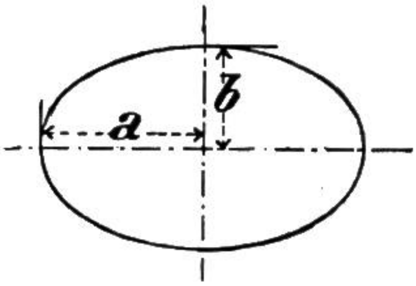


Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
$F = R^2\pi - r^2\pi. = \pi.(R+r).(R-r).$
wenn d = radiale Breite des Kreisrings
so ist $F = \pi.(2r+d).d$;

Kreisringstück (Konzentrisch)

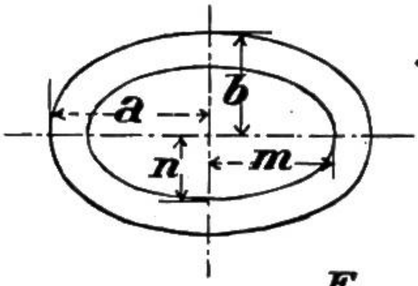


Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
Zentriwinkel $= n$, radiale Breite $= d$,
$F = (R^2\pi - r^2\pi)\frac{n}{360} = (R^2 - r^2).\frac{\pi n}{360}$;
$= (R+r)d\frac{\pi n}{360} = (R+r)d.n.0.0087$;



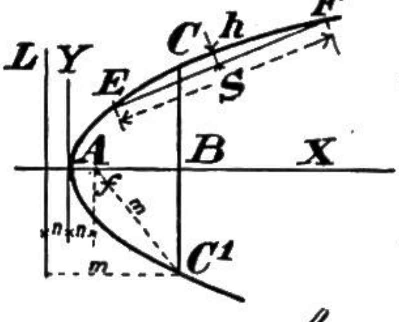
Ellipse:

Halbe grosse Achse $= a$,
Halbe kleine Achse $= b$,
Fläche $F = a.b.\pi$;



Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse $= a, b$,
Halbe Achsen der innern Ellipse $= m, n$,
Fläche: $F = \pi.(ab - mn)$.

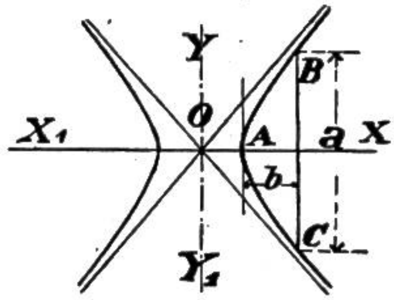


Parabelsegment ECFE:

$F = \frac{2}{3} s.h$, $s = \overline{EF}$;

Parabelfläche CAC¹C:

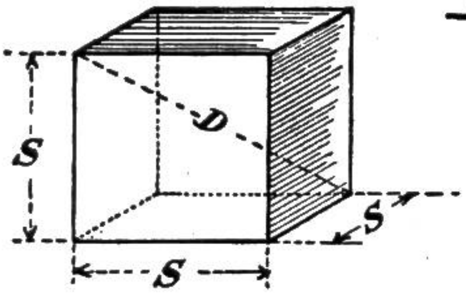
$F = \frac{2}{3}\ \overline{CC^1}.\overline{AB}$;



Hyperbelsegment ABCA:

Sehne $= a$; Höhe $= b$,
F (annähernd) $= \frac{3}{5}\,a.b$;

E. Pochon.



Würfel:

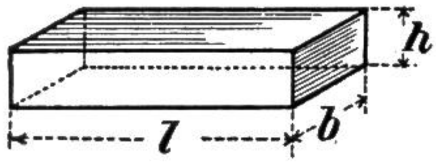
Seite $= S$, Inhalt $= K$; Oberfläche $= O$

$K = S^3$; $O = 6S^2$;

$S = \sqrt[3]{K}$

Diagonale $= D = \sqrt{3S^2} = S\sqrt{3} =$

$S \cdot 1{,}732050$.

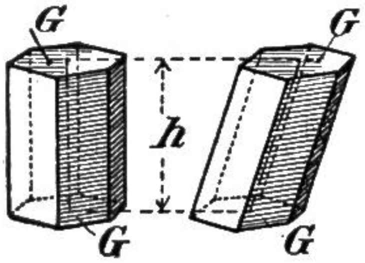


Parallelepipedon:

Länge $= l$, Breite $= b$, Höhe $= h$,

Inhalt $= K = l \cdot b \cdot h$,

Oberfläche $= O = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$

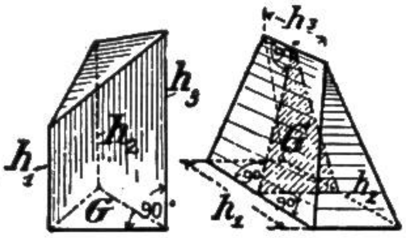


Prisma:

Grundfläche $= G$, Höhe $= h$,

Inhalt $= K = G \cdot h$.

Oberfläche $O =$ Umfang der Grundfläche $U \times h + 2G$.



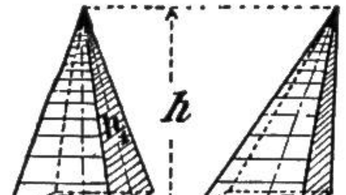
Schiefabgeschnittenes Prisma:

Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes $= G$.

Länge der Kanten $= h_1, h_2, h_3 \ldots\ldots h_n$,

Inhalt $K = G \cdot \dfrac{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots h_n}{n}$.

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymetrie.



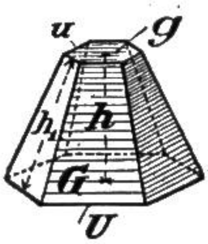
Pyramide:

Grundfläche $= G$, Höhe $= h$,

$K = \dfrac{G \cdot h}{3}$; $h = \dfrac{3K}{G}$; $G = \dfrac{3K}{h}$;

Mantel $M =$ Umfang der Grundfläche $U \times \dfrac{h_1}{2}$;

Oberfläche $O = M + G$.

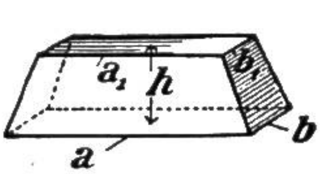


Abgestumpfte Pyramide:

Parallele Endflächen $= G, g$, ihr Abstand $= h$,

ihre Umfänge U, u, Mantel $M = \dfrac{U+u}{2} \cdot h_1$,

$K = \dfrac{h}{3}\left(G + g + \sqrt{Gg}\right)$; $O = M + G + g$.

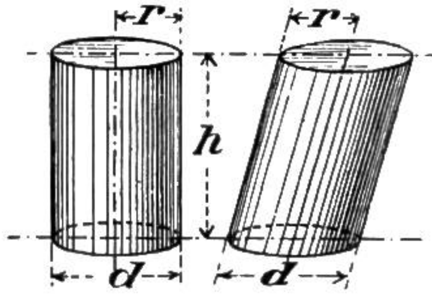


Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$K = \frac{1}{6} h \left[(2a + a_1)\, b + (2a_1 + a)\, b_1\right]$.

E. Pochon

Cylinder (Walze)



Radius $= r$, Durchmesser $= d$, Höhe $= h$

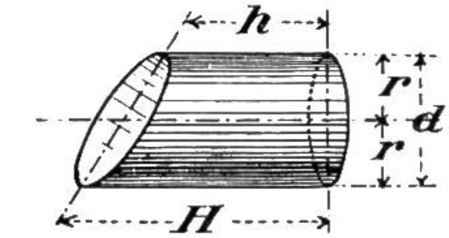
Inhalt $K = r^2\pi . h$ oder $\frac{d^2}{4} \pi . h$

$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}$; $h = \frac{K}{r^2\pi}$.

Mantel $= 2r\pi . h$ oder $d\pi . h$.

Oberfläche $= 2r\pi . (r+h)$ oder $d\pi . (\frac{d}{2}+h)$

Schiefabgeschnittener Cylinder:

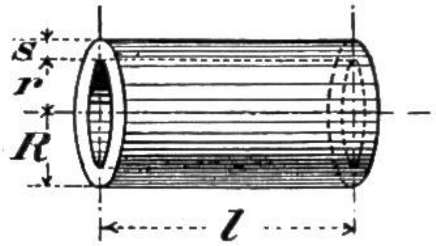


Grösste Höhe $= H$, kleinste Höhe $= h$,

Inhalt $K = r^2\pi . \frac{H+h}{2}$ oder $\frac{d^2}{4} \pi . \frac{H+h}{2}$

Mantel $= r\pi (H+h)$

Hohlcylinder (Rohr):



Innerer Radius $= r$,

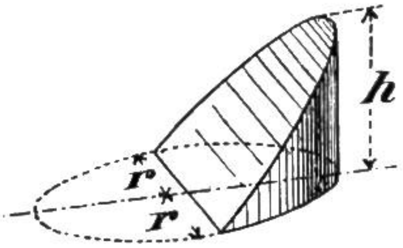
Aeusserer Radius $= R$, Länge $= l$,

Wandstärke $= s = R - r$,

Inhalt $K = \pi . l . (R^2 - r^2)$, oder

$K = \pi . l . s\,(2R - s)$ oder $\pi . l . s\,(2r + s)$.

Cylinderhuf:

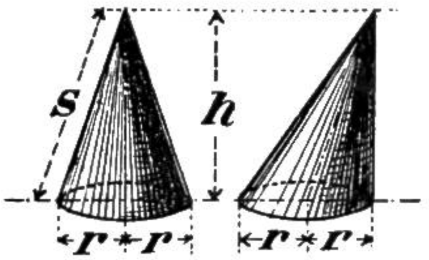


Radius der Grundfläche $= r$,

Höhe des Hufes $= h$, Mantel $= 2rh$.

Inhalt: $K = \frac{2}{3} r^2 h$.

Kegel:



Radius der Grundfläche $= r$.

Höhe $= h$, Seite $= s = \sqrt{r^2 + h^2}$,

Mantel $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ oder $\pi . r . s$,

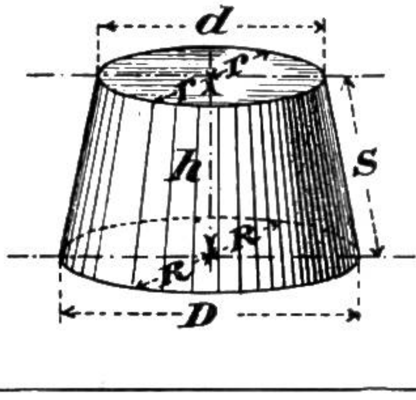
Oberfläche $= \pi . r^2 + r\pi . s$ oder $r\pi (r + s)$

oder $= \pi r . (r + \sqrt{r^2 + h^2})$.

Inhalt $K = \frac{1}{3} r^2 \pi . h$;

$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi . h}}$; $h = \frac{3K}{r^2\pi}$.

Abgestumpfter Kegel:



Radien der parallelen Endflächen $= R$ und r,

Durchmesser $= D$ und d, Höhe $= h$, Seite $= s$,

Inhalt $K = \frac{1}{3} \pi h . (R^2 + Rr + r^2)$

Mantel $M = \pi s . (R + r)$.

Oberfläche $O = \pi . [R^2 + r^2 + (R + r) s]$.

E. Poehon

Kugel:

Radius $= r$, Durchmesser $= d$,

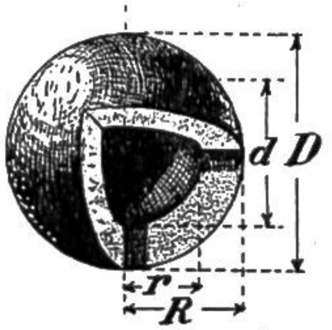
Oberfläche $O = 4r^2\pi = 12{,}566\,r^2$, oder $d^2\pi$.

Inhalt $K = \frac{4}{3} r^3\pi = 4{,}189\,r^3$, $K = \frac{O \cdot r}{3}$,

» $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0{,}5236 \cdot d^3$,

Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$.

Hohlkugel:

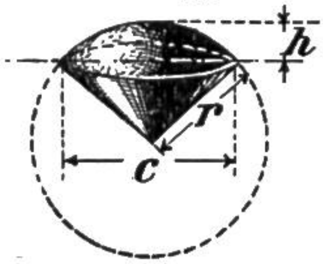


Aeusserer Radius $= R$, innerer $= r$,

Aeusserer Durchmesser $= D$, innerer $= d$,

Inhalt $K = \frac{4\pi}{3} \cdot (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$.

Kugelsektor:



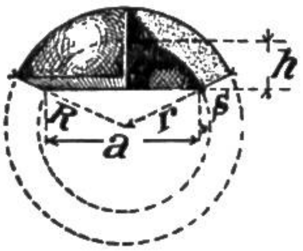
Radius der Kugel $= r$

Begrenzende Kalotte, Höhe $= h$, Durchm. $= c$,

Oberfläche $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$

Inhalt $K = \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot h = 2{,}0944\, r^2 h$.

Hohlkugelsektor:

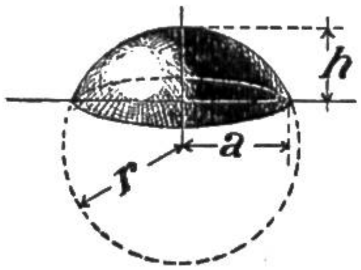


Aeusserer Radius $= R$ innerer $= r$

Wanddicke $= R - r = s$, $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$

Inhalt $K = 2{,}094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$.

Kugelsegment (Kugelkalotte):



Radius der Kugel $= r$,

Radius der Grundfläche $= a$,

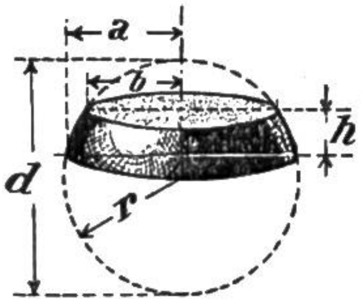
Höhe der Kalotte $= h$,

Oberfläche $= O = 2\pi r h = \pi \cdot (a^2 + h^2)$

Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi \cdot h\,(3a^2 + h^2)$ oder

$= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$.

Kugelzone:



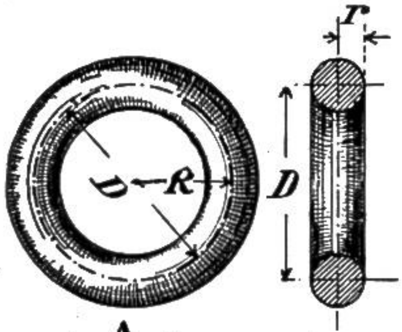
Höhe der Zone $= h$, Radius der Kugel $= r$

Radius der Endflächen $= a$ und b,

Mantel $M = 2r\pi h$, Oberfläche $O = M + a^2\pi + b^2\pi$;

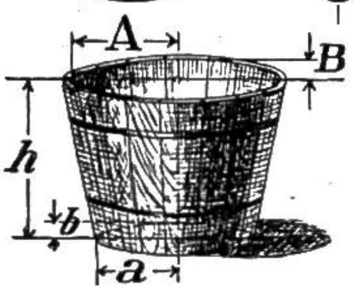
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2)$.

E. Fochon



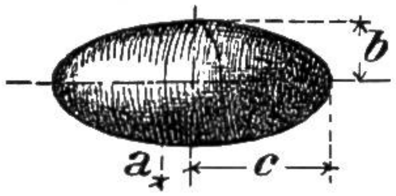
Cylindrischer Ring:

Radius des kreisförmigen Querschnittes $= r$,
Durchmesser des Ringes $= D$, Radius $= R$,
Inhalt $K = 2\pi^2 R r^2 = 2,467\, D d^2$.
Oberfläche $O = 4\pi^2 R r = 9,87\, D d$.



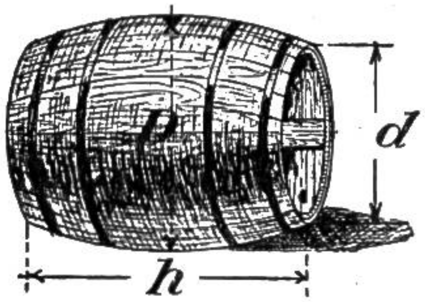
Kübel:

Die unter sich parallelen Endflächen sind Ellipsen mit den Halbachsen A, B und a, b,
Höhe zwischen den Endflächen $= h$.
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h[2(AB + ab) + Ab + aB]$.



Ellipsoid:

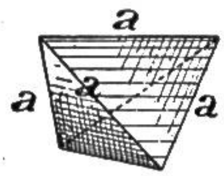
Bezeichnung der 3 Halbachsen $= a.\ b,\ c$,
Inhalt $K = \frac{4}{3}\pi . a . b . c = 4,189\, a b c$.



Fass:

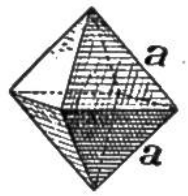
Spunddurchmesser $= D$, Bodendurchmesser $= d$,
Höhe (resp. Länge) $= h$,
Inhalt $K = \frac{1}{12}\pi h.(2D^2 + d^2)$,
$K = \frac{1}{15}\pi h.(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2)$,

Reguläre Polyeder:



Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante $= a$, Oberfl. $O = a^2\sqrt{3} = 1,732\, a^2$
Inhalt $K = \frac{1}{12} a^3\sqrt{2} = 0,11785\, a^3$.

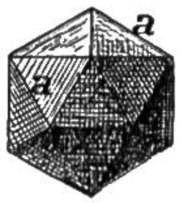


Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante $= a$, Oberfl. $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,4641016\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0,4714045\, a^3$.

Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante $= a$, $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20,645779\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = 7,663119\, a^3$.



Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante $= a$, $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545\, a^2$.
Inhalt $K = \frac{5}{12} a^3(3 + \sqrt{5}) = 2,181695\, a^3$.

E. Pochon