

Das Möbiussche Band : ein Ding, das nur eine Seite hat

Autor(en): **Niklitschek, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Prisma : illustrierte Monatsschrift für Natur, Forschung und Technik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 9

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-654185>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Das Möbiussche Band

Ein Ding, das nur eine Seite hat

Eines der merkwürdigsten Modelle, das wir uns mit wenig Mühe in ein paar Augenblicken herstellen können und das uns überraschend tiefe Einblicke in eine sonst höchst unanschauliche Gedankenwelt vermittelt, ist das von dem namhaften deutschen Mathematiker Möbius erstmals bekanntgegebene, aus einem einfachen Papierstreifen bestehende und nach ihm benannte Band. Dieser, manchmal auch nach dem Mathematiker O. Simony benannte „tordierte“ Papierstreifen wurde in dem Artikel „Die andere Welt“ (Prisma 7/1950) als

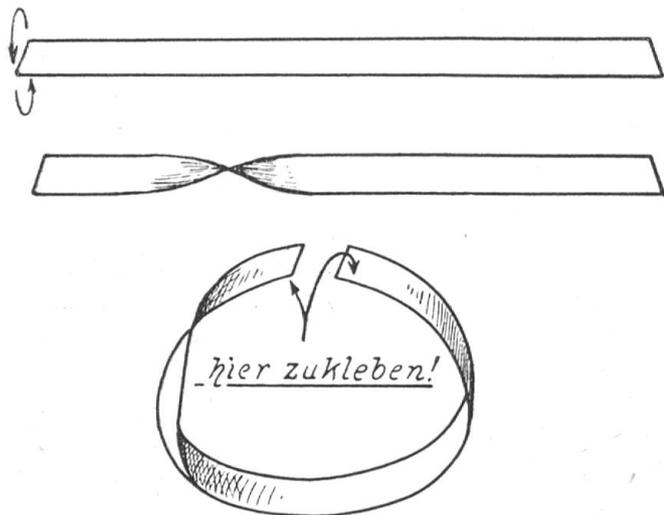


Abb. 1. So wird das Möbiussche Band zusammengeklebt

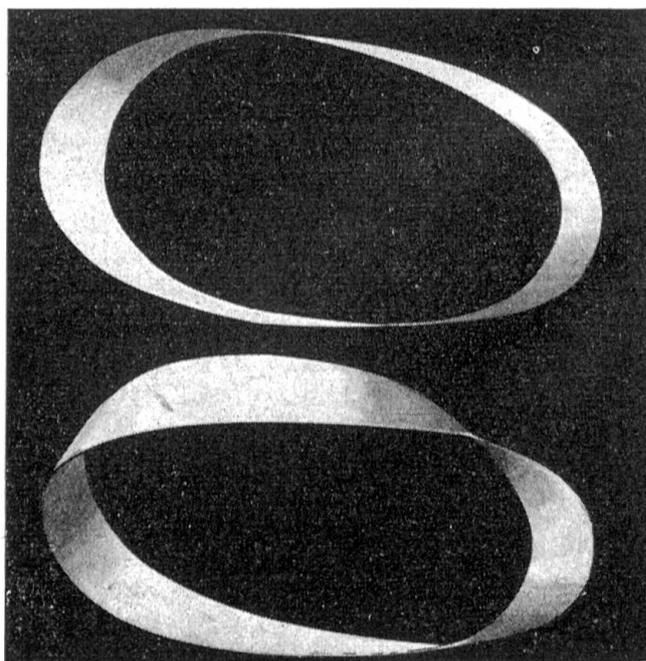
Beispiel für den „Vorstoß in die vierte Dimension“ angeführt. Zu seiner Herstellung brauchen wir nur einen Papierstreifen von etwa 60 bis 80 cm Länge und etwa 6 cm Breite. Kleben wir einen derartigen Streifen an den beiden Enden zusammen, so ergibt sich nichts Besonderes. Wir erhalten einen einfachen Papierring. Die Sache wird aber sogleich ganz anders, wenn wir vor dem Zusammenkleben ein Ende, aber wohl-gemerkt nur ein Ende, um 180 Grad verdrehen, so daß die ursprünglich auf dem Tisch aufgelegene Papier-seite jetzt dort oben liegt. Dann erst kleben wir die beiden Enden aneinander. Unsere Abbildungen 1 und 2 zeigen es, wie das gemeint ist. Es entsteht demnach kein einfacher Papierring mehr, sondern ein solcher, der eine eigenartige Verwindung aufweist. Was damit geschehen ist, klingt geradezu unwahrscheinlich.

Denken wir ein wenig nach und abstrahieren wir vom Körperlichen, das heißt, vernachlässigen wir die Dicke des Papiers vollständig. Damit fallen auch die in Wirklichkeit zwar vorhandenen, sehr schmalen Seiten-flächen aus unserer weiteren Betrachtung aus, und wir haben es also mit einem Ding zu tun, das eine nur obere und eine untere Seite — gehabt hat. Nämlich als noch nicht zusammengeklebter Ring.

Abb. 2. Ein einfacher Papierring (oben) und ein fertig-geklebtes Möbiussches Band (unten)

Jetzt aber, nach der Verwindung und dem Zu-sammenkleben, ist eine Seite voll-kommen verschwunden, wir können nicht mehr zwischen einer Ober- und Unterseite unter-scheiden, es gibt nur eine einzige Seite überhaupt! Der Beweis hierfür ist sehr einfach zu führen. Versucht man nämlich jetzt etwa eine einzige Seite allein mit einem Bleistift zu schraffieren oder anzufärben, so stellt es sich sogleich heraus, daß dies unmöglich ist. Die beiden scheinbar vorhandenen Flächen, die Oberseite und die Unterseite erweisen sich nämlich als identisch, eine Seite geht in die andere über, das heißt, es ist in Wirklichkeit tatsächlich nur eine einzige vorhanden!

Aus dieser Feststellung ergibt sich aber sogleich auch noch eine zweite, geradezu verblüffend unheimliche! — Wenn ich ein Papierstück (wieder als reine Fläche ohne Dicke aufgefaßt) durchschneiden will, also in zwei Stücke teilen will, muß ich unbedingt die obere und untere Fläche durchschneiden. Da das Möbiussche Band aber nur mehr eine einzige Fläche aufweist, muß es also auch unzerscheidbar, richtiger gesagt, unzer-teilbar sein. Und tatsächlich: Führt man einen Schnitt, wie es die Abbildung 3 zeigt, etwa entlang der Mittellinie des Bandes, so bleibt dieses unzerschnitten in einem Stück beisammen. Es wird nur länger! Aber damit ist aller Spuk um das so einfach anmutende Papierband noch lange nicht zu Ende! Denn schneidet man das jetzt etwa doppelt so lang gewordene Band neuerlich der Mittellinie entlang durch, so zerfällt es zwar in zwei Bänder, die aber in eigenartiger Weise, so etwa wie Kettenglieder, ineinander verschlungen sind (Abb. 4). Diese zwei neuen Bänder sind aber wieder in der Längsrichtung unzer-teilbar, d. h. werden beim Durchschneiden nur wieder länger, worauf



erst diese wieder zerschneidbar werden und so fort. Es ist kaum möglich, die tiefe Bedeutung der hier vorliegenden Verhältnisse in mathematischem Sinne genauer zu deuten, da wir zu weit ausholen müßten. Das Wenige, das verraten sein kann, wäre etwa fol-

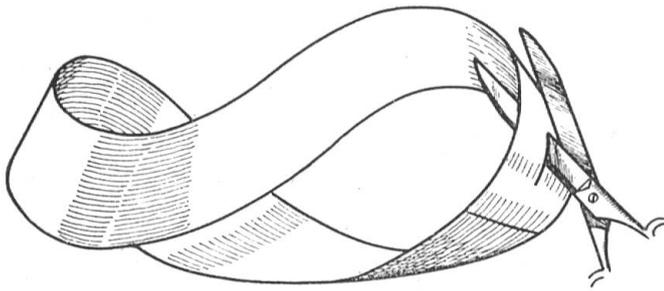
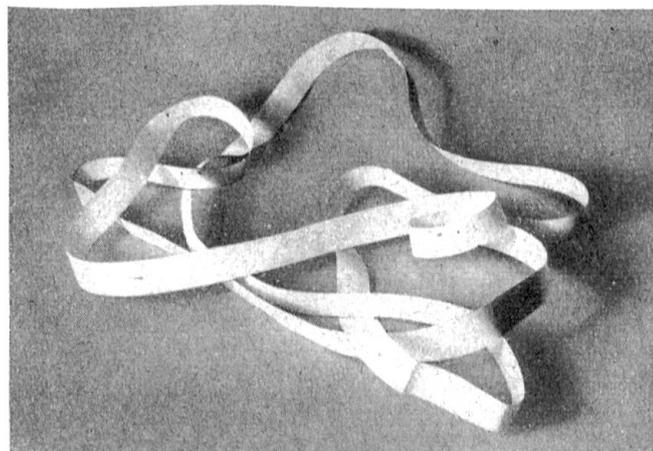


Abb. 3. Wie das Möbiussche Band der Länge nach durchgeschnitten wird

gendes: obgleich wir bekanntlich in einer dreidimensionalen Welt, einem dreidimensionalen Raum ($= R_3$) leben, können wir uns von einfacheren „Räumen“ doch sehr gute Modelle vorstellen. Legen wir vor uns ein Blatt Papier eben auf den Tisch, so haben wir das Modell eines begrenzten, allseits geraden zweidimensionalen Raumes, eines R_2 vor uns, wenn wir uns die Papierdicke wegdenken. Nun stellen wir uns noch „Flachwesen“ vor, die in so einem Räume zu leben gezwungen sind, die also in einer Ebene gemessen beliebig groß gedacht werden können, aber keine meßbare Dicke aufweisen. Etwa so ähnlich wie die bekannten Bücherskorpione (*Chelifer cancroides*), die zwischen den Seiten von Büchern hausen, aber natürlich auch noch eine meßbare Dicke aufweisen. Derartige „Flächler“ sind von Beltrami zum erstenmal erdacht worden. Für sie gibt es demnach kein „Oben“ und „Unten“ — in dem unendlich dünn gedachten R_2 fällt ja die Oberseite mit der Unterseite zusammen, sie kennen nur ein „Vorn“ und „Hinten“, ein „Rechts“ und ein „Links“. Das hat aber wieder schwerwiegende Folgen. So sind z. B. zwei gleichwinkelige und gleichseitige Dreiecke, die wir in unserem R_3 als kongruent bezeichnen und jederzeit zur Deckung bringen können, im R_2 im allgemeinen nicht kongruent, da wir sie durch einfaches Umklappen — dazu würde man ja den R_3 benötigen — nicht übereinanderlegen können (Abb. 5). Sie sind und bleiben dort genau so voneinander ver-



schieden wie etwa bei uns ein Handschuh für die rechte und die linke Hand!

So lange wir unseren ebenen, allseits gerade gedachten R annehmen, hat das weiter keine Bedeutung. Nun muß unser Papiermodell aber nicht unbedingt so gedacht werden. Es kann ja irgendwie verkrümmt, ja schließlich wie in unserem Möbius'schen Band in sich geschlossen sein. Was geschieht nun, wenn so ein „Flächler“ von einem Punkt seiner Welt ausgeht, die ganze Länge des Möbius'schen Bandes durchmißt und wieder zu seinem Ausgangsort zurückkehrt? — Denkt man das alles folgerichtig durch, so kommt man zu der geradezu bestürzenden Tatsache, daß der Flächler — *seitenverkehrt* wieder nach Hause gekommen ist. Was früher an ihm links war, ist jetzt rechts und umgekehrt! Oder mit anderen Worten: er hat sich „umgekehrt“. Da aber in der dickenlosen R_1 -Welt „Oben“ gleich „Unten“ ist, konnte sich diese Drehung nur an Rechts und Links bemerkbar machen, die auch miteinander vertauscht wurden.

Mathematisch genauer formuliert, ist also das Möbius'sche oder Simony'sche Band ein Modell eines

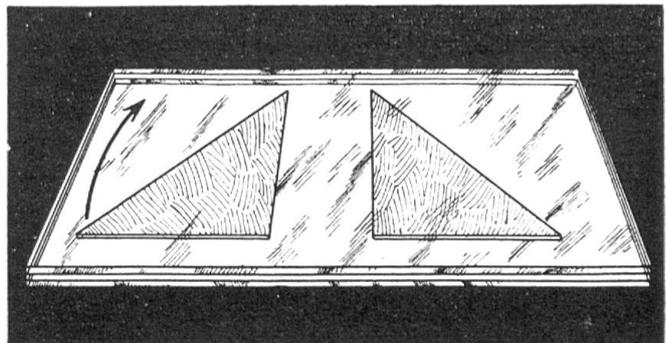


Abb. 5. In einem ebenen zweidimensionalen Raum, der hier durch den Raum zwischen zwei Glasplatten dargestellt wird, lassen sich zwei kongruente, aber mit den gleichen Winkeln nach verschiedenen Seiten weisende Dreiecke nicht zur Deckung bringen

gekrümmten zweidimensionalen Raumes ganz besonderer Art. Und zwar nennt man Räume mit derartigen Eigenschaften „nichtorientierbare Räume“. Natürlich sind auch derartige nichtorientierbare dreidimensionale Räume denkbar, d. h. mathematisch vorstellbar. Aber genau so wie das Möbius'sche Band, an sich ein R_2 , erst in der nächsthöheren Dimension, im R_3 hergestellt und eingebettet sein muß, so ist es auch notwendig, daß ein gekrümmter dreidimensionaler Raum in der nächsthöheren Dimension, also in einem R_4 entstanden und eingebettet sein muß. Freilich sind diese gedanklich ohne weiteres konstruierbaren Räume unserem Hirn, das streng dreidimensional orientiert ist, nicht vorstellbar, wie schließlich alles, was in Räume höherer Ordnung hinweist, und erstaunt muß man feststellen, wie wenig — nur ein passend zusammengeklebtes Stück Papier — notwendig ist, um uns an die Grenze unseres Vorstellungsvermögens zu bringen. *Ing. A. Niklitschek*

Abb. 4. Zwei ineinander verschlungene Bänder nach dem zweiten Schnitt