

**Zeitschrift:** Prisma : illustrierte Monatsschrift für Natur, Forschung und Technik  
**Band:** 5 (1950)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Der geteilte Raum : die geometrischen Grundlagen der Teilung von Ebene und Raum  
**Autor:** Koch, August  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-653833>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DER GETEILTE RAUM

Die geometrischen Grundlagen der Teilung von Ebene und Raum

Von August Koch

Häufig stehen wir im praktischen Leben vor der Aufgabe, eine Ebene in viele gleiche Teile zu teilen oder einen Raum mit vielen gleichen Packungen auszufüllen. Es ist überaus anziehend, den geometrischen Grundlagen einer solchen Teilung nachzugehen. Dabei müssen wir hier von vornherein verzichten auf alle Formen mit einspringenden Ecken oder Kanten, Zacken u. dgl. und uns beschränken auf die Figuren mit hohlen Winkeln nebst Kreis und Kugel.

Die Ebene teilen wir ohne Schwierigkeit in gleiche Parallelogramme jeder Form. Wir brauchen nur die parallelen Seiten zu verlängern und zu den beiden Parallelenpaaren, die wir erhalten, in jeweils gleichen Abständen weitere Scharen von Parallelen ziehen. Nun kann jedes beliebige Dreieck als die Hälfte eines

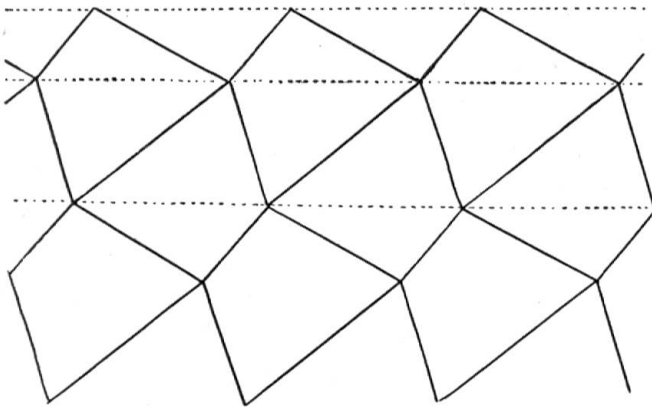


Abb. 1. Teilung der Ebene in unregelmäßige Vierecke

Parallelogrammes betrachtet werden. Es ergibt sich also der Satz, daß die Ebene in Parallelogramme und in Dreiecke jeder Form ohne Rest geteilt werden kann. Wie steht es aber mit unregelmäßigen Vierecken? Hier scheint die Sache nicht so einfach. Aber es zeigt sich, daß man auch mit gleichen unregelmäßigen Vierecken jeder Form die Ebene lückenlos ausfüllen kann (Abb. 1). Jedes Viereck kann durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt werden und jedes dieser Dreiecke fügt sich leicht mit seinesgleichen zu einem parallel begrenzten Bande zusammen. Man bekommt zweierlei Bänder, die abwechselnd aneinander gelegt, die Ebene ausfüllen, und es ist leicht, sie so zu ordnen, daß sich immer zwei Dreiecke zu dem gewünschten Viereck zusammenfinden. Es sind also auch gleiche Vierecke jeder Art für unseren Zweck brauchbar. Dies gilt nicht mehr für alle Fünfecke. Gerade das regelmäßige Fünfeck mit seinem Winkel von  $108^\circ$  läßt sich nicht verwenden, denn aus solchen Winkeln kann man nicht den vollen Winkel von  $360^\circ$  zusammenfügen. Wohl aber gelingt es mit manchen gleichen unregelmäßigen Fünfecken, die Ebene auszufüllen (Abb. 2). Das regelmäßige Sech-

eck mit seinen Winkeln von  $120^\circ$  macht uns die Aufgabe leicht und die Honigwabe zeigt uns in der Natur ein Beispiel von der Ausfüllung der Ebene durch diese Vielecke. Aber auch manches unregelmäßige Sechseck ist brauchbar. Damit sind wir aber schnell zu Ende gekommen. Vergeblich versuchen wir, die Ebene in irgendwelche gleiche Vielecke, regelmäßige oder unregelmäßige, von mehr als 6 Seiten ohne Rest zu teilen. Warum dies nicht möglich sei, läßt sich mathematisch beweisen:

Wir denken uns die Ebene unbegrenzt. Die Zahl der Vielecke sei  $Z$ , die Seitenzahl eines jeden  $n$ . Somit ist die Gesamtzahl der Ecken  $Zn$ . Nach einem bekannten Satz ist die Winkelsumme jedes Vieleckes  $2nR - 4R$ , die Gesamtsumme aller Winkel von  $Z$  Vielecken  $= ZR(2n - 4)$ . Wir nehmen nun an, daß sich an einigen Stellen  $Z(n - p)$  Ecken zu je  $360^\circ$  zusammenfinden, an anderen  $Zp$  zu je  $180^\circ$ , anliegend an eine Seite in Form etwa eines T. Im ersteren Fall benötigen wir mindestens 3 Ecken (oder mehr), im zweiten Falle mindestens 2 Ecken an jeder Stelle. An diesen Stellen müssen wir die ganze Winkelsumme unterbringen. Daraus ergibt sich folgende Gleichung bzw. Ungleichung:

$$ZR(2n - 4) \leq 4ZR \frac{n - p}{3} + 2ZR \frac{p}{2},$$

geordnet  $2n + p \leq 12$ .

Dieser Formel genügen nur die Seitenzahlen  $n = 3, 4, 5$  und  $6$ . Höhere Seitenzahlen sind nicht möglich. Außerdem ergibt sich, daß bei der Seiten-

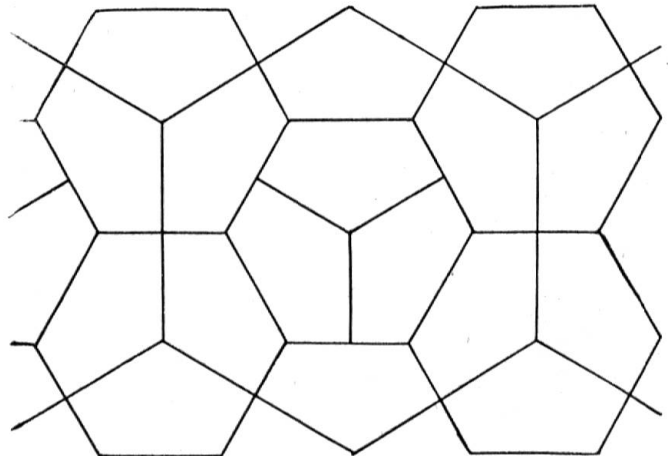


Abb. 2. Restlose Ausfüllung der Ebene mit gleichen, unregelmäßigen Fünfecken

zahl 6 an allen Stellen 3 Ecken sich zu  $360^\circ$  vereinigen müssen; Vereinigungen zu  $180^\circ$  können hier nicht vorkommen, denn nur der Wert 0 für  $p$  genügt der Gleichung.

Obige Formel gilt übrigens auch für den Fall, daß die Vielecke nicht alle gleich gestaltet sind, sofern sie nur die gleiche Seitenzahl haben. Wir wenden uns nun dem Kreise zu. Daß wir die Ebene mit gleichen Kreisen nicht lückenlos ausfüllen können, zeigt uns der Augenschein; dies stimmt auch mit der Auffassung des Kreises als eines Vieleckes mit unendlich vielen Seiten. Wie kann aber die Ebene möglichst ausgenützt werden?

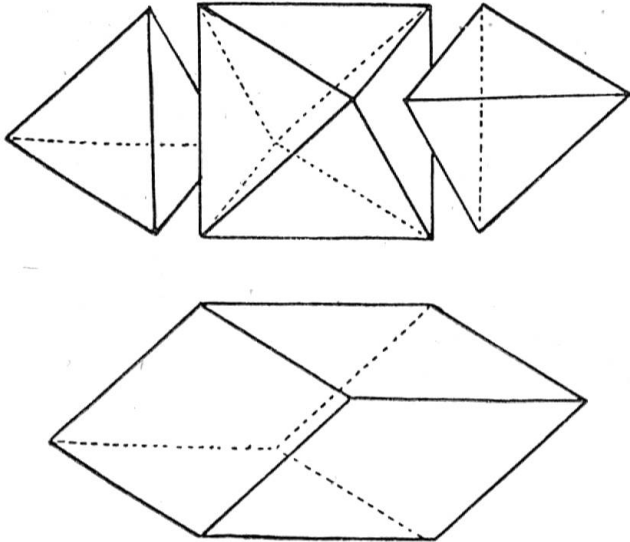


Abb. 3. Wenn man Oktaeder und Tetraeder zu einem Parallelepiped vereinigt, kann man damit den Raum füllen

Man kann die gleichen Kreise nicht dichter ordnen als so, daß sie einander berühren und ihre Mittelpunkte gleichseitige Dreiecke bilden. Die Ausnützung des Platzes beträgt dabei über 90% (bei quadratischer Anordnung nur rund 78%).

Wie die Ebene, so kann auch der körperliche Raum in verschiedener Weise in gleiche Teile geteilt werden. Wie dort das Parallelogramm, so bietet uns hier das Parallelepiped (das von 6 Parallelogrammen begrenzte vierseitige Prisma) eine bequeme Lösung dieser Aufgabe. Aber auch mit anderen drei- bis sechsseitigen gleichen Prismen gelingt sie, sofern die Durchschnitte derselben geeignet sind, die Ebene ohne Rest auszufüllen.

Mit besonderer Aufmerksamkeit wenden wir uns nun den 5 regulären Körpern — Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Pentagonal = Dodekaeder und Ikosaeder — zu. Aber unsere Erwartungen werden enttäuscht. Einzig der Würfel, der ja zu den Parallelepipeden gehört, ist imstande, mit seinesgleichen den Raum lückenlos zu füllen. Eine solche Ausfüllung ist eben nur möglich, wenn sich die Flächenwinkel der betreffenden Polyeder zu einem Winkel von  $360^\circ$  vereinigen lassen. Dieser Voraussetzung entspricht nur der Würfel mit seinem Flächenwinkel von  $90^\circ$ . Die entsprechenden Flächenwinkel des Tetraeders —  $70^\circ 31' 43''$  — des Oktaeders —  $109^\circ 28' 16''$  —, des Dodekaeders —  $116^\circ 33' 54''$  — des Ikosaeders —  $138^\circ 11' 22''$  — sind sämtlich unbrauchbar. Wir bemerken dabei, daß sich die Flächenwinkel des Tetraeders und des Oktaeders auf  $180^\circ$  er-

gänzen. (Die Differenz von  $1''$  geht auf Rechnung der Ungenauigkeit der letzten Stelle bei der logarithmischen Berechnung.) Wir stellen fest, daß es unmöglich ist, den Raum restlos in gleiche Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder oder Ikosaeder zu teilen; doch können wir ihn ausfüllen, wenn wir Tetraeder und Oktaeder gleichzeitig benutzen, und zwar auf je 1 Oktaeder 2 Tetraeder mit derselben Seitenlänge (Abb. 3). Neben den regulären Körpern erwähnen wir noch ein Polyeder, das streng genommen nicht zu jenen gehört, weil es nicht von regelmäßigen Vielecken, sondern von gleichen Rhomben begrenzt wird und zweierlei Ecken hat, aber alle Kanten sind gleich und — was ein besonderer Vorzug ist — alle Flächenwinkel betragen gleichermaßen  $120^\circ$ . Es ist das Rhomben-Dodekaeder (Abb. 4). Es verdient hier deswegen Beachtung, weil es, wie der Würfel, geeignet ist, den Raum ohne Lücke auszufüllen. Wir wollen annehmen, dies sei geschehen und jedem der gleichen Dodekaeder sei eine Kugel eingeschrieben, die alle 12 Flächen desselben in ihrem Mittelpunkte berührt. Dann ist dieser Raum mit gleichen Kugeln so dicht ausgefüllt, als dies überhaupt möglich ist, eine restlose Ausfüllung mit Kugeln läßt sich ja nicht erreichen. Bei der erwähnten Anordnung stößt jede Kugel überall dort, wo sie die Mittelpunkte der 12 Flächen berührt, mit einer benachbarten Kugel zusammen, sie ist also von 12 Kugeln umgeben, die sie alle berührt und die sich untereinander berühren. Eine nähere Betrachtung zeigt uns, daß die Mittelpunkte dieser 12 Kugeln an einigen Stellen als Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke, an anderen Stellen als Eckpunkte von Quadraten auftreten. Dies hängt zusammen mit einem wenig beachteten und doch sehr bemerkenswerten Umstand: Wenn gleiche Kugeln den Raum so dicht als möglich erfüllen, so sind die zwischen ihnen verbleibenden (unter sich netzartig zusammen-

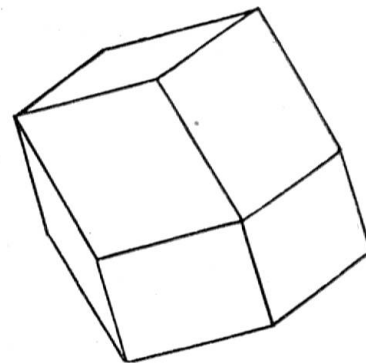


Abb. 4. Rhomben-Dodekaeder. Aus gleichen Körpern dieser Art kann ein Raum, ebenso wie mit Würfeln, restlos ausgefüllt werden

hängenden) Hohlräume nicht alle gleich geformt und gleich groß. An einigen Stellen werden sie von je 4 Kugeln in tetraedrischer Form, an anderen Stellen von 6 Kugeln in oktaedrischer Form eingeschlossen, und zwar entfallen auf je 1 oktaedrischen 2 tetraedrische Hohlräume.