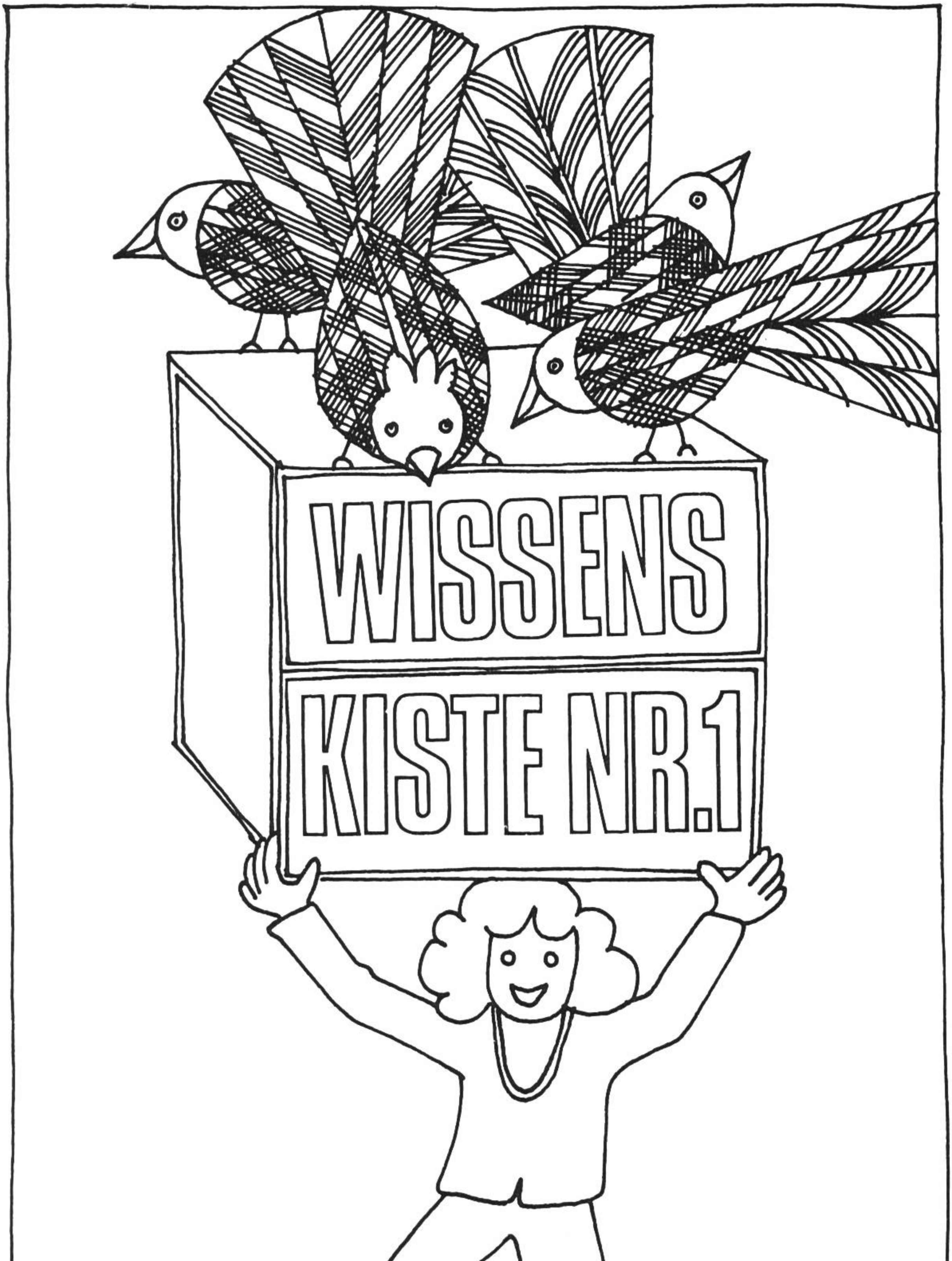
Zeitschrift: Schatzkästlein : Pestalozzi-Kalender

Herausgeber: Pro Juventute

Band: - (1979)

Rubrik: Wissenskiste


WISSENS
KISTE NR.1

Einmaleins

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375
26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390
27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405
28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420
29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435
30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450
31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	372	403	434	465
32	64	96	128	160	192	224	256	288	320	352	384	416	448	480
33	66	99	132	165	198	231	264	297	330	363	396	429	462	495
34	68	102	136	170	204	238	272	306	340	374	408	442	476	510
35	70	105	140	175	210	245	280	315	350	385	420	455	490	525
36	72	108	144	180	216	252	288	324	360	396	432	468	504	540
37	74	111	148	185	222	259	296	333	370	407	444	481	518	555
38	76	114	152	190	228	266	304	342	380	418	456	494	532	570
39	78	117	156	195	234	273	312	351	390	429	468	507	546	585
40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600
41	82	123	164	205	246	287	328	369	410	451	492	533	574	615
42	84	126	168	210	252	294	336	378	420	462	504	546	588	630
43	86	129	172	215	258	301	344	387	430	473	516	559	602	645
44	88	132	176	220	264	308	352	396	440	484	528	572	616	660
45	90	135	180	225	270	315	360	405	450	495	540	585	630	675
46	92	138	184	230	276	322	368	414	460	506	552	598	644	690
47	94	141	188	235	282	329	376	423	470	517	564	611	658	705
48	96	144	192	240	288	336	384	432	480	528	576	624	672	720
49	98	147	196	245	294	343	392	441	490	539	588	637	686	735
50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750

Zahlensysteme

Das Zehnersystem oder Dezimalsystem.
Wir schreiben jede noch so grosse natürliche Zahl mit den **zehn Ziffern** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Beispielsweise besteht die **Zahl** (genauer das **Zahlenzeichen**) 70334 aus den Ziffern 7, 0, 3, 4 und noch eine 3 zwischen 3 und 4.
Jede Ziffer hat einen **Eigenwert** und einen **Stellenwert,** der von der **Stelle** abhängt, an die die Ziffer innerhalb der Zahl gesetzt ist.
Ein solches Zahlensystem nennt man **Stellenwertsystem.**
Da 10 die **Basis** ist, spricht man auch vom **Zehnersystem** oder **Dezimalsystem.**

7 0 3 3 4

Wert der ersten Stelle: $4 \cdot 1$ oder	4	**Einer**
Wert der zweiten Stelle: $3 \cdot 10$ oder	3	**Zehner**
Wert der dritten Stelle: $3 \cdot 10^2$ oder	3	**Hunderter**
Wert der vierten Stelle: $0 \cdot 10^3$ oder	0	**Tausender**
Wert der fünften Stelle: $7 \cdot 10^4$ oder	7	**Zehntausender**

Andere Zahlensysteme

1. **Im Zehnersystem** fassen wir zehn Einheiten zu einem «Bündel» zusammen und schreiben dieses eine Bündel an der Zehnerstelle mit **1**0; zehn «Zehnerbündel» an der Hunderterstelle mit **1**00 usw.

2. **Im Zweiersystem** (auch Dualsystem genannt) schreiben wir ein «Zweierbündel» (2) an der zweiten Stelle mit **1**0, zwei «Zweierbündel» = ein «Viererbündel» an der dritten Stelle mit **1**00, ein «Achterbündel» an der vierten Stelle mit **1**000 usw.

3. **Beispiel:** $43 = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$ (Zehnersystem) **wird zerlegt** im **Zweiersystem** $= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ und wird darin **geschrieben:** 1 0 1 0 1 1

   101011 ②

4. Die Zahl ② **nennt das System** und heisst **Basis.** Im Zehnersystem wird sie nicht angeschrieben.

5. **Unser Beispiel 43 in anderen Zahlensystemen geschrieben:**

Basis	Zur Verfügung stehende Ziffern	43 =	Verschiedene Zahlzeichen für 43
3	0,1,2	$1 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1$	1121 ③
4	0,1,2,3	$2 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1$	223 ④
5	0,1,2,3,4	$1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1$	133 ⑤
6	0,1,2,3,4,5	$1 \cdot 36 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1$	111 ⑥
7	0,1,2,3,4,5,6	$6 \cdot 7 + 1 \cdot 1$	61 ⑦
8	0,1,2,3,4,5,6,7	$5 \cdot 8 + 3 \cdot 1$	53 ⑧
9	0,1,2,3,4,5,6,7,8	$4 \cdot 9 + 7 \cdot 1$	47 ⑨
11	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,z	$3 \cdot 11 + 10 \cdot 1 = 3 \cdot 11 + z \cdot 1$	3z ⑪
12	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,z,e	$3 \cdot 12 + 7 \cdot 1$	37 ⑫

Vorsatzbezeichnungen für die mit dem Faktor 10 gebildete Vielfache und Teile von Einheiten

Vorsilbe	Kurzzeichen	Zehnerpotenzschreibweise	in Worten
Deka-	da	10^{1}	Zehn
Hekto-	h	10^{2}	Hundert
Kilo-	k	10^{3}	Tausend
Mega-	M	10^{6}	Million
Giga-	G	10^{9}	Milliarde
Tera-	T	10^{12}	Billion
Peta-	P	10^{15}	Billiarde
Exa-	E	10^{18}	Trillion
Dezi-	d	10^{-1}	Zehntel
Zenti-	c	10^{-2}	Hundertstel
Milli-	m	10^{-3}	Tausendstel
Mikro-	μ	10^{-6}	Millionstel
Nano-	n	10^{-9}	Milliardstel
Piko-	p	10^{-12}	Billionstel
Femto-	f	10^{-15}	Billiardstel
Atto-	a	10^{-18}	Trillionstel

Primzahlen

Natürliche Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 usw. Primzahlen sind natürliche Zahlen grösser als 1, die **nur durch 1 und sich selbst teilbar** sind. Die 2 macht als einzige gerade Zahl den Anfang. Dann folgen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw. Die weiteren Primzahlen bis 1000 kann man aus der folgenden Tafel ablesen.
Seit dem Altertum kennt man ein Verfahren, Primzahlen ohne Rechnerei zu bestimmen, das sogenannte **«Sieb des Erathostenes».**
Will man zum Beispiel die Primzahlen von 1 bis 30 bestimmen, so streicht man **zuerst** einmal von der Primzahl 2 ausgehend jede zweite Zahl (die 2 natürlich nicht!) /
Dann wird, von der Primzahl 3 ausgehend, jede dritte Zahl gestrichen (die 3 nicht!) //
Schliesslich wird, von der Primzahl 5 ausgehend, jede fünfte Zahl gestrichen (die 5 natürlich nicht!) ///

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

Mit jeder folgenden Primzahl kann nun das Verfahren fortgesetzt werden.

Primzahlen zwischen 1 und 1000

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind. Die einzige gerade Primzahl ist 2.

2	47	109	191	269	353	439	523	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887	997

Verwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalzahlen

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{\bullet}{3}$ $\frac{1}{3} = 0{,}333$
$\frac{2}{3} = 0{,}667$

$\frac{\bullet}{4}$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$
$\frac{3}{4} = 0{,}75$

$\frac{\bullet}{5}$ $\frac{1}{5} = 0{,}2$
$\frac{2}{5} = 0{,}4$
$\frac{3}{5} = 0{,}6$
$\frac{4}{5} = 0{,}8$

$\frac{\bullet}{6}$ $\frac{1}{6} = 0{,}167$
$\frac{5}{6} = 0{,}833$

$\frac{\bullet}{7}$ $\frac{1}{7} = 0{,}143$
$\frac{2}{7} = 0{,}286$
$\frac{3}{7} = 0{,}429$
$\frac{4}{7} = 0{,}571$
$\frac{5}{7} = 0{,}714$
$\frac{6}{7} = 0{,}857$

$\frac{\bullet}{8}$ $\frac{1}{8} = 0{,}125$
$\frac{3}{8} = 0{,}375$
$\frac{5}{8} = 0{,}625$
$\frac{7}{8} = 0{,}875$

$\frac{\bullet}{9}$ $\frac{1}{9} = 0{,}111$
$\frac{2}{9} = 0{,}222$
$\frac{4}{9} = 0{,}444$
$\frac{5}{9} = 0{,}556$
$\frac{7}{9} = 0{,}778$
$\frac{8}{9} = 0{,}889$

$\frac{\bullet}{10}$ $\frac{1}{10} = 0{,}1$
$\frac{3}{10} = 0{,}3$
$\frac{7}{10} = 0{,}7$
$\frac{9}{10} = 0{,}9$

$\frac{\bullet}{11}$ $\frac{1}{11} = 0{,}091$
$\frac{2}{11} = 0{,}182$
$\frac{3}{11} = 0{,}273$
$\frac{4}{11} = 0{,}364$
$\frac{5}{11} = 0{,}455$
$\frac{6}{11} = 0{,}545$
$\frac{7}{11} = 0{,}636$
$\frac{8}{11} = 0{,}727$
$\frac{9}{11} = 0{,}818$
$\frac{10}{11} = 0{,}909$

$\frac{\bullet}{12}$ $\frac{1}{12} = 0{,}083$
$\frac{5}{12} = 0{,}417$
$\frac{7}{12} = 0{,}583$
$\frac{11}{12} = 0{,}917$

$\frac{\bullet}{13}$ $\frac{1}{13} = 0{,}077$
$\frac{2}{13} = 0{,}154$
$\frac{3}{13} = 0{,}231$
$\frac{4}{13} = 0{,}308$
$\frac{5}{13} = 0{,}385$
$\frac{6}{13} = 0{,}462$
$\frac{7}{13} = 0{,}538$
$\frac{8}{13} = 0{,}615$
$\frac{9}{13} = 0{,}692$
$\frac{10}{13} = 0{,}769$
$\frac{11}{13} = 0{,}846$
$\frac{12}{13} = 0{,}923$

$\frac{\bullet}{14}$ $\frac{1}{14} = 0{,}071$
$\frac{3}{14} = 0{,}214$
$\frac{5}{14} = 0{,}357$
$\frac{9}{14} = 0{,}643$
$\frac{11}{14} = 0{,}786$
$\frac{13}{14} = 0{,}929$

$\frac{\bullet}{15}$ $\frac{1}{15} = 0{,}067$

$\frac{2}{15} = 0{,}133$

$\frac{4}{15} = 0{,}276$

$\frac{7}{15} = 0{,}467$

$\frac{8}{15} = 0{,}533$

$\frac{11}{15} = 0{,}733$

$\frac{13}{15} = 0{,}867$

$\frac{14}{15} = 0{,}933$

$\frac{\bullet}{16}$ $\frac{1}{16} = 0{,}063$

$\frac{3}{16} = 0{,}188$

$\frac{5}{16} = 0{,}313$

$\frac{7}{16} = 0{,}438$

$\frac{9}{16} = 0{,}563$

$\frac{11}{16} = 0{,}688$

$\frac{13}{16} = 0{,}813$

$\frac{15}{16} = 0{,}938$

$\frac{1}{17} = 0{,}058823$

$\frac{1}{18} = 0{,}055555$

$\frac{1}{19} = 0{,}052631$

$\frac{1}{20} = 0{,}05$

$\frac{1}{21} = 0{,}047619$

$\frac{1}{22} = 0{,}045454$

$\frac{1}{23} = 0{,}043478$

$\frac{1}{24} = 0{,}041666$

$\frac{1}{25} = 0{,}04$

Brüche zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{15}{16}$, welche nicht in der Tabelle stehen, können gekürzt werden.

Für Vielfache der Brüche von $\frac{1}{17}$ bis $\frac{1}{24}$ multipliziert man den Dezimalbruch von $\frac{1}{17}$ ... mit dem entsprechenden Zähler.

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist teilbar

durch 2,	wenn die Endziffer durch 2 teilbar oder eine Null ist, z. B. 24992 oder 990 oder 78
durch 3,	wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist Beispiel: 5139 ist durch 3 teilbar, denn $\underbrace{5+1+3+9}_{\text{Quersumme}} = 18$; 18 ist durch 3 teilbar
durch 4,	wenn die beiden letzten Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden, z. B. 917**20**, 1**64**, 10**08**
durch 5,	wenn die Endziffer eine 0 oder eine 5 ist
durch 6,	alle geraden Zahlen, die durch 3 teilbar sind
durch 7,	keine Regel!
durch 8,	wenn die drei letzten Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden, z. B. 163**720**, 1**128**, **992**
durch 9,	wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist
durch 10,	wenn die letzte Ziffer eine 0 ist

Grösster gemeinsamer Teiler (g.g.T.)

Man bestimmt den grössten gemeinsamen Teiler zweier (oder mehrerer) Zahlen, indem man sie

– in ihre **Primfaktoren zerlegt:**

$$\begin{array}{rccccccccc} 84 = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} & \cdot & & \cdot & \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 105 = & & & & & & \cdot & 5 & \cdot & \end{array}$$

– und hernach das **Produkt** der in den Zerlegungen **gemeinsam** auftretenden **Faktoren** bildet:

$$\mathbf{g.g.T. = 3 \cdot 7 = 21}$$

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches (k.g.V.)

Man berechnet das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier (oder mehrerer) Zahlen, indem man sie

– in ihre Primfaktoren zerlegt:

$$\begin{array}{rcl} 24 & = & \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 3 \\ 42 & = & 2 \cdot \qquad\quad \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7} \end{array}$$

Fortsetzung nächste Seite

– hernach **jeden** Faktor so oft nimmt, wie er höchstens in einer Zahlengruppe vorkommt, und dann multipliziert.

k.g.V. = **2 · 2 · 2 · 3 · 7 = 168**

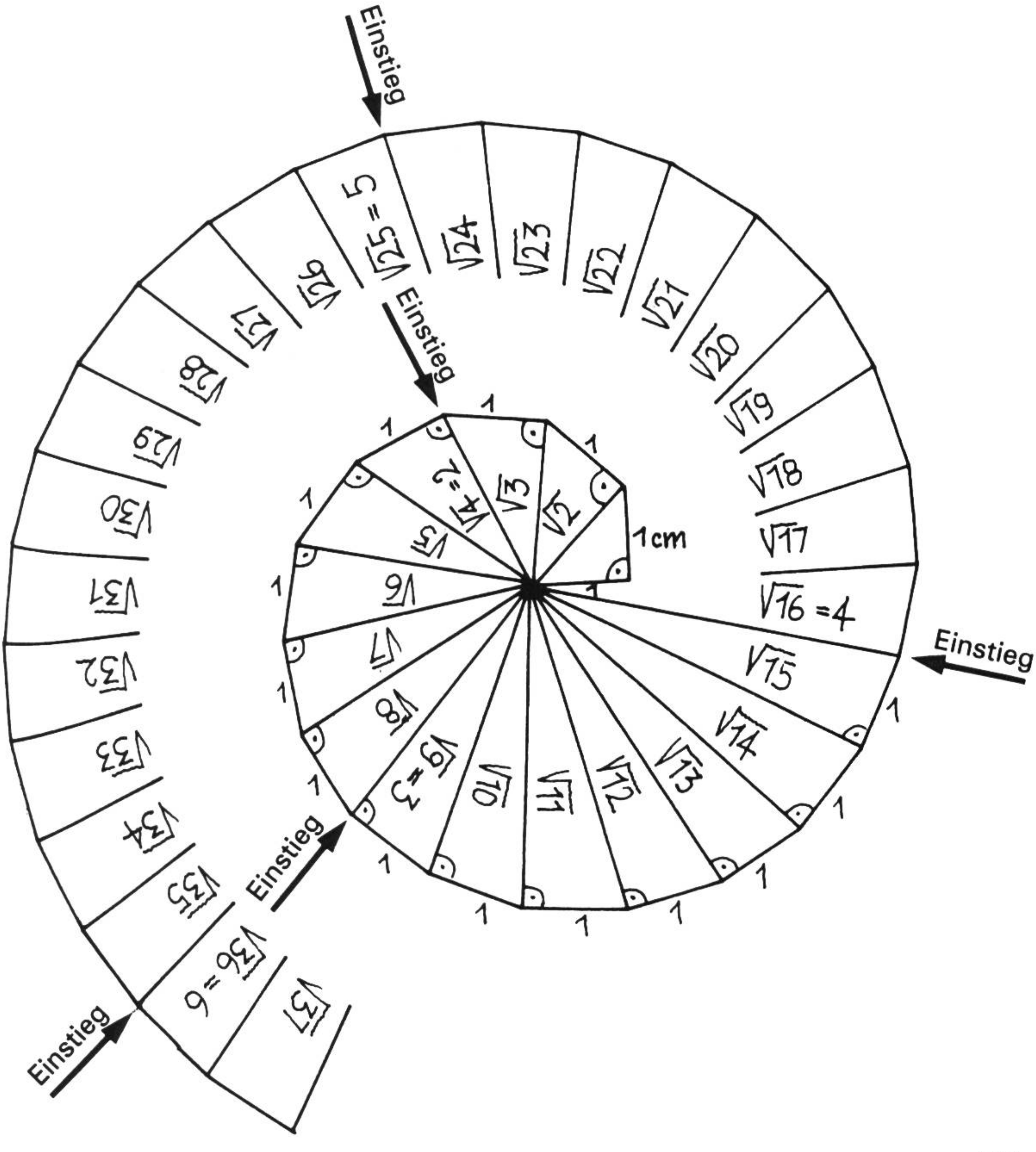
Quadratwurzeln von 1 bis 100

z	$\sqrt{z}$	z	$\sqrt{z}$	z	$\sqrt{z}$	z	$\sqrt{z}$
0	0,00000	25	5,00000	**50**	7,0710$\underline{7}$	75	8,66025
1	1,00000	26	5,0990$\underline{2}$	51	7,1414$\underline{3}$	76	8,71780
2	1,41421	27	5,19615	52	7,21110	77	8,77496
3	1,73205	28	5,29150	53	7,2801$\underline{1}$	78	8,83176
4	2,00000	29	5,38516	54	7,3484$\underline{7}$	79	8,88819
5	2,2360$\underline{7}$	**30**	5,4772$\underline{3}$	55	7,41620	**80**	8,94427
6	2,4494$\underline{9}$	31	5,56776	56	7,48331	81	9,00000
7	2,64575	32	5,65685	57	7,54983	82	9,0553$\underline{9}$
8	2,8284$\underline{3}$	33	5,74456	58	7,61577	83	9,11043
9	3,00000	34	5,83095	59	7,6811$\underline{5}$	84	9,16515
10	3,1622$\underline{8}$	35	5,9160$\underline{8}$	**60**	7,7459$\underline{7}$	85	9,21954
11	3,31662	36	6,00000	61	7,8102$\underline{5}$	86	9,2736$\underline{2}$
12	3,46410	37	6,08276	62	7,8740$\underline{1}$	87	9,3273$\underline{8}$
13	3,60555	38	6,16441	63	7,93725	88	9,38083
14	3,7416$\underline{6}$	39	6,2450$\underline{0}$	64	8,00000	89	9,43398
15	3,87298	**40**	6,3245$\underline{6}$	65	8,0622$\underline{6}$	**90**	9,48683
16	4,00000	41	6,40312	66	8,1240$\underline{4}$	91	9,53939
17	4,1231$\underline{1}$	42	6,48074	67	8,18535	92	9,59166
18	4,24264	43	6,5574$\underline{4}$	68	8,24621	93	9,64365
19	4,3589$\underline{0}$	44	6,6332$\underline{5}$	69	8,30662	94	9,6953$\underline{6}$
20	4,4721$\underline{4}$	45	6,70820	**70**	8,36660	95	9,74679
21	4,5825$\underline{8}$	46	6,7823$\underline{3}$	71	8,4261$\underline{5}$	96	9,7979$\underline{6}$
22	4,6904$\underline{2}$	47	6,85565	72	8,48528	97	9,8488$\underline{6}$
23	4,79583	48	6,92820	73	8,54400	98	9,89949
24	4,8989$\underline{8}$	49	7,00000	74	8,6023$\underline{3}$	99	9,94987
						100	10,0000

Die unterstrichenen Endziffern sind aufgerundet

Wir «zeichnen» Wurzeln:

Der Satz von Pythagoras erlaubt uns, eine gegebene Strecke mit einer beliebigen Wurzel vervielfacht zu zeichnen:

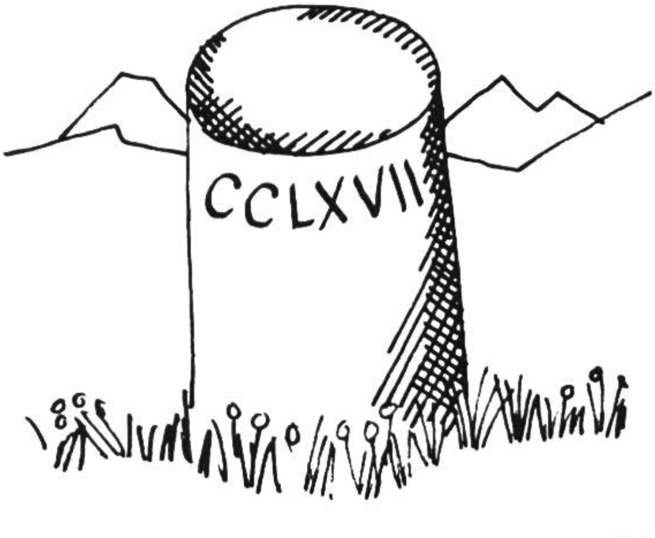


Kubikzahlen und Kubikwurzeln

z	z^3	$\sqrt[3]{z}$	z	z^3	$\sqrt[3]{z}$
1	1	1,0	26	17 576	2,936
2	8	1,26	27	19 683	3,0
3	27	1,442	28	21 952	3,037
4	64	1,587	29	24 389	3,072
5	125	1,71	30	27 000	3,107
6	216	1,817	31	29 791	3,141
7	343	1,913	32	32 768	3,175
8	512	2,0	33	35 937	3,208
9	729	2,08	34	39 304	3,24
10	1 000	2,154	35	42 875	3,271
11	1 331	2,224	36	46 656	3,302
12	1 728	2,289	37	50 653	3,332
13	2 197	2,351	38	54 872	3,362
14	2 744	2,41	39	59 319	3,391
15	3 375	2,466	40	64 000	3,42
16	4 096	2,52	41	68 921	3,448
17	4 913	2,57	42	74 088	3,476
18	5 832	2,621	43	79 507	3,503
19	6 859	2,668	44	85 184	3,53
20	8 000	2,714	45	91 125	3,557
21	9 261	2,759	46	97 336	3,583
22	10 648	2,802	47	103 823	3,609
23	12 167	2,844	48	110 592	3,634
24	13 824	2,885	49	117 649	3,659
25	15 625	2,924	50	125 000	3,684

Römische Zahlen

Die römischen Zahlzeichen wurden bis zum 12. Jahrhundert in Mitteleuropa allgemein gebraucht und dann allmählich von den «arabischen» Ziffern und dem Zehnersystem abgelöst. Sie werden heute noch etwa zur Numerierung oder bei Inschriften zur Bezeichnung der Jahreszahl verwendet. Der **Wert** eines römischen Zahlzeichens ist **unabhängig von der Stelle,** an der es innerhalb einer Zahl geschrieben ist. Dennoch hat die **Reihenfolge** der Zeichen ihre Bedeutung, wie die folgenden Regeln zeigen.



Römische Zahlen

1	5	10	50	100	500	1000
Ziffern:						
I	V	X	L	C	D	M
Zahlen:						
2: II	6: VI	11: XI	51: LI	200: CC	600: DC	2000: MM
3: III	7: VII	12: XII	60: LX	300: CCC	700: DCC	3000: MMM
	8: VIII	13: XIII	70: LXX		800: DCCC	
4: IV	9: IX	14: XIV	80: LXXX	400: CD	900: CM	
		15: XV	90: XC			
		16: XVI	99: XCIX			
		19: XIX				
		20: XX				
		40: XL				
		49: XLIX				

Regeln:

1. Man schreibt in der Reihenfolge Tausender–Hunderter–Zehner–Einer.
2. I, X, C kommen höchstens dreimal hintereinander vor.
3. Die Zahlen rechts neben einer gegebenen Zahl werden addiert, falls sie nicht grösser sind als die gegebene.
4. Die Zahlen links einer gegebenen Zahl werden subtrahiert, falls sie kleiner sind als die gegebene: es darf jedoch nur stehen:
   I vor V und X (und erlaubt ist auch IL=49)
   X vor L und C
   C vor D und M

Prozentrechnungen

A. «Prozent» (%) sagt aus, wie viele *Hundertstel* einer Menge *ein Bruchteil* dieser Menge ausmacht.

z. B. 12 Fr. sind $^1/_{100}$ von 1200 Fr., also 1%
84 Fr. sind $^7/_{100}$ von 1200 Fr., also 7%

B. In einer Prozentrechnung kommen *drei Grössen vor:*

	z. B.
1. der Grundwert (Ganzes, Vollbetrag, 100%)	400 kg
2. der Prozentbetrag	12 kg
3. der Prozentfuss (wieviele Prozent)	3%

1. Aufgabe: Berechnung des *Prozentbetrages*
Wieviel sind 4,5% von Fr. 1200.–?

$$\frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentfuss}}{100} = \frac{1200 \cdot 4{,}5}{100} = \text{Fr. } 54.–$$

2. Aufgabe: Berechnung des *Grundwertes*
8% Rabatt sind Fr. 5.60. Welches ist der Rechnungsbetrag (Grundwert)?

$$\frac{\text{Prozentbetrag} \cdot 100}{\text{Prozentfuss}} = \frac{5.60 \cdot 100}{8} = \text{Fr. } 70.–$$

3. Aufgabe: Berechnung des *Prozentfusses*
Von 480 Schüssen waren 458 Treffer.
Wieviele % sind das?

$$\frac{\text{Prozentbetrag}}{^1/_{100} \text{ des Grundwertes}} = \frac{458}{4{,}8} = 95\% \text{ Treffer}$$

Zinsrechnungen

A. Wir berechnen entweder den Zins für ein ganzes Jahr (Jahreszinsrechnung) oder für einige Tage oder Monate (Marchzinsrechnung).

B. **Jahreszinsrechnung**
Es kommen drei Grössen vor wie in der Prozentrechnung:
1. Das Kapital = der Grundwert
2. Der Jahreszins = der Prozentbetrag
3. Der Zinsfuss = der Prozentfuss

Entsprechend sind die *Berechnungen:*

1. Aufgabe: Berechnung des *Jahreszinses*
Wie gross ist der Jahreszins zu 3½% von Fr. 300.–?

$$\frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuss}}{100} = \frac{300 \cdot 3{,}5}{100} = \text{Fr. } 10.50$$

2. Aufgabe: Berechnung des *Kapitals*
Der Jahreszins zu 5% beträgt Fr. 22.–. Wie gross ist das Kapital?

$$\frac{\text{Jahreszins} \cdot 100}{\text{Zinsfuss}} = \frac{22 \cdot 100}{5} = \text{Fr. } 440.–$$

3. Aufgabe: Berechnung des *Zinsfusses*
Ein Kapital beträgt Fr. 900.–. Der Jahreszins ist Fr. 36.–. Wie gross ist der Zinsfuss?

$$\frac{\text{Jahreszins}}{{}^{1}/_{100}\,\text{des Kapitals}} = \frac{36}{9} = 4\%$$

C. **Marchzinsrechnung**

Zusätzlich muss die Zeitdauer berücksichtigt werden. Bei uns gilt: Jeder Monat hat 30 Tage, das Jahr hat 360 Tage. Der 30. oder 31. des Monats (der 28. oder 29. Februar) ist der letzte Tag. Von da ab werden keine Tage mehr gezählt. Vorher wird *immer* auf 30 ergänzt. (27. März: noch 3 Tage!)

1. Aufgabe: Berechnung des *Marchzinses*
Welchen Zins bringen Fr. 1500.– zu 3½% in 132 Tagen?

$$\frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuss} \cdot \text{Tage}}{100 \cdot 360} = \frac{1500 \cdot 3{,}5 \cdot 132}{100 \cdot 360} = \text{Fr. } 19.25$$

2. Aufgabe: Berechnung des *Kapitals*
Welches Kapital bringt zu 4½% in 132 Tagen Fr. 40.– Marchzins?

$$\frac{\text{Marchzins} \cdot 360 \cdot 100}{\text{Anzahl Tage} \cdot \text{Zinsfuss}} = \frac{40 \cdot 360 \cdot 100}{132 \cdot 4{,}5} = \text{Fr. } 2424.24$$

3. Aufgabe: Berechnung des *Zinsfusses*
Zu welchem Zinsfuss bringt ein Kapital von Fr. 2400.– in 216 Tagen Fr. 46.80 Zins?

$$\frac{\text{Marchzins} \cdot 360}{\text{Anzahl Tage} \;\; {}^{1}/_{100}\,\text{des Kapitals}} = \frac{46.80 \cdot 360}{216 \cdot 24} = 3{,}25\%$$

4. Aufgabe: Berechnung der *Zeit*
Wie viele Tage muss ein Kapital von Fr. 4800.– zu 3% angelegt werden, damit es Fr. 120.– Marchzins bringt?

$$\frac{\text{Marchzins}}{\text{Tageszins}} = \frac{\text{Marchzins}}{\frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuss}}{100 \cdot 360}} = \frac{120}{\frac{4800 \cdot 3}{100 \cdot 360}} = 300 \text{ Tage}$$

Zinseszinsrechnung

Man spricht von Zinseszins, wenn der Zins eines angelegten Kapitals am Ende eines Jahres nicht abgehoben, sondern zum Kapital zugeschlagen und mit diesem (wie eine neue Einlage zu Jahresbeginn) weiter verzinst wird.

Anwachsen eines Kapitals von 100 Franken durch Zinseszins

Abgelaufene Jahre	Zinsfuss 2%	3%	4%	5%	6%
1	102.—	103.—	104.—	105.—	106.—
2	104.04	106.09	108.16	110.25	112.36
3	106.12	109.27	112.49	115.76	119.10
4	108.24	112.55	116.99	121.55	126.25
5	110.41	115.93	121.66	127.63	133.82
6	112.62	119.40	126.53	134.01	141.85
7	114.87	122.99	131.59	140.71	150.36
8	117.17	126.68	136.86	147.75	159.38
9	119.51	130.48	142.33	155.13	168.95
10	121.90	134.39	148.02	162.89	179.08
50	269.16	438.39	710.67	1146.74	1842.02
100	724.46	1921.86	5050.52	13150.13	33930.38

Berechnung

Bezeichnungen:

P (%) = Zinsfuss $1 + \frac{P}{100}$ = Zinsfaktor q

Ko = Anfangskapital

Kn = Endkapital, auf das Ko nach n Jahren angewachsen ist.

Formel: $Kn = Ko\,(1 + \frac{P}{100})^n = Ko \cdot q^n$

Beispiel: Ko = Fr. 100.– n = 3 Jahre p = 5%

$Kn = 100\,(1 + \frac{5}{100})^3 = 100 \cdot 1{,}05^3 =$ Fr. 115.76

Abzahlung von Schulden

Max möchte seinen Vater überreden, ihm zur Anschaffung eines Mopeds einen Kredit zu gewähren. Der Jüngling hat die Inserate der Kleinbanken studiert und dazu für sich folgende Rechnung gemacht:
Kreditsumme Fr. 1000.– / Abzahlung in 12 Monatsraten zu Fr. 90.20

Gesamte Rückzahlung : 12 · Fr. 90.20 =	Fr. 1082.40
Gewährter Kredit	Fr. 1000.—
Zins	Fr. 82.40

Fr. 82.40 sind 8,24% von Fr. 1000.–, das ist doch ganz anständig, denkt Max ... denkt er falsch! In Wirklichkeit verlangt die Bank 15,21%. Warum? Die Überlegung wäre richtig, wenn Max die ganze Schuld am Ende, also nach 12 Monaten, zurückzahlen würde. Dann hätte er für Fr. 1000.– Kredit nach einem Jahr Fr. 82.40 Zins bezahlt, also 8,24%. Er bezahlt aber jeden Monat einen Teil seiner Schuld zurück, und damit verzinst er im Durchschnitt nur etwa das halbe Darlehen – das, was er an Zins bezahlt, macht davon entsprechend mehr Prozente aus.
Der Vater berechnet mit dem Jüngling die Schuldentilgung unter Annahme eines Zinses von 10% und einer monatlichen Abzahlung eines Zwölftels der Schuld. Zum Glück haben sie einen elektronischen Taschenrechner zur Hand.

Teilzahlungen

Schuldentilgung pro Monat: $^{1}/_{12}$ von Fr. 1000.– = Fr. 83.33

Monate	Das Kapital beträgt	zu verzinsen ist	der Zins beträgt für 1 Monat
0	1000.—		
1	916.67	1000.—	8.33
2	833.34	916.67	7.64
3	750.—	833.34	6.94
4	666.67	750.—	6.25
5	583.34	666.67	5.56
6	500.—	583.34	4.86
7	416.67	500.—	4.17
8	333.34	416.67	3.47
9	250.—	333.34	2.78
10	166.67	250.—	2.08
11	83.34	166.67	1.39
12	0.—	83.34	–.69
		Gesamtzins:	54.16

Wenn Max seine Zinsschuld regelmässig auf die 12 Monate verteilen darf, so hat er jeden Monat Fr. 87.85 abzubezahlen.

Betriebskosten eines Motorfahrzeugs

Spätestens wenn die Eltern nicht mehr alles bezahlen, merken wir, dass der Betrieb eines Motorfahrzeugs viel mehr kostet als nur gerade die immer wieder am Taschengeld zehrenden Ausgaben für Benzin und Öl. So etwa könnte die Rechnung für ein Auto aussehen:

Verkehrssteuer	Fr. 300.–
Versicherungen	Fr. 650.–
Benzin und Öl	Fr. 2200.–
Pneus	Fr. 280.–
Service	Fr. 650.–
Reparaturen	Fr. 950.–
Verschiedenes	Fr. 250.–
Kapitalzins*	Fr. 480.–
Abschreibung**	Fr. 3500.–
	Fr. 9260.–

Bei 20 000 km **im Jahr pro km:**
Fr. 9260 : 20 000 = 46,3 Rappen

Zwei Posten werden gerne vergessen:

* **Kapitalzins:** Hätte ich das Motorfahrzeug nicht gekauft, so könnte ich den entsprechenden Betrag zinstragend anlegen. Fr. 12 000.– würden z.B. zu 4% den Betrag im Beispiel oben (Fr. 480.–) Jahreszins abwerfen.

** **Abschreibung:** Das Fahrzeug verliert alljährlich an Wert. Bis zum Zeitpunkt, da es für mich unbrauchbar wird, sollte ich den ausgelegten Betrag wieder gespart (oder im schlimmeren Fall) den erhaltenen Kredit abbezahlt haben. Das ist die «Abschreibung». Ihre Höhe kann verschieden berechnet werden. Eine Möglichkeit für junge Leute ist folgende:

1. Überlege, wie lange du das Fahrzeug vermutlich gebrauchen kannst.
2. Überlege, wieviel das Fahrzeug nach dem jahrelangen Gebrauch bei einem Wiederverkauf noch einbringen wird.
3. Zähle vom Kaufpreis den vermutlichen Wiederverkaufswert ab. Teile den Rest durch die Anzahl Jahre, die das Fahrzeug dir dienen soll; das gibt die jährliche Amortisation oder Abschreibung. In unserem Beispiel habe ich gerechnet: Anschaffung Fr. 12 000.–, Wiederverkauf nach zwei Jahren zu Fr. 5000.–, Minderwert Fr. 7000.–, pro Jahr Fr. 3500.– Abschreibung.

Selbstverständlich können diese Zahlen auch viel günstiger ausfallen; Glück und Missgeschick, Sorgfalt und Leichtsinn werden dabei kräftig mitspielen.

Meine eigene Rechnung:

Algebra – Formeln

1. Umformungen

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $\qquad a^2+b^2$ (nicht zerlegbar)

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ $\qquad a^2-b^2 = (a-b)\,(a+b)$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $\qquad a^3+b^3 = (a+b)\,(a^2-ab+b^2)$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ $\qquad a^3-b^3 = (a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

2. Brüche

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \qquad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b\cdot c} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

3. Potenzen und Wurzeln (Radikand nicht negativ)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$

$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

4. Quadratische Gleichungen

$$x_{1;\,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

$$= \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Satz von Vieta : $x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a} = q$

Begriffe und Zeichen aus der Mengenlehre

Begriff	Zeichen	Beispiel	Erklärungen, Beschreibungen, Regeln, Definitionen
Menge	$\{\ \}$	$\{1,3,6,9\}$	Der Begriff der Menge wurde vom Begründer der Mengenlehre[1] wie folgt definiert: «Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens[2] zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen die Elemente der Menge.» **Wir lesen** unser Beispiel: «Menge mit den Elementen 1, 3, 6, 9.» Die «Mengenklammern» $\{\ \}$ heissen auch Akkoladen.
Element (aus) einer Menge	$\in$	$3 \in \{1,3,6,9\}$	3 ist ein Element aus der Menge mit den Elementen 1, 3, 6, 9. Wir lesen: «drei ist Element der Menge (mit den Elementen) $\{1, 3, 6, 9\}$»
Nicht Element einer Menge	$\notin$	$4 \notin \{1,3,6,9\}$	Wir lesen: «vier ist nicht Element der Menge $\{1, 3, 6, 9\}$»
Teilmenge	$\subset$	$\{1,6\} \subset \{1,3,6,9\}$	Greift man aus einer Menge (oder Grundmenge, oder Obermenge) eine Anzahl von Elementen heraus, so bilden diese eine Teilmenge oder Untermenge. Wir lesen: «$\{1,6\}$ ist Teil-

			menge der Grundmenge / Obermenge / Menge $\{1,3,6,9\}$»
Obermenge	$\supset$	$\{1,3,6,9\} \supset \{1,6\}$	Wir lesen: «$\{1,3,6,9\}$ ist Obermenge der Teilmenge $\{1,6\}$»
Gleichheit	$=$	$\{1,7,8\} = \{8,1,7\}$	Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.
	$\neq$	$\{1,7,8\} \neq \{1,6,8\}$	Diese Mengen sind ungleich.
Äquivalenz	$\sim$ [3]	$\{1,3,5\} \sim \{2,4,6\}$	Zwei Mengen heissen gleichmächtig oder äquivalent, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen haben. Lies: «äquivalent mit».
Vereinigungs-menge	$\cup$	$\{1,3,6\} \cup \{1,3,8,9\} = \{1,3,6,8,9\}$	Die Vereinigungsmenge ist die Gesamtheit der Elemente zweier Mengen; doppelt oder mehrfach auftretende Elemente werden nur einmal angegeben. Lies: $\cup$: «vereinigt mit».
Schnittmenge	$\cap$	$\{1,3,6\} \cap \{1,3,8,9\} = \{1,3,\}$	Die Schnittmenge (auch Durchschnitt genannt) zweier Mengen ist die Menge aller Elemente, die in jeder der beiden Mengen enthalten sind. Lies: $\cap$: «geschnitten mit».
Leere Menge	$\{\}$ auch $\varnothing$	$\{1,3,6\} \cap \{2,8,9\} = \{\}$	Die leere Menge (auch Leermenge oder Nullmenge genannt) ist eine Menge, die keine Elemente hat. Lies: $\{\}$: «leere Menge».

Mengen-Zeichen	Für (bekannte) Mengen werden häufig Grossbuchstaben mit Doppelstrich links gesetzt.
$\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$	$\mathbb{G}$ ist die Grundmenge
$\mathbb{C}$	$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen $= \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{G}$	$\mathbb{N}_0$ ist die Menge der natürlichen Zahlen samt $0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{N}$	
$\mathbb{N}_0$	

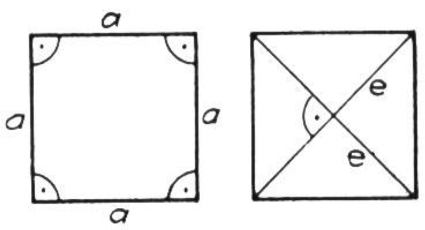
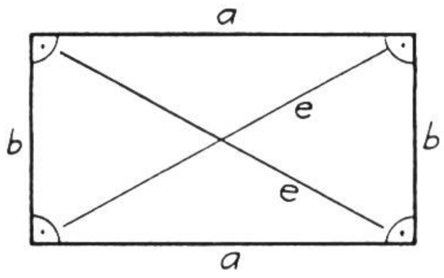
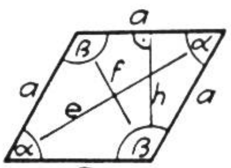
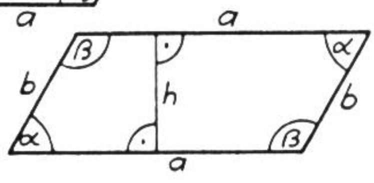
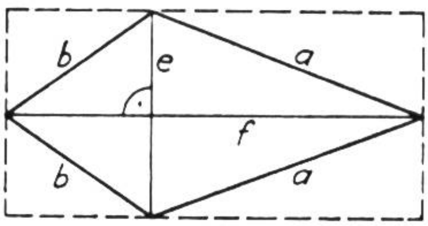
[1] Georg Cantor (1845–1918).

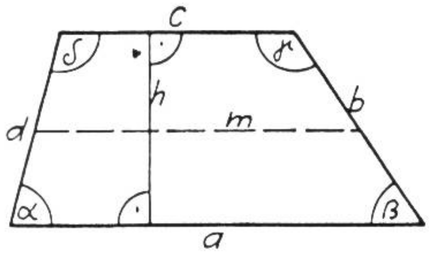
[2] Das können z. B. Zahlen, Buchstaben, Gegenstände, Wörter usw. sein.

[3] Das Zeichen $\sim$ wird in der Geometrie in der Bedeutung «... ist ähnlich zu ...» verwendet.

Geometrie

1. Einfache ebene Figuren

	Umfang	Flächen- inhalt	Andere Zusammenhänge
	**Das Quadrat** $u = 4 \cdot a$	$F = a \cdot a = a^2$ $F = \frac{e^2}{2}$	Diagonale $e = a\sqrt{2}$
	**Das Rechteck** $u = 2\,(a+b)$	$F = a \cdot b$	Diagonale $e = \sqrt{a^2+b^2}$
	**Der Rhombus, die Raute** $u = 4 \cdot a$	$F = a \cdot h$ $F = \frac{e \cdot f}{2}$	$\alpha + \beta = 180°$
	**Das Rhomboid, das Parallelogramm** $u = 2\,(a+b)$	$F = a \cdot h$	$\alpha + \beta = 180°$
	**Das Deltoid, das Drachenviereck** $u = 2\,(a+b)$	$F = \frac{e \cdot f}{2}$	Winkelsumme = 360°

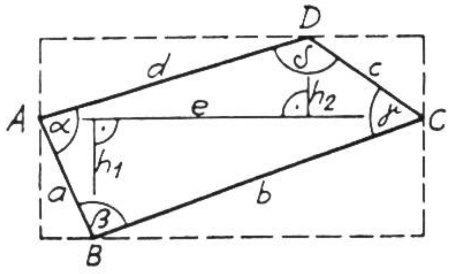


Das Trapez

$u = a+b+c+d \qquad F = m \cdot h \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$

$F = \frac{a+c}{2} \cdot h$

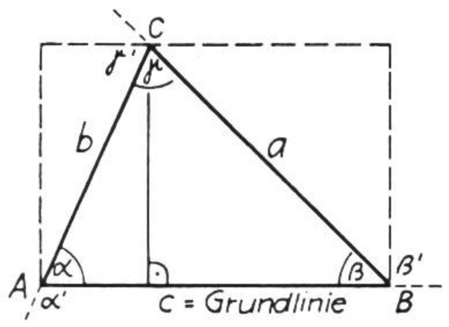
m = Mittelparallele



Das Trapezoid (unregelmässiges Viereck)

$u = a+b+c+d \qquad F = e\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$

2. Das Dreieck



Umfang $u = a+b+c$ Flächeninhalt $F = \frac{g \cdot h}{2}$

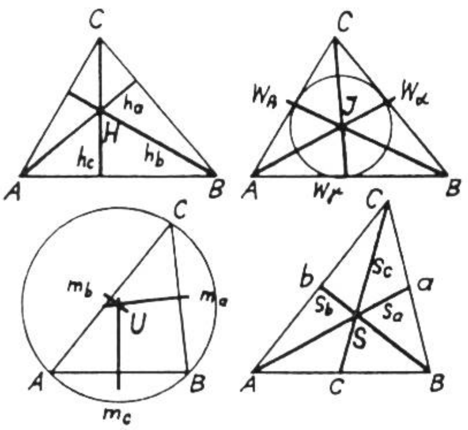
Wenn u mit 2s bezeichnet wird, so gilt auch

$F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$

Andere Zusammenhänge

$\alpha+\beta+\gamma = 180° \qquad \alpha'+\beta'+\gamma' = 360°$

$\alpha' = \beta+\gamma \qquad \beta' = \alpha+\gamma \qquad \gamma' = \alpha+\beta$



Besondere Punkte im Dreieck

Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.

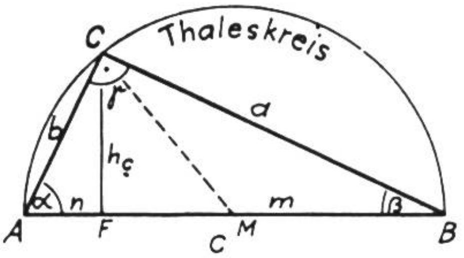
Die drei Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ schneiden sich in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt J.

Die drei Mittelsenkrechten der Seiten m_a, m_b, m_c schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt U.

Die drei Seitenhalbierenden (Schwerlinien, Mittellinien) s_a, s_b, s_c schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S.

Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2.

Besondere Dreiecke



Das rechtwinklige Dreieck

a, b = Katheten, c = Hypotenuse, $\gamma = 90°$,

$\alpha+\beta = 90°$

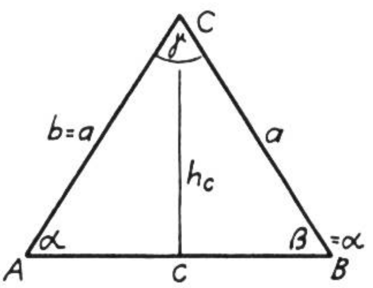
$u = a+b+c \qquad F = \frac{a \cdot b}{2} \qquad F = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$a^2+b^2 = c^2$ Satz des Pythagoras

$c = \sqrt{a^2+b^2} \qquad a = \sqrt{c^2-b^2} \qquad b = \sqrt{c^2-a^2}$

$h^2 = m \cdot n$ Höhensatz (des Euklid)

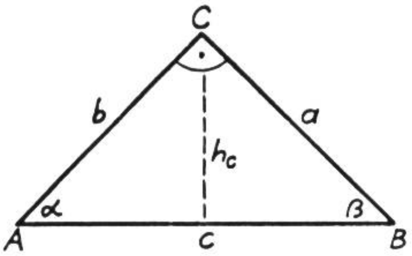
$\left.\begin{array}{l} a^2 = m \cdot c \\ b^2 = n \cdot c \end{array}\right\}$ Kathetensätze (des Euklid) $\qquad r = \frac{c}{2}$



Das gleichschenklige Dreieck

$u = 2a+c$

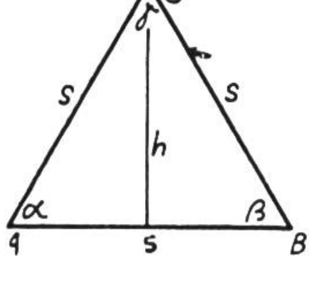
$F = \frac{c \cdot h_c}{2}$



Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck

$\alpha = \beta = 45° \qquad a = b = \frac{c}{\sqrt{2}} \qquad c = a\sqrt{2} \qquad h_c = \frac{c}{2}$

$u = 2a+c \qquad F = \frac{c \cdot h_c}{2} \qquad F = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \qquad F = \frac{c^2}{4}$



Das gleichseitige Dreieck

$\alpha = \beta = \gamma = 60°$

$a = b = c = s$

$h = \frac{s}{2}\sqrt{3} \qquad u = 3 \cdot s \qquad F = \frac{s \cdot h}{2} \qquad F = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

Dreiecke sind kongruent, d.h. sie stimmen in Form **und** Flächeninhalt überein, wenn sie drei gleiche Bestimmungsstücke haben, wovon eines eine Länge sein muss; also wenn sie übereinstimmen

1. in den drei Seiten — sss
2. in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel — sws
3. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite — ssw
4. in einer Seite und deren anliegenden Winkel — wsw
5. in einer Seite und zwei Winkeln — sww

Dreiecke sind ähnlich, d.h. sie haben gleiche Form, wenn sie übereinstimmen

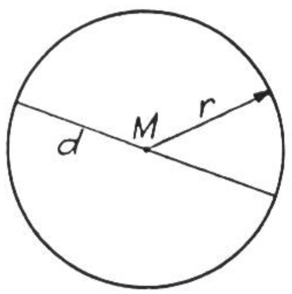
1. im Verhältnis der drei Seiten
2. im Verhältnis zweier Seiten und dem Zwischenwinkel
3. im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite
4. in zwei Winkeln.

In den Formeln für die wichtigsten Grössen der ebenen Figuren und der Körper bedeuten:

u = Umfang F = Flächeninhalt O = Oberfläche
M = Mantelfläche G = Grundfläche
k = Gesamtkantenlänge V = Rauminhalt oder Volumen
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ = Winkel a, b, c, ... = Seiten
R, r, ρ = Radien h, h_c, h ... = Höhen
$\measuredangle$ = rechter Winkel;

für π genügt meist der Wert 3,14 oder $\frac{22}{7}$

3. Der Kreis

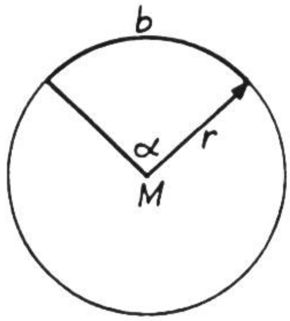


Umfang: $u = d \cdot \pi \qquad u = 2r\pi$

Flächeninhalt: $F = r^2\pi \qquad F = \frac{d^2}{4}\pi \qquad F = \frac{u^2}{4 \cdot \pi}$

Spezialfälle: Halbkreis, Viertelskreis

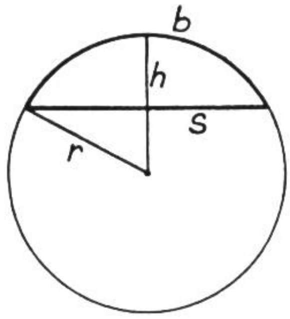
Der Kreissektor (Ausschnitt)



Bogenlänge $b = \frac{u \cdot \alpha}{360} = \frac{d \cdot \pi \cdot \alpha}{360} = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$

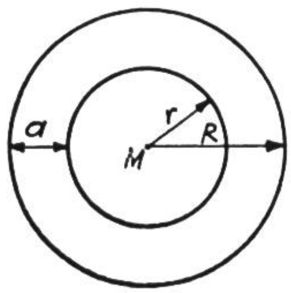
$F = \frac{b \cdot r}{2} \quad F = \frac{r^2 \pi}{360} \cdot \alpha \quad F = \frac{u^2 \cdot \alpha}{4\pi \cdot 360}$

Das Kreissegment (Abschnitt)



$F = \frac{r \cdot (b - s) + s \cdot h}{2}$

Der Kreisring

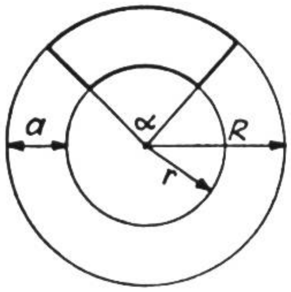


Radiale Breite des Kreisringes: $a = R - r$

$F = R^2 \pi - r^2 \pi \qquad F = (R+r)\,(R-r)\,\pi$

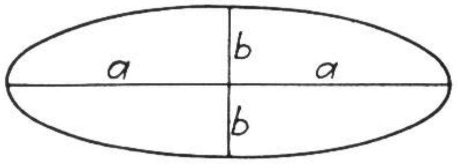
$F = (R+r)\,a\,\pi$

Das Kreisringstück



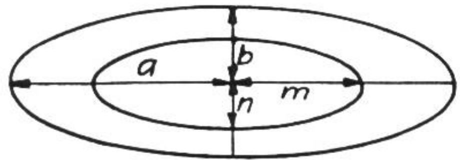
$F = \frac{R^2 \pi - r^2 \pi}{360} \cdot \alpha \qquad F = (R+r)\,(R-r)\,\frac{\pi \cdot \alpha}{360}$

$F = (R+r)\,a\,\frac{\pi \cdot \alpha}{360}$



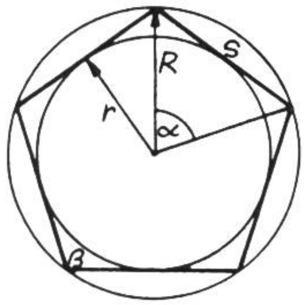
Die Ellipse

a = halbe grosse Achse b = halbe kleine Achse
Flächeninhalt: $F = a \cdot b \cdot \pi$
Umfang: Es besteht keine (elementare) Formel



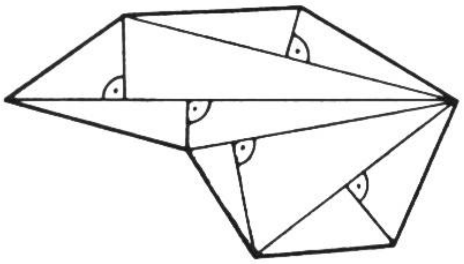
Der elliptische Ring

a, b = halbe Achsen der äusseren Ellipse
m, n = halbe Achsen der inneren Ellipse
Flächeninhalt: $F = (a \cdot b - m \cdot n)\,\pi$



Das regelmäßige Vieleck (n-Eck)

R = Radius des Umkreises Umfang: $u = n \cdot s$
r = Radius des Inkreises
n = Seitenzahl
s = Vielecksseite $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ $\beta = 180^\circ - \alpha$
α = Zentriwinkel
β = Vieleckswinkel Flächeninhalt: $F = \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$

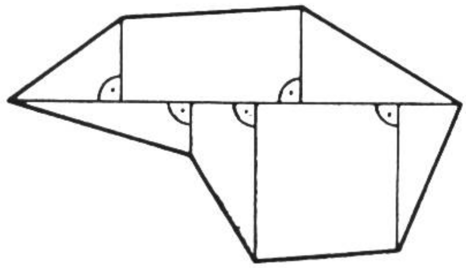


Das unregelmäßige Vieleck

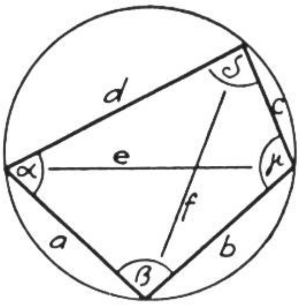
Umfang = Summe aller Seiten
Flächeninhalt:
Man zerlegt die Vieleckfläche:

a. mit Diagonalen in Dreiecke und eventuell Trapezoide, berechnet diese Teile und addiert die Teilresultate

oder:



b. mit einer passenden Diagonale und auf dieser rechtwinklig errichteten Höhen zu den Ecken in Dreiecke und Trapeze, berechnet diese Teile einzeln und addiert die Teilresultate.



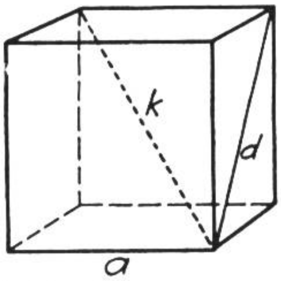
Das Sehnenviereck

Umfang: $u = a+b+c+d \quad u = 2 \cdot s \quad s = \frac{u}{2}$

Flächeninhalt:
$F = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}$

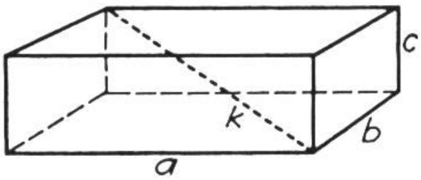
Satz des Ptolemäus: $ac+bd = ef$
Winkel: $\alpha+\gamma = \beta+\delta = 180°$

5. Körper



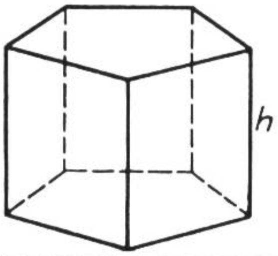
Der Würfel

Gesamtkantenlänge: $12 \cdot a$
Seitendiagonale d: $a\sqrt{2}$
Körperdiagonale k: $a\sqrt{3}$
Mantel: $M = 4a^2$ Oberfläche: $O = 6a^2$
Volumen: $V = a^3$



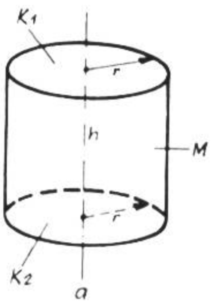
Der Quader

Gesamtkantenlänge: $4(a+b+c)$
Körperdiagonale: $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
$M = 2(a+b) \cdot c \quad O = 2(ab+ac+bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$



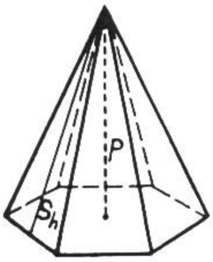
Das gerade Prisma

u = Umfang der Grund- oder Deckfläche G
n = Zahl der Seitenkanten (Höhenkanten) h
Gesamtkantenlänge: $2u+n \cdot h$
$M = u \cdot h \quad V = G \cdot h \quad O = u \cdot h+2 \cdot G$



Der senkrechte Kreiszylinder

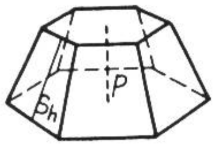
a = Achse, senkrecht zu K_1 und K_2
h = Höhe (Abstand der parallelen Kreise K_1 und K_2)
M = Mantel
$M = 2\pi r \cdot h$
$O = 2\pi r(r+h)$
$V = r^2\pi h$



Die Pyramide (regelmässige)

s_h = Seitenhöhe p = Pyramidenhöhe
u = Umfang der Grundfläche G

$M = u \cdot \frac{s_h}{2}$ $O = M + G$ $V = G \cdot \frac{p}{3}$

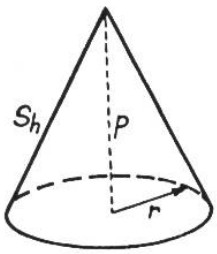


Der Pyramidenstumpf

U = Umfang der Grundfläche G
u = Umfang der Deckfläche D

$M = \frac{(U+u) \cdot s_h}{2}$ $O = M + G + D$

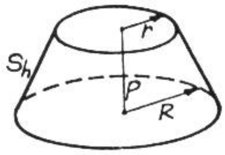
$V = \frac{1}{3} p (G + \sqrt{GD} + D)$



Der Kreiskegel

r = Radius $M = r\pi \cdot s_h$ $O = r\pi (r + s_h)$

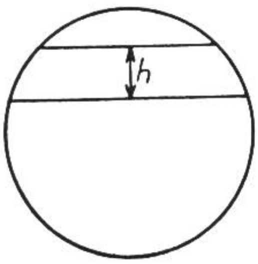
$V = \frac{r^2 \pi \cdot p}{3}$



Der Kegelstumpf

R = Radius der Grundfläche
r = Radius der Deckfläche
$M = \pi s_h (R + r)$ $O = M + G + D$

$O = [(R+r)\, s_h + R^2 + r^2]\, \pi$ $V = \frac{\pi \cdot p}{3} (R^2 + Rr + r^2)$

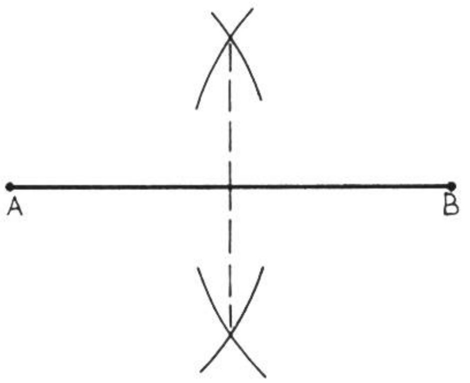


Die Kugel

r = Radius $O = 4\pi r^2$

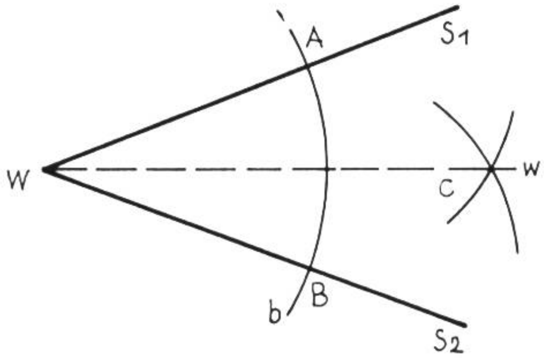
$\left.\begin{array}{l}\text{Kugelhaube}\\ \text{Kugelzone}\end{array}\right\}$ $O = 2\pi r h$ $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Geometrische Grundkonstruktionen



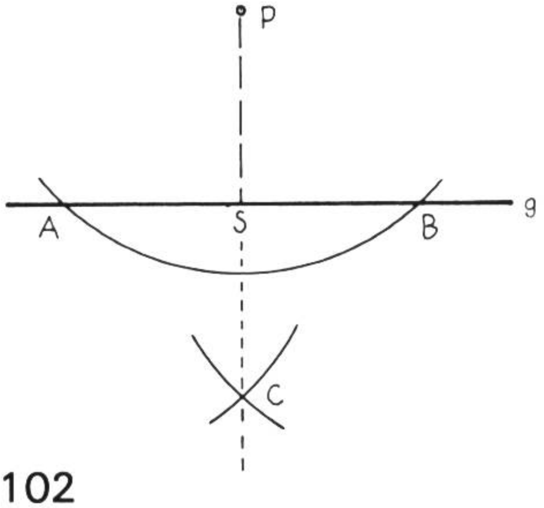
1. Halbieren einer Strecke

Man schlägt um die Endpunkte der Strecke AB zwei Kreisbögen mit gleichem Radius und verbindet ihre Schnittpunkte.



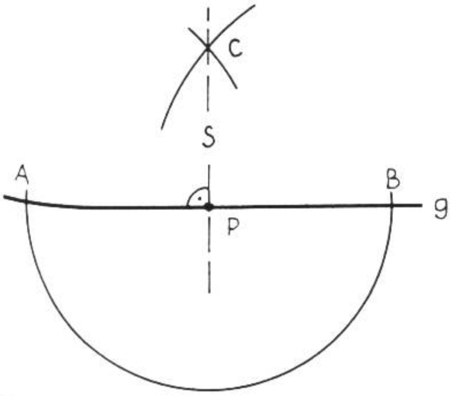
2. Halbieren eines Winkels

Man schlägt einen Kreisbogen b um den Scheitel W. Von seinen Schnittpunkten A und B mit den Schenkeln S_1 und S_2 aus tragen wir je einen Kreisbogen mit gleichem Radius ab. Durch ihren Schnittpunkt C geht die Winkelhalbierende w.



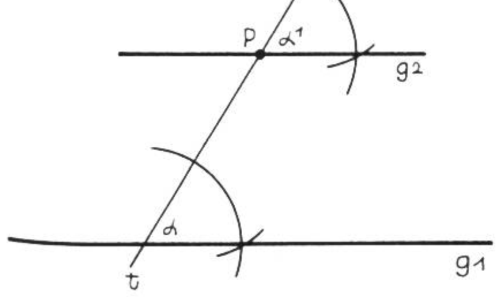
3. Fällen eines Lotes von P auf die Gerade g

Ein Kreisbogen von P aus schneidet g in den Punkten A und B. Von A und B aus tragen wir je einen Kreisbogen mit gleichem Radius ab. Durch deren Schnittpunkt C geht die Senkrechte s (das Lot).



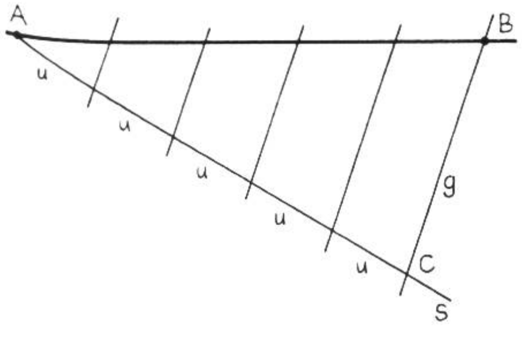
4. Errichten einer Senkrechten in P

Mit P als Mittelpunkt schlägt man einen Kreisbogen, der g in A und B schneidet. Von A und B aus tragen wir je einen Kreisbogen ab. Von deren Schnittpunkt C aus ziehen wir die Senkrechte durch P.



5. Zeichnen einer Parallelen zu einer Geraden g_1 durch einen Punkt P

Man zieht eine beliebige Gerade t durch P. Den Winkel α, den t mit g_1 bildet, trägt man im Punkt P an t an und erhält so g_2. (Gleichliegende Winkel.)



6. Unterteilung einer Strecke in eine beliebige Zahl gleichlanger Stücke.

Von A (oder B) aus ziehen wir den Strahl s. Auf diesem tragen wir die verlangte Anzahl gleichlanger Strecken (z.B. 5) ab. Vom Endpunkt C aus ziehen wir eine Gerade durch B. Zu dieser Geraden g ziehen wir Parallele durch jedes Streckenende auf s.

Einheiten im Messwesen

1. Druck, mechanische Spannung

alt:	neu (SI-Einheit):
1 technische Atmosphäre (1 at) ist gleich dem auf eine Fläche gleichmässig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 cm² eine Kraft von 1 Kilopond (im alltäglichen Sprachgebrauch 1 kg) wirkt.	**1 Pascal** (Pa) ist gleich dem auf eine Fläche gleichmässig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 m² die Kraft 1 Newton (N) ausgeübt wird.
1 physikalische Atmosphäre (1 Atm) ist der Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0°C auf 1 cm². 1 Atm = 1,033 at.	**1 Bar** (bar) ist der 10. Teil eines Megapascal. 1 bar = 100 000 Pa. 1 at = 1 kp/cm² = 98 066,5 Pa 1 Atm = 1,033 kp/cm² = 101 325 Pa

2. Energie, Arbeit, Wärmemenge

alt:	neu:
Arbeit: Wenn mit dem Einsatz einer Kraft von 1 Kilopond der Weg 1 m überwunden wird, beträgt die Arbeit **1 kpm** (1 «Meterkilogramm»). **Wärmemenge:** Die Wärmemenge, die benötigt wird, um 1 g Wasser von 14,5 auf 15,5°Celsius zu erwärmen, ist 1 Kalorie (1 cal). 1000 cal = 1 Kilokalorie (1 Kcal).	**1 Joule** (J) ist gleich der Arbeit, die verrichtet wird, wenn der Angriffspunkt der Kraft 1 Newton (N) in Richtung der Kraft um 1 m verschoben wird. 1 kpm = 9,80665 J. 1 cal = 4,1868 J.

3. Leistung

alt:	neu:
Wenn die Arbeit 1 kpm in 1 Sekunde verrichtet wird, so beträgt die Leistung **1 kpm/s** (1 «Meterkilogramm» pro Sekunde).	**1 Watt** (1 W) ist gleich der Leistung, bei der während der Zeit 1 Sekunde die Energie 1 Joule umgesetzt wird.
1 Pferdestärke (1 PS) = 75 kpm/s.	1 PS = 735,3 W
1 Kilowatt = 1000 Watt = 1.36 PS.	1 kpm/s = 9,80665 W

Umrechnungstabelle für die neuen Masseinheiten:

Arbeit, Wärme:	1 cal	=	4,1868 J
	1 J	=	0,2388 cal
Kraft:	1 N	=	1 kgm/s^2
Leistung:	1 PS	=	0,735499 kW
	1 kW	=	1,359622 PS
Druck:	1 atm	=	0,980665 bar
Temperatur:	0°C	=	273,16 K

Der Überholungsweg

Je grösser der Geschwindigkeitsunterschied zwischen Überholendem und Überholtem ist, **desto kürzer** wird der Überholungsweg. Je grösser die Geschwindigkeiten überhaupt sind, **desto länger** wird der Überholungsweg. Pro 10 km/Std. Geschwindigkeitsunterschied macht der Überholende ca. 2,8 m pro Sekunde gut. Der Überholungsweg kann im Normalfall berechnet werden:

$$\text{Überholungsweg} = \frac{\text{höhere Geschwindigkeit} \cdot \text{höhere Geschwindigkeit}}{\text{Geschwindigkeitsunterschied}}$$

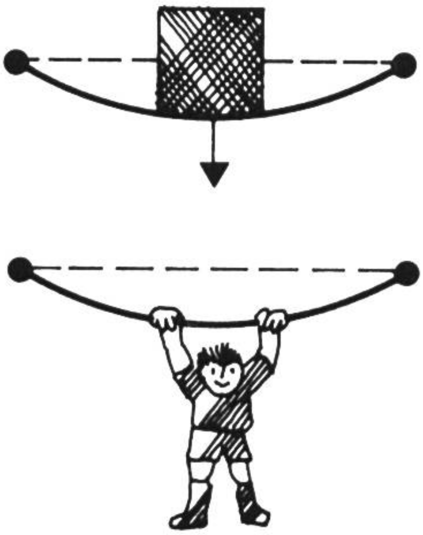
in m — in km/Std.

Beispiel: A fährt Velo mit 20 km/Std., B fährt Moped mit 30 km/Std.:

$$\text{Überholungsweg} = \frac{30 \cdot 30}{10} = 90\ \text{m}$$

Anhaltestrecke siehe Seite 113.

Gewichte und Massen, Kräfte

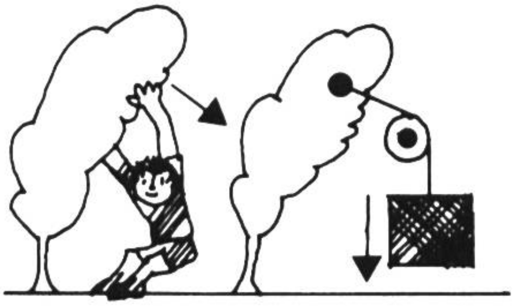


– Was ist ein Gewicht?

Das Gewicht des Körpers ist die Kraft, mit welcher der Körper (wegen der Erdanziehung) auf seine horizontale Unterlage drückt oder an seiner Aufhängevorrichtung zieht und sie dadurch verformt.

– Masseinheit:

Das Gewicht von 1 dm³ Wasser von 4 °C in Bern oder Zürich entspricht mit guter Genauigkeit der internationalen Gewichtseinheit 1 Kilopond (1 kp).



– Gewicht und Kraft:

Jede in beliebiger Richtung wirkende Kraft kann mit einer Gewichtskraft verglichen und daher mit dem gleichen Mass ausgedrückt werden.
Die für Gewicht und Kraft neu geltende Einheit ist das **Newton** (1 N).

– Gewicht und Masse:

Die Masse eines Körpers, z. B. eine Portion eines Nahrungsmittels, ist überall gleich. Ihr Gewicht aber hängt vom Ort ab:

	Masse	**Gewicht**		
Bei uns	1 kg	1 kp	=	9,81 N
Erdpol	1 kg	1,003 kp		
Äquator	1 kg	0,997 kp		
Mondboden	1 kg	0,167 kp		

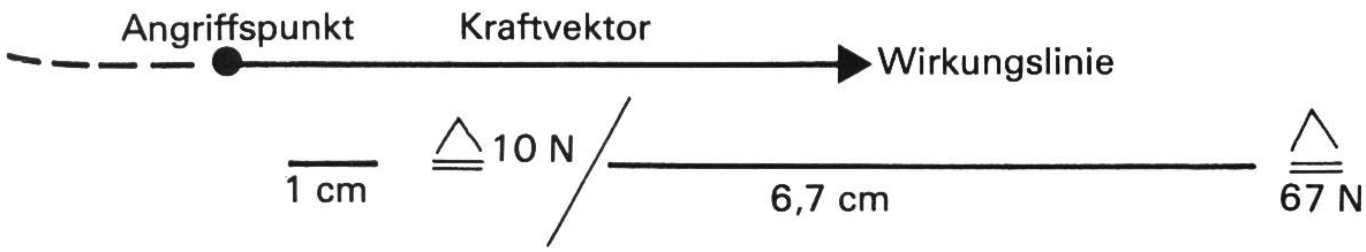
– Umrechnung

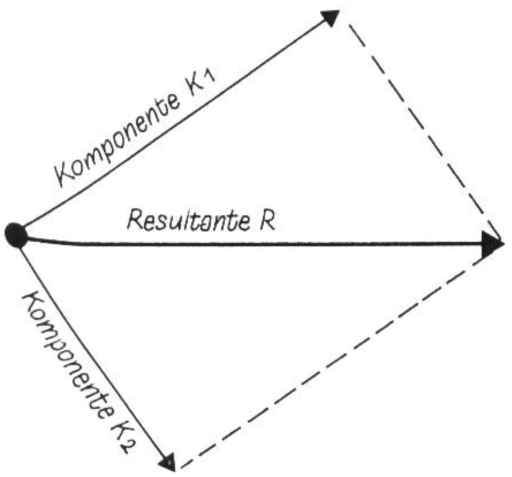
1 Newton = 1 N = 0,1019 kg/kp
1 kg/kp = 9,81 N

– Im bürgerlichen Leben wird Gewicht anstelle von Masse gleichbedeutend angewendet. Darum merken wir uns eben die Umrechnung vom altvertrauten Kilogramm in Newton.

Kraftpfeile (Vektoren) – Addition von Kräften

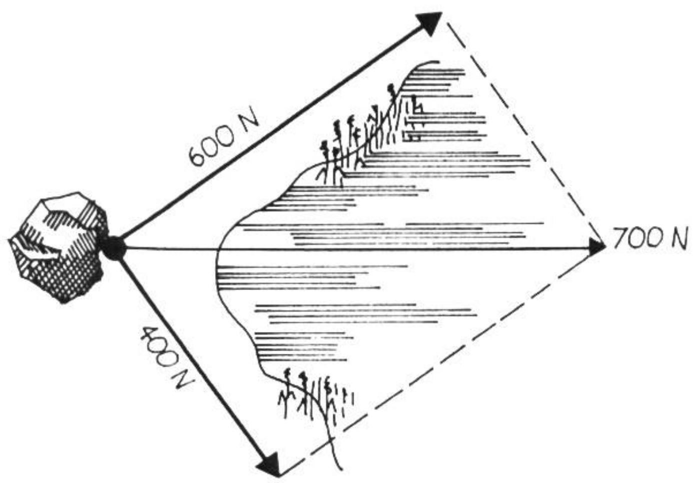
Eine Kraft hat nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung. Die Kraft ist ein **Vektor** und wird durch einen Pfeil dargestellt, dessen Anfang den Angriffspunkt zeigt und dessen Länge proportional zum Betrag der Kraft gezeichnet wird. Die Gerade durch den Pfeil in Kraftrichtung heisst Wirkungslinie.





Mit Hilfe eines **Kräfteparallelogramms** kann man Kräfte zeichnerisch **addieren**. Die Summanden nennt man **Komponenten**, das Ergebnis wird durch die **Resultante** dargestellt.

Mit Hilfe eines Kräfteparallelogramms kann man auch Kräfte **zerlegen.**



Der Fels F sollte mit der Kraft 700 N seewärts befördert werden. Im See kann man nicht ziehen, also erledigt man die Arbeit mit den beiden Teilkräften von 600 N & 400 N in den angegebenen Richtungen (gerundete Werte).

Masse und Gewichte

Längenmasse

(zehnteilig)

milli (m) = Tausendstel
centi (c) = Hundertstel
dezi (d) = Zehntel
deka (da) = zehn
hekto (h) = hundert
kilo (k) = tausend

1 cm = 10 mm

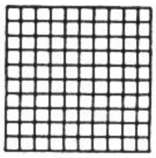
1 mm
10 mm = 1 cm
10 cm = 1 dm
10 dm = 1 m
10 m = 1 dam*
10 dam = 1 hm*
10 hm = 1 km
* wenig gebraucht

1 m = 1 Meter ≈ Erdumfang : 40 Millionen
dam = Dekameter
hm = Hektometer

Flächenmasse

(hundertteilig)

1 Quadratmeter (m^2) ist ein Quadrat von 1 m Seitenlänge



1 cm^2 = 100 mm^2

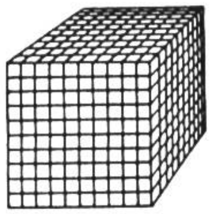
1 mm^2
100 mm^2 = 1 cm^2
100 cm^2 = 1 dm^2
100 dm^2 = 1 m^2
100 m^2 = 1 a
100 a = 1 ha
100 ha = 1 km^2

a = Are, ha = Hektare
1 Jucharte (altes Mass) = 36 a

Körpermasse

(tausendteilig)

1 Kubikmeter (m^3) ist ein Würfel von 1 m Kantenlänge



1 cm^3 = 1000 mm^3

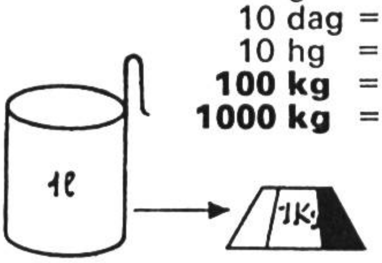
1 mm^3
1000 mm^3 = 1 cm^3
1000 cm^3 = 1 dm^3
1000 dm^3 = 1 m^3
1000 m^3 = 1 dam^3*
1000 dam^3 = 1 hm^3*
1000 hm^3 = 1 km^3
* wenig gebraucht

1 dm^3 = 1 l
1 cm = 1 ml
1 m^3 = 1000 l
1 m^3 = 10 hl

Hohlmasse, Flüssigkeitsmasse

l = Liter

1 ml*
10 ml = 1 cl*
10 cl = 1 dl
10 dl = 1 l
10 l = 1 dal*
10 dal = 1 hl
10 hl = 1 kl*
* wenig gebraucht



1 l = 1 kg
1 l (= 1 dm^3) chemisch reines Wasser von + 4° Celsius wiegt 1 kg

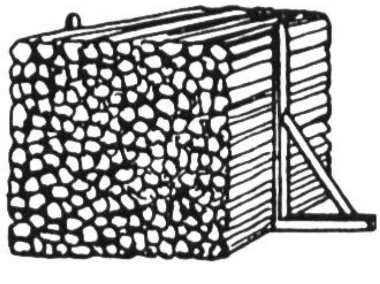
Gewichte

g = Gramm

1 mg
10 mg = 1 cg*
10 cg = 1 dg*
10 dg = 1 g
10 g = 1 dag*
10 dag = 1 hg*
10 hg = 1 kg
100 kg = 1 q
1000 kg = 1 t (10 q)

q = Zentner
t = Tonne
1 Pfund = 500 g

Holzmasse



1 Ster ist 1 m^3 Brennholz
1 Klafter ist 3 Ster (altes Mass)

Stückmasse

12 Stück = 1 Dutzend
12 Dutzend = 1 Gros (144 Stück)

Masse und Gewichte in englischen Sprachgebieten

A. Länge

Die Einheit ist das Yard (yd.)

1 Yard = 3 Feet (Fuss)	= 36 Inches (Zoll)	(Einzahl foot, inch)	
yd. ft.	in.		
1 in. = 2,54 cm	1 mm = 0,039 in.	Praktische Umrechnung:	
1 ft. = 0,305 m	1 cm = 0,394 in.	32 m = 35 yd.	
1 yd. = 0,914 m	1 m = 1,094 yd.		

1 statute mile (englische Meile) = 1,609 km
1 nautical mile (internat. Seemeile) = 1,852 km

B. Flächeninhalt

Die Einheit ist das Quadrat-Yard (squ. yd)

1 square yard (Quadrat-Yard) = 0,836 m^2
1 m^2 = 1,196 square yard
1 acre (ac) = 0,405 ha
1 ha = 2,471 ac

C. Rauminhalt

Die Einheit ist das Kubik-Yard (cbc. yd.)
1 cubic yard (Kubik-Yard) = 0,765 m^3
1 m^3 = 1,308 cubic yard

D. Hohlmasse

1 Gallone = 4 Quarts = 8 Pints

1 gallon (US)	= 3,785 l	1 l = 0,264 gallon (US)
1 gallon (brit.)	= 4,546 l	1 l = 0,220 gallon (brit.)
1 pint (US)	= 0,568 l	1 l = 1,76 pint (brit.)
1 barrel (US für Erdöl)	= 158,98 l	
1 barrel (brit. für Bier usw.)	= 163,5 l	

E. Gewichte

Die Einheit ist das Pound (lb) 1 Pound = 16 Unzen

1 ounce (Unze)	= 28,35 g	1 g = 0,0352 ounce
1 pound	= 0,454 kg	1 kg = 2,205 pound
1 short ton (US)	= 907,2 kg	1 t = 1,102 short ton
1 long ton (brit.)	= 1016 kg	1 t = 0,984 long ton

Ein Stein fällt zur Erde

Es ist eine bekannte Tatsache, dass ein Körper, der nirgends aufliegt und nicht aufgehängt ist, zur Erde fällt. Er fällt senkrecht, das heisst zum Erdmittelpunkt, weil ihn die Erde anzieht. Wir untersuchen jetzt, **wie** unser Stein fällt.
Wenn wir zum Beispiel eine Hühnerfeder und einen Stein von einem Turm fallen lassen, so wird der Stein lange vor der Feder am Boden angelangt sein. Wenn wir aber die Feder und den Stein in einem Rohr fallen lassen, aus dem wir vorher alle Luft entfernt haben, so kommen beide, Feder und Stein, gleich schnell unten an. Wir wissen es jetzt: **Im luftleeren Raum fallen alle Körper gleich schnell.** (Fig. 1, 2).
Wir untersuchen die Zeiten, Geschwindigkeiten und Wege, wie es Galileo Galilei zuerst gemacht hat, und erhalten dabei folgende Tabelle:

Zeit Sekunden	Fallhöhe m	Zuwachs m	Geschwindigkeit in m/Sekunde (am Ende der Strecke)	
1	5		10	(= 36 km/Std)
		15		
2	20		20	
		25		
3	45		30	
		35		
4	80		40	
		45		
5	125		50	
		55		
6	180		60	
		65		
7	245		70	
		75		
8	320		80	
		85		
9	405		90	
		95		
10	500		100	

Der Luftwiderstand und damit die Bremswirkung hängt von der Form des fallenden (oder bewegten) Körpers ab; die Form mit dem geringsten Widerstand nennt man «Stromlinienform».

Gegenstand		Luftwiderstand
Ebene (Scheibe)		100%
Offene Halbkugel (Fallschirm)		122%
Vollkugel (runder Stein)		42%
Altes Luftschiff (Zeppelin)		11%
Stromlinien körper		5%

Fig. 1

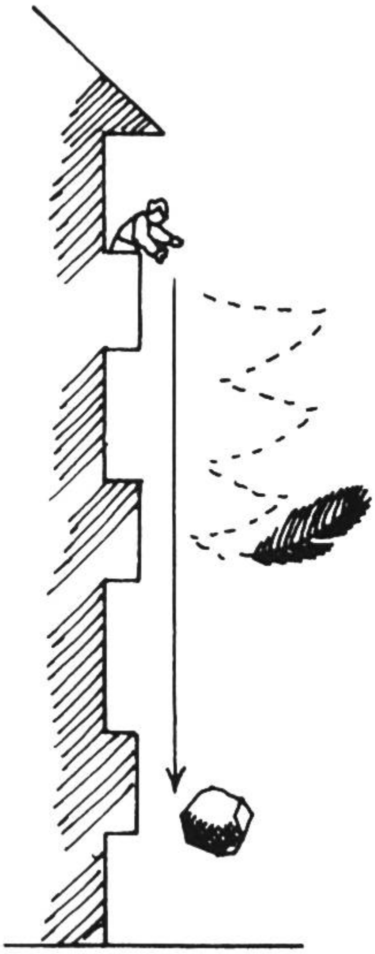
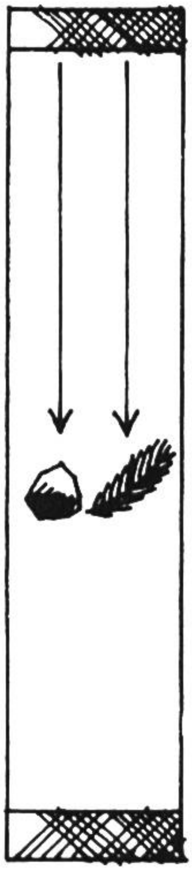


Fig. 2



Die Physiker geben uns dazu folgende exakten Gesetze:

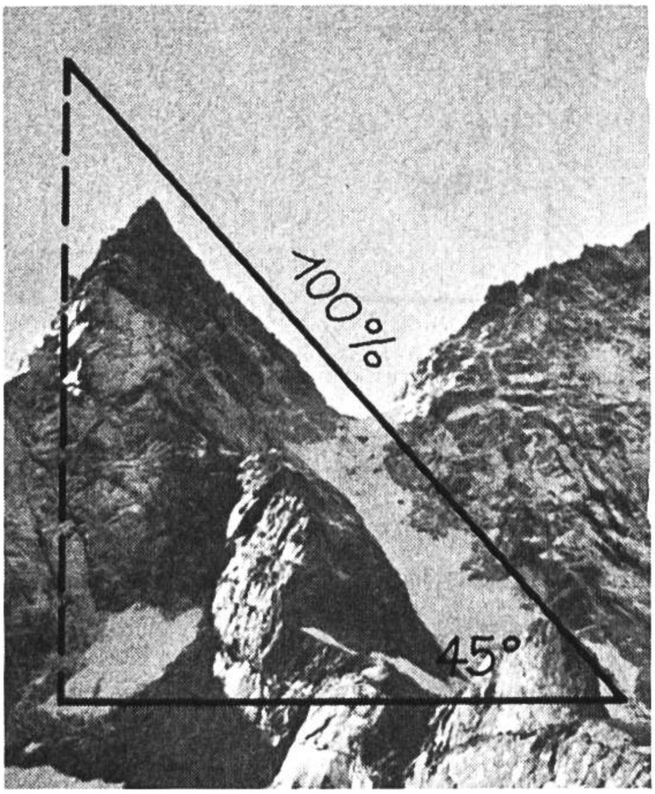
Wenn v die **Fallgeschwindigkeit** nach Ablauf der Zeit t Sekunden,
g die **Schwerebeschleunigung** $= 9{,}81\ m/s^2$,
h die **Fallhöhe** = in der Zeit t durchfallender Weg,
t die **Zeit,** die für den Fall benötigt wird,

dann gilt:

$h = \frac{v \cdot t}{2}$	$v = g \cdot t$
$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$	$v = 2 \cdot g \cdot h$

Dabei ist, wie gesagt, kein Luftwiderstand berücksichtigt. Im lufterfüllten Raum ist es anders. Das sehen wir am Fallschirmabspringer. Wenn er aus dem Flugzeug «aussteigt», wird seine Fallgeschwindigkeit zunächst grösser. Dann entfaltet er seinen Fallschirm. Wegen des viel grösseren Querschnittes des Fallschirms setzt er der Luft einen viel grösseren Widerstand entgegen. Die Widerstandskraft wird viermal grösser, wenn die Geschwindigkeit zweimal grösser wird, 9mal grösser, wenn die Geschwindigkeit 3mal grösser wird, usw. Wir sagen: Der Luftwiderstand wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Wenn nun die Fallgeschwindigkeit so gross geworden ist, dass die Widerstandskraft der Luft gleich der Erdanziehungskraft ist, so heben sich die beiden Kräfte auf, und die Fallgeschwindigkeit bleibt konstant (regelmässig). Unser Fallschirmspringer wird dann mit etwa 5 m/sec landen; wie wenn man 1,25 m frei herabspringt.

Steigung und Gefälle



Unter **Steigung** (oder in umgekehrter Richtung gesehen **Gefälle**) verstehen wir vorerst einmal den Höhenunterschied zweier Punkte im Gelände. Um uns die «Steilheit» vorstellen zu können oder verschiedene Steilheiten zu vergleichen, müssen wir den Höhenunterschied in ein Verhältnis zur waagrechten (horizontalen) Entfernung der beiden Punkte bringen. Wir können aber auch den Winkel zwischen der schrägen Verbindung der beiden Punkte und ihrer waagrechten Entfernung angeben. Die abgebildete Felspyramide hat eine Neigung von ziemlich genau 45° (bei der 360°-Winkelteilung) oder 50° bei der 400°-Winkelteilung. In % angegeben, beträgt die Neigung 100%, in Promille 1000‰.

Die Steigungsprozente bestimmen wir, indem wir den Höhenunterschied durch $^1/_{100}$ der horizontalen Entfernung teilen. Wenn wir Promille berechnen wollen, teilen wir den Höhenunterschied durch $^1/_{1000}$ der horizontalen Entfernung.

Beispiel: Ein Strassenstück – horizontal auf der Karte gemessen – ist 1100 m lang. Der Höhenunterschied beträgt 43 m. Die Steigung beträgt (durchschnittlich) 43 m : 11 m, also nicht ganz 4%.

Beispiel: Würden wir den höchsten Punkt der Schweiz (Dufourspitze, 4635 m ü. M.) mit dem tiefsten Punkt unseres Landes (Ufer des Lago Maggiore, 193 m) verbinden, ergäbe sich folgende Steigung: 4442 m Höhenunterschied: 66 m ($^1/_{1000}$ von rund 66 km) = (fast) 70‰, das ist gleichviel wie das steilste Stück der Berninabahn bei Brusio im Puschlav.

Einige Zahlenangaben: Unsere grossen Alpenpässe haben fast durchwegs eine maximale Steigung von 9–10%. Ein Schweizer Wohnwagengespann muss bei der Zulassungskontrolle bei 15% Steigung anfahren können. Flachlandstaaten haben da oft weniger strenge Vorschriften, und so bleibt denn dann und wann ein Meeruferanwohner in einer steilen Kurve hängen. – Das steilste Stück des Auslaufs einer Sprungschanze hat gegen 100% oder 45° Gefälle. Ein steiles Bergsträsschen bringt es bald einmal auf 20% oder zirka 11°. – Die Gotthardbahn überwindet die Steilrampe zwischen Amsteg und Göschenen mit durchschnittlich 24‰ Steigung; die Pilatusbahn, eine Zahnradbahn, weist im steilsten Stück das Zwanzigfache, nämlich 48% auf.

Die Anhaltestrecke

Bis ein Fahrzeug hält, geht zweimal Zeit verloren:

1. Der Fahrer muss die Gefahr erkennen, er muss überlegen und reagieren, und es vergeht erst noch Zeit, bis die Bremsen zu wirken beginnen. Das alles ergibt die sogenannte Reaktionszeit. Währenddessen legt das Fahrzeug ungebremst den **Reaktionsweg** zurück. Er beträgt etwa 3 m pro 10 km/Std. Geschwindigkeit, also z. B. 9 m bei 30 km/Std.

2. Der **Bremsweg** ist die Strecke, die das Fahrzeug vom Beginn der Bremswirkung bis zum Stillstand zurücklegt. Wir berechnen den Bremsweg bei nasser Strasse:

$$\text{Bremsweg} = \frac{\text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Geschwindigkeit}}{100}$$

in m	in km/Std.

Beispiel für 30 km/Std.: $\frac{30 \cdot 30}{100} = 9\text{ m}$

Die **Anhaltestrecke** setzt sich aus Reaktionsweg und Bremsweg zusammen; sie misst also z. B.

bei	20 km/Std.	6 m +	4 m =	10 m
bei	30 km/Std.	9 m +	9 m =	18 m
bei	40 km/Std.	12 m +	16 m =	28 m
bei	100 km/Std.	30 m +	100 m =	130 m

Die Anhaltestrecke wird kürzer auf trockener Strasse und wenn der Fahrer bremsbereit ist, sie wird länger auf verschneiter, vereister oder verschmutzter Fahrbahn, sie ist auch länger bei allen Zweiradfahrzeugen.

Der Überholungsweg siehe Seite 105.