

De quoi les mathématiques traitent-elles?

Autor(en): **Delessert, André**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Revue de Théologie et de Philosophie**

Band (Jahr): **47 (1997)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-381554>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DE QUOI LES MATHÉMATIQUES TRAITENT-ELLES? *

ANDRÉ DELESSERT

Résumé

Les théorèmes de complétude et d'incomplétude de Gödel forment un tout. Ils éclairent la nature très complexe des êtres mathématiques, même de ceux qui passent pour élémentaires. L'image des mathématiques qui en résulte présente une analogie surprenante avec celle que dressait le philosophe Proclus au cinquième siècle de notre ère.

Préambule

Il n'existe pas de nom simple et commun pour désigner le domaine propre des mathématiques. Existe-t-il même un tel domaine? Ou bien les mathématiques ne sont-elles qu'un outil à usage variable, un langage au service des autres sciences et des techniques? Un essai de réponse a été donné par le philosophe et théologien Jean Duns Scot (~ 1266 - 1308) : les mathématiques seraient la «science des relations»¹. Certains estiment aujourd'hui encore que cette définition est bonne. On peut toutefois se demander de quelles relations elles traitent, ne serait-ce que pour distinguer le mathématicien du sociologue. Après quoi il faudrait encore préciser la nature de ces relations. Sont-elles réelles ou simplement rationnelles? Enfin la même question se poserait pour les objets – nombre, triangle, sphère – entrant dans ces relations.

Chose remarquable, les réponses les plus claires à notre question ont été données dans l'Antiquité grecque déjà. Elles sont de trois types. La conception platonicienne voit d'abord dans les êtres mathématiques des Idées, des Formes ou des Causes éternelles. Les mathématiciens en manipulent des images dégradées avec l'intention d'entrevoir les principes dont elles découlent. Pour Aristote, les êtres mathématiques sont obtenus par abstraction à partir des impressions sensibles. Enfin l'attitude que je qualifierai d'*eudoxienne* est celle du mathématicien qui ne s'embarrasse pas de telles ratiocinations et se contente

* Conférence présentée devant le groupe neuchâtelois de la Société romande de philosophie le 21 mai 1997.

¹ Pour plus de détails sur les vues de Duns Scot concernant les mathématiques, on peut se reporter à G. MARTIN, *Klassische Ontologie der Zahl*, Köln, Kölner Universitäts-Verlag, 1956.

d'établir des résultats mathématiques nouveaux et surprenants. A peu de choses près, ces trois conceptions ont traversé les siècles jusqu'à nous. Parmi ce «peu de choses», je mentionnerai l'opinion de saint Augustin. Il se situait dans la lignée platonicienne, mais il voyait dans la fermeté et la pérennité des relations arithmétiques la preuve de l'existence de Dieu, du Dieu personnel du christianisme. Plus tard, Thomas d'Aquin qui, sur le point considéré ici, se rangeait derrière Aristote, fondait malgré tout les êtres mathématiques dans la pensée divine. Pendant de nombreux siècles jusqu'à nos jours, les mathématiques ont été marquées par des considérations théologiques chrétiennes.

Les trois opinions classiques au sujet des objets mathématiques restent aujourd'hui fermement défendues. Les utilisateurs des mathématiques adoptent généralement la conception aristotélicienne. Les mathématiciens professionnels sont souvent eudoxiens, en paroles tout au moins. Certains d'entre eux vont proclamant que les interrogations sur la nature des êtres mathématiques ne sont que de «la bouillie pour les chats». Quant à ceux qui prêtent quelque réalité aux objets mathématiques, ils sont traités par les autres de «platoniciens», épithète fortement péjorative. Mais on observe aussi des tentatives d'apporter du neuf à la philosophie des mathématiques.

Relevons-en quelques-unes². Pour les uns, les objets mathématiques sont construits par les hommes. Ils ne sont donc ni incréés, ni abstraits. Pour d'autres, il n'y a pas d'objets mathématiques. Les mathématiciens ne s'occupent que de ce qui est possible. Pour d'autres encore, toute théorie mathématique est révisable. Aucun théorème n'est absolument vrai. La lecture des arguments présentés à l'appui de ces diverses thèses appelle deux remarques. Les principes sur lesquels elles s'appuient demanderaient à être discutés. Cela poserait généralement des problèmes au moins aussi graves et aussi difficiles que ceux que ces théories prétendent résoudre. Ainsi l'assertion «Tout ce qui est pratiquement réel peut ou doit être considéré comme objectivement réel» soulève de sérieuses interrogations sur une «réalité» susceptible d'être tantôt «pratique», tantôt «objective». Cette légèreté philosophique est confirmée par des assertions telles que : «Tous les objets mathématiques dont parle Platon sont abstraits.»³ Et une négligence semblable se manifeste à propos des théorèmes dits de Gödel. Ils sont assez souvent évoqués. Personne ne met en doute leur validité ni la justesse de leurs preuves. Mais ils sont rarement énoncés et ils sont souvent interprétés d'une manière simpliste. Le théorème de complétude est vu comme l'énoncé d'une banalité. Quant au théorème d'incomplétude, il est un peu bizarre, mais il ne paraît pas de nature à gêner les mathématiciens.

² Plusieurs de ces tentatives apparaissent dans l'ouvrage publié par TH. TYMOCZKO, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston, Birkhäuser, 1986.

³ Cf. N. D. GOODMAN, «Mathematics as an Objective Science», in TH. TYMOCZKO, p. 79-85.

Si divergents que soient ces divers discours, ils présentent une même lacune essentielle. Ils ne tiennent aucun compte des conséquences surprenantes des théorèmes de Gödel. Ce sont quelques-unes d'entre elles que je voudrais évoquer ici. Il faut pour cela rappeler très succinctement le contexte dans lequel ces théorèmes prennent leur sens.

La logique du premier ordre

La logique du premier ordre est une sorte d'algèbre jouant sur des agrégats de signes typographiques effectivement écrits. A titre d'exemple, considérons l'un de ces agrégats :

$$(\exists x ((R', "(x,c) \vee (R', "(c,x)) \rightarrow (\neg(x = c))))$$

Le premier signe est une ouverture de parenthèse. Le deuxième est le quantificateur existentiel qui se lit «... il existe un ... tel que...». x est un signe de variable individuelle. Il peut être muni d'un ou de plusieurs accents, de manière à former des symboles de variables distincts. $R', "$ est un symbole de relation binaire. Le premier accent sert à le numéroter. Les deux accents suivants, séparés du précédent par une virgule, indiquent que ce symbole de relation porte sur deux individus. Dans l'exemple considéré, ces individus sont x et c , c étant un symbole de constante individuelle. Les signes \vee , \rightarrow , \neg et $=$ sont des connecteurs lus respectivement «ou», «implique», «non» et «égale». Les quatre derniers signes $)$ sont des fermetures de parenthèses. L'exemple choisi fait apparaître un jeu complet de signes typographiques susceptibles d'intervenir dans les agrégats. On peut ajouter qu'*a priori*, il est dénué de toute signification.

Se donner un langage L , c'est choisir une collection de signes de constantes individuelles c , c' , c'' , ... et une collection de signes de relations. Des règles de formation propres à la logique du premier ordre déterminent des agrégats appelés *formules* de L . L'une de ces règles, qui est spécifique à la logique du premier ordre, exige que le quantificateur \exists soit nécessairement suivi d'un symbole de variable individuelle⁴. L'exemple ci-dessus est une formule dans un langage comportant au moins un symbole de constante c et deux symboles de relations binaires $R', "$ et $R', "$. Le quantificateur porte sur x , qui est alors dit *lié* dans notre formule. Celle-ci ne comporte pas de signe de variable non lié. En conséquence on l'appelle un *énoncé* dans L .

Les *axiomes logiques* du langage L sont des formules par lesquelles les connecteurs et le quantificateur reçoivent une interprétation naturelle qui justifie leur nom. Ainsi les axiomes de l'égalité traduisent les propriétés habituel-

⁴ Dans la logique du second ordre, un quantificateur peut porter sur un symbole individuel ou un symbole de relation.

les du signe =. Un *système formel du premier ordre* $L(S)$ est la donnée dans L d'une collection S de formules n'appartenant pas à la liste des axiomes logiques et appelées axiomes non logiques de $L(S)$.

Il est possible d'effectuer des déductions formelles dans $L(S)$. Il existe pour cela des règles d'*inférence* ou de *dérivation*. Le système de Hilbert comporte deux règles, celle dite de *modus ponens* et celle de *généralisation*⁵. Une *preuve* d'une formule B dans $L(S)$ est une suite effective de formules de L :

$$\{A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$$

où A_n coïncide avec la formule B , et telle que chacune d'elles soit ou bien un axiome (logique ou non) de $L(S)$, ou bien une formule qu'on peut inférer à partir de celles qui la précèdent dans la suite.

On appelle *théorie du premier ordre* tout système formel du premier ordre $L(S)$ comportant une formule sans preuve dans $L(S)$ ⁶. On dit alors que le système d'axiomes S et le système formel $L(S)$ sont *consistants*. Les énoncés d'une théorie qui admettent une preuve sont les *théorèmes* de cette théorie. Par la suite, nous nous bornerons à la logique du premier ordre et j'omettrai de le spécifier.

Il est souvent difficile d'établir qu'un système formel est consistant. Le *théorème de compacité* permet parfois de surmonter l'obstacle. Il s'énonce ainsi : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système formel $L(S)$ soit consistant est que toute partie finie de S soit consistante.*

Tout ce qui précède est purement formel. Autrement dit, il est possible de confier à une machine le soin de déterminer si un agrégat de signes est une formule dans L , si une suite de formules est une preuve dans $L(S)$ et de quoi elle est la preuve.

La notion d'*interprétation ensembliste* est faite pour donner un contenu sémantique aux formules d'un système formel $L(S)$. Soit E un ensemble non vide. Considérons une fonction J attachant à tout symbole de constante de L un élément de E et à tout symbole de relation de L à p arguments une partie non vide de E^p ⁷. Le couple (E, J) est une *interprétation* de L dans E . Les règles de formation des formules dans L sont telles que l'interprétation (E, J) peut s'étendre naturellement à toutes les formules de L . Chaque formule est alors traduite par l'assertion que certains éléments appartiennent à des ensembles

⁵ Selon la règle *modus ponens*, A et B étant des formules de L , des formules A et $(A \rightarrow B)$, on infère B . Selon la règle de généralisation, si x n'est pas un symbole de variable non lié dans la formule D , de $(C \rightarrow D)$, on infère $(\exists x C) \rightarrow D$.

⁶ Si le système $L(S)$ n'est pas consistant, il existe une preuve d'une «contradiction», c'est-à-dire d'une formule de la forme $(\neg(A \vee \neg(A)))$. Réciproquement l'existence d'une telle preuve dans $L(S)$ entraîne la non-consistance de $L(S)$. Par suite, la preuve d'une seule contradiction dans $L(S)$ entraîne l'existence des preuves de toutes les contradictions dans $L(S)$.

⁷ E^p est l'ensemble des p -uples d'éléments de E .

bien déterminés. Lorsque cette appartenance est réalisée, la formule considérée est *satisfaite* dans l'interprétation (E, J) . Un modèle ensembliste d'une théorie (L, S) est une interprétation (E, J) de (L, S) dans laquelle tous les axiomes de S sont satisfaits. Les règles d'inférence de Hilbert ont été choisies de manière que tous les théorèmes de (L, S) soient aussi satisfaits dans tout modèle ensembliste de (L, S) .

Le théorème de complétude de la logique du premier ordre

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de complétude. Il existe plusieurs manières de le démontrer, de sorte qu'il se présente comme un bouquet de propositions. Voici la première :

Proposition 1 : *Un système formel du premier ordre est une théorie si et seulement s'il possède un modèle ensembliste.*

La suffisance de cette condition est évidente. Sa nécessité est plus difficile à établir. L'un des procédés consiste à construire un ensemble modèle à partir de la collection des formules du système formel. Cette construction fait usage de la «théorie» des ensembles.

Proposition 2 : *L'énoncé T est un théorème dans la théorie (L, S) si et seulement s'il est satisfait dans tous les modèles ensemblistes de (L, S) .*

Les mathématiques classiques – l'ensemble des nombres naturels, la droite réelle, le plan euclidien, etc. – se présentent comme une collection de théories du premier ordre. La proposition 2 affirme donc que la logique du premier ordre est exactement celle dont les mathématiques (classiques) ont besoin. D'autre part, la condition formulée est un bon critère de validité pour les théorèmes du premier ordre. Elle est simple, naturelle et générale. Le fait qu'elle soit nécessaire et suffisante montre qu'en principe on pourrait faire l'économie des modèles ensemblistes. Le discours mathématique pourrait donc être entièrement formulé au moyen de la logique du premier ordre.

Énonçons un simple corollaire de la proposition 2 :

Proposition 3 : *Si l'énoncé A n'est pas un théorème dans la théorie $L(S)$, il existe un modèle de $L(S)$ où $(\text{non } A)$ est satisfait.*

Si on se bornait aux trois propositions précédentes, on pourrait conclure que tout va pour le mieux en mathématiques ; que tout ce qui y est vrai peut y être démontré ; qu'elles possèdent un langage parfait auquel elles pourraient

apparemment se réduire. Toutefois elles dissimulent des faits plus surprenants. Il suffit de remarquer qu'il existe un système formel du premier ordre pour les ensembles. Les mathématiciens utilisent généralement celui de Zermelo-Fraenkel, qu'ils désignent par (ZF) ⁸. Ils le considèrent évidemment comme consistant. Les ensembles dont ils se servent sont qualifiés de «naïfs». Ils constituent un modèle non ensembliste de (ZF) , comme le montre le fameux paradoxe de Russell. Toutefois, sous l'hypothèse que (ZF) est une théorie, la proposition 1 implique qu'elle admet en plus un modèle ensembliste. Nous voici en présence de deux modèles essentiellement distincts de la «théorie» des ensembles. Mais il y a plus grave.

La démonstration de la proposition 1 repose sur la construction d'un modèle ensembliste à partir de l'ensemble des formules d'un système formel $L(S)$. La grandeur du modèle ainsi construit dépend étroitement de la grandeur de l'ensemble des symboles propres – symboles de constantes et de relations – de $L(S)$. Cela se traduit par les propositions suivantes.

Proposition 4 : Lorsque l'ensemble des symboles propres d'une théorie est fini, cette théorie admet un modèle au plus dénombrable.

Autrement dit, les éléments du modèle considéré peuvent être numérotés par tout ou partie des nombres naturels. La «théorie» des ensembles (ZF) ne comporte que deux symboles propres : \emptyset , interprété comme l'ensemble vide, et \in , symbole de relation binaire traduit par l'appartenance d'un élément à un ensemble. Il en résulte que la «théorie» des ensembles admet un modèle dénombrable.

On peut adjoindre librement de nouveaux symboles de constantes ou de relations au langage L sans changer la consistance du système formel $L(S)$. Cela permet d'énoncer :

Proposition 5 : Lorsqu'une théorie admet un modèle infini de cardinal β , elle admet des modèles de cardinal arbitraire $\beta' > \beta$.

Donc lorsqu'une théorie admet un modèle infini, elle en admet une infinité d'autres, tous essentiellement différents⁹. Or cette situation est la plus fréquente en mathématiques, qu'il s'agisse des nombres naturels, des ensembles, des nombres réels, du plan et de l'espace euclidiens, etc. Ce phénomène heurte nos habitudes de pensée. Nous sommes prêts à nous représenter plusieurs plans

⁸ Voir, par exemple, P. J. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York, Benjamin, 1966.

⁹ Deux modèles d'une théorie sont équivalents lorsqu'il existe une correspondance biunivoque entre leurs éléments, correspondance qui respecte toutes les relations impliquées par les axiomes de la théorie. Ils sont essentiellement différents lorsqu'une telle correspondance n'existe pas. C'est le cas, en particulier, lorsque ces modèles n'ont pas le même cardinal.

euclidiens. Mais nous les voyons comme les copies fidèles les uns des autres. Il est difficile de croire qu'il puisse en exister deux qui soient essentiellement différents tout en possédant, chacun de son côté, les mêmes propriétés géométriques. Pourtant, tel est le cas. Et il n'existe aucun moyen logique d'améliorer la situation. Il est inutile d'espérer piéger un modèle infini unique en ajoutant de nouveaux axiomes à la théorie considérée. La proposition 5 s'appliquerait encore au nouveau système formel.

La proposition 5 admet encore un raffinement :

Proposition 6 : *Lorsqu'une théorie du premier ordre admet des modèles finis dont le nombre des éléments est aussi grand qu'on veut, elle admet un modèle infini.*

A titre d'exemple, prenons la théorie Gr des groupes. Par exemple, les rotations du plan qui transforment un carré en lui-même forment un groupe cyclique à quatre éléments. Les axiomes non logiques de Gr sont faciles à écrire. On enseigne cela à l'école. Ajoutons à ces axiomes toutes les propriétés des groupes finis, écrites comme formules dans le langage de Gr . La théorie obtenue a évidemment pour modèles les groupes cycliques à n éléments, n pouvant prendre n'importe quelle valeur naturelle non nulle. Elle possède donc un modèle infini. Autrement dit, *il est impossible de caractériser formellement et simplement la finitude en mathématiques*. Pourtant rien ne semble plus banal que d'affirmer d'une collection d'objets qu'elle est finie.

Une manière relativement simple de caractériser la finitude consiste à passer par la «théorie» des ensembles (ZF). Il faut alors utiliser en particulier l'axiome dit «de l'infini» et l'axiome dit «du choix»¹⁰. Ce dernier peut s'énoncer ainsi : soit E un ensemble non vide, dont les éléments sont des ensembles non vides $F_{i \in j}$; il existe une fonction f qui à tout ensemble F_i attache un élément de F_i . Autrement dit, f est une fonction qui choisit dans chaque ensemble F_i un élément de cet ensemble. Le contenu de cet axiome semble clair. Si E est l'ensemble des disques du plan euclidien, la fonction qui attache à chaque disque son centre est une telle fonction de choix. En revanche lorsqu'on prend pour E l'ensemble des parties non vides du plan, on ne sait

¹⁰ Dans ses grandes lignes, la méthode consiste à prendre un ensemble infini E , dont l'existence est garantie par l'«axiome de l'infini». E peut être muni d'un bon ordre, en vertu de l'«axiome du choix». E est bien ordonné s'il est totalement ordonné et que toute partie non vide de E a un premier élément. On peut alors montrer que l'ensemble bien ordonné E est isomorphe à un ordinal infini ϕ_E . Un ordinal ϕ est un ensemble bien ordonné par la relation d'appartenance \in et dont le plus petit élément est \emptyset . Les éléments de ϕ sont eux-mêmes des ordinaux. Si β est un ordinal, son *successeur* est la réunion de β et de l'ensemble à un seul élément $\{\beta\}$. Cet ensemble $\beta \cup \{\beta\}$ est aussi noté $\beta + 1$. Il existe beaucoup d'ordinaux qui ne sont pas de la forme $\beta + 1$. L'ensemble vide \emptyset en est un. Le plus petit ordinal distinct de \emptyset qui n'est le successeur d'aucun autre ordinal est désigné par ω . On qualifie alors de *fini* tout ensemble qu'on peut mettre en correspondance biunivoque avec un élément de ω .

pas définir une telle fonction. Pourtant cet axiome est indispensable en mathématiques, même pour caractériser des notions très simples, comme on vient de le voir. Mais son contenu est définitivement mystérieux.

En résumé, les propositions rangées sous le nom du théorème de complétude révèlent que les notions mathématiques considérées comme élémentaires sont d'une complexité essentielle.

Le théorème d'incomplétude

De nouveau il faut décrire le paysage mathématique et logique sur lequel se détache ce théorème. Les mathématiciens admettent que les nombres naturels forment un ensemble noté N et qu'il existe un système formel (L_N, S_N) permettant de décrire les propriétés classiques de N . Les axiomes de S_N s'obtiennent en formalisant les axiomes de Peano pour l'arithmétique. L'idée de Gödel est d'arithmétiser la logique du premier ordre, c'est-à-dire de traduire dans (L_N, S_N) les opérations formelles effectuées dans un système formel quelconque du premier ordre. Nous avons vu que toutes les formules d'un tel système formel sont des agrégats de signes typographiques. Ceux que nous avons choisis sont au nombre de douze. Numérotons-les arbitrairement et supposons que les numéros respectifs de x , $=$, $($ et $)$ sont 1, 3, 8, 9. La formule toute simple $F \equiv (x = x)$, par exemple, fait apparaître dans l'ordre les numéros 8, 1, 3, 1 et 9. Le *nombre de Gödel* $G(F)$ de F est défini par :

$$G(F) := 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^1 \cdot 11^9 = 1'440'491'680'032'000$$

où les numéros précédents figurent, dans l'ordre, en exposants des nombres premiers consécutifs à partir de 2. Il suffit de décomposer $G(F)$ en facteurs premiers pour retrouver, dans l'ordre, les numéros des signes typographiques, donc la formule F . Il est évident qu'on peut attacher un nombre de Gödel à toute suite effective de formules, en particulier à toute preuve.

La fonction arithmétique G a des propriétés intéressantes. Toutes les opérations formelles sur les formules d'un système formel – règles de formation, inférences, recherches des formules établies par des preuves données – peuvent se traduire en calculs effectifs sur leurs nombres de Gödel. Ces calculs sont qualifiés d'effectifs parce qu'ils peuvent être effectués entièrement à l'aide de fonctions arithmétiques particulières dites *fonctions récursives générales*. Il n'est pas utile d'en donner une définition ici. Disons simplement que ces fonctions peuvent être ramenées à des suites effectivement écrites d'opérations exposées dans le système formel (L_N, S_N) . Pour présenter ces descriptions, il convient d'adjoindre à L_N de nouveaux symboles de relations, livrant ainsi un nouveau langage A_N . En ajoutant à S_N les axiomes fixant les propriétés de ces nouveaux symboles, on obtient un système d'axiomes Σ_N . Les systèmes formels (L_N, S_N) et (A_N, S_N) sont équivalents. Ils sont consistants ou inconsistants

en même temps et, le cas échéant, ils ont les mêmes modèles. Les fonctions récursives jouent un rôle important dans l'étude des calculs mécaniques.

Le système formel de l'arithmétique comporte deux symboles de constantes, 0 et 1. On peut inférer de ses axiomes que $(\neg(0=1))$ ou, si on préfère, $(0 \neq 1)$. Il est donc équivalent de dire que (L_N, S_N) est inconsistant ou qu'on peut y prouver $(0=1)$. L'affirmation :

«Quel que soit n , n n'est pas le nombre de Gödel d'une preuve de $(0=1)$ dans (Λ_N, S_N) »

exprime que (Λ_N, Σ_N) – et par suite (L_N, S_N) – sont consistants. Ce qui précède permet de deviner que cette phrase peut être traduite par un énoncé dans Λ_N . On l'abrège parfois en «consis N ». L'existence dans un système formel d'une formule exprimant que ce système est consistant est un fait surprenant. C'est le point crucial de ce qui va suivre. Le théorème d'incomplétude de l'arithmétique peut alors s'énoncer ainsi :

Proposition 7 : Si le système formel (L_N, S_N) est consistant, il existe dans (Λ_N, Σ_N) des énoncés F tels qu'on ne puisse prouver ni F , ni $(\text{non } F)$ dans (Λ_N, Σ_N) . L'énoncé «consis N » en est un.

Donc, si le système formel du premier ordre (Λ_N, Σ_N) pour l'arithmétique est une théorie, il est impossible d'y prouver qu'il est consistant. Ce théorème a souvent été interprété – un peu hâtivement – comme une limitation essentielle, voire une faillite de la logique du premier ordre et, par suite, des mathématiques. L'impossibilité de prouver la consistance de (Λ_N, Σ_N) a été comprise comme une preuve de l'inconsistance de l'arithmétique. C'était oublier l'hypothèse même du théorème. Toutefois ce théorème marque l'échec du «programme de Hilbert» selon lequel la totalité des théories mathématiques, y compris les preuves de leur consistance, peut être formalisée dans la logique du premier ordre.

Nous avons noté qu'on peut faire apparaître un modèle des nombres naturels en utilisant la «théorie» des ensembles. Mais celle-ci est aussi victime d'un théorème d'incomplétude. En effet, la proposition 7 a été étendue à une classe très vaste de systèmes formels. La «théorie» des ensembles en fait partie. C'est pourquoi j'ai mis le mot de théorie entre guillemets dans ce cas. J'y renoncerais par la suite.

Dans le voisinage du théorème d'incomplétude, on peut mentionner un théorème résultant des travaux de Church et de Tarski, et exprimant *l'impossibilité de formaliser la vérité en arithmétique* :

Proposition 8 : Dans le système formel de l'arithmétique (L_N, S_N) , il n'existe pas de formule $H(n)$ comportant un symbole de variable n , telle que la condition « $H(t)$ est satisfaite dans (L_N, S_N) » soit nécessaire et suffisante pour que t égale le nombre de Gödel d'un théorème de (L_N, S_N) .

Autrement dit, il n'existe pas de programme permettant à un ordinateur de prouver et, par suite, de déceler les théorèmes de l'arithmétique ¹¹.

Quelques conséquences des théorèmes de Gödel

Il était utile de montrer que les propositions qui précèdent et qui vont être commentées sont des faits établis selon les principes et les procédures de la science mathématique. Ils sont donc irrévocables pour quiconque s'exprime sur les mathématiques. Les remarques que nous ferons sont d'un autre ordre. Mais elles sont étroitement liées à ces faits mathématiques.

Le formalisme du premier ordre est l'appareil convenant aux démonstrations mathématiques. Mais il ne permet pas d'établir l'existence de la totalité des nombres naturels, ni de caractériser simplement la finitude, à moins de passer par la théorie des ensembles dont la consistance, à son tour, n'est pas établie. Donc l'activité mathématique doit combiner la logique du premier ordre à quelque chose qui échappe à ce formalisme. Nous inspirant de Gödel, nous utiliserons le terme d'*intuition* ¹² pour désigner cet agent extra-logique. Symboliquement, j'écrirai :

$$\text{science mathématique} = \text{formalisme} \times \text{intuition}$$

Le membre de gauche ne comporte pas seulement le catalogue des faits mathématiques mais encore l'activité de recherche et d'invention des mathématiciens. Le membre de droite est un produit qui serait nul si l'un des facteurs était nul (ou absent). L'intuition ne doit pas être comprise comme un substitut fortuit de la raison. C'est, au contraire, une forme supérieure de l'intelligence. Elle comporte au moins trois composantes. La première est une série d'actes de foi : une confiance dans la cohérence de l'arithmétique, de la théorie des ensembles, y compris les axiomes de l'infini et du choix. La deuxième est la compréhension, c'est-à-dire la connaissance par participation immédiate aux objets mathématiques et non le simple enregistrement d'informations. Cette composante implique une troisième qui est le don de conjecture, autrement dit le pouvoir de prolonger le savoir par des hypothèses pertinentes et plausibles. C'est grâce à l'intuition que le mathématicien peut aller au-delà des

¹¹ Les énoncés de (L_N, S_N) peuvent être classés selon l'ordre croissant de leurs nombres de Gödel : A_0, A_1, A_2, \dots . Supposons qu'il existe un programme informatique permettant de calculer une preuve de A_r lorsque cet énoncé est un théorème et d'afficher 0 dans le cas contraire. L'ensemble fini des consignes données à l'ordinateur pourrait s'écrire comme une formule arithmétique $H(n)$ qui serait vérifiée lorsqu'on substitue à n le nombre de Gödel d'un théorème et dans ce cas seulement. Or la proposition 8 exprime qu'une telle formule n'existe pas.

¹² Le terme d'intuition qu'emploie Gödel désigne tout autre chose que celui qu'utilisent les intuitionnistes (ou constructivistes).

procédés mécaniques qui régissent la logique du premier ordre. C'est par elle que certains faits mathématiques indémontrables et inobservables dans le monde matériel – comme l'existence de la totalité des nombres naturels – sont intégrés à l'action mathématique.

Les théorèmes de Gödel font apparaître une autre notion. Considérons un modèle N des nombres naturels:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, 58, \dots\}$$

Convenons d'appeler *numéral* tout nombre de cette suite qu'il est possible d'écrire effectivement. 0, 1, 2, 3 sont manifestement des numéraux. Mais il est clair qu'il existe de très grands nombres naturels que personne ni aucune machine humaine ne peuvent écrire effectivement. Les numéraux figurent dans tous les modèles ensemblistes de l'arithmétique. Cependant la notion de numéral n'est pas mathématique. Les numéraux ne constituent pas en eux-mêmes un modèle. Ils ne forment même pas un ensemble. La science mathématique transcende le numéral puisqu'elle utilise pleinement la totalité des nombres naturels, des nombres réels, les axiomes des ensembles, etc. En revanche les formules et les preuves de la logique du premier ordre se déploient dans le numéral. Le formalisme et l'intuition composent donc, pour les mathématiques, un attelage dissymétrique.

C'est ce fait que le théorème d'incomplétude met en évidence. L'intuition nous informe que l'arithmétique est consistante. Le théorème d'incomplétude prouve qu'aucun numéral n'est le nombre de Gödel d'une preuve de cette consistance. Il mêle l'aspect infinitiste de l'arithmétique et l'aspect numéral de la logique du premier ordre. D'une part, il invoque les propriétés communes à tous les modèles ensemblistes de (L_N, S_N) ; de l'autre, il se restreint aux numéraux, c'est-à-dire à des éléments communs à tous les modèles ensemblistes de l'arithmétique. Ces éléments sont rares au sein de chaque modèle. Il n'est pas étonnant qu'on n'y trouve pas d'élément satisfaisant une formule arithmétique donnée. La proposition 3 nous donne la clé de ce paradoxe apparent. Puisque l'énoncé (non «consis N ») n'est pas un théorème dans (A_N, Σ_N) , il existe un modèle de (A_N, Σ_N) où sa négation, «consis N », est satisfaite. C'est ce qu'établit en substance un théorème de Gentzen. Le «nombre de Gödel» d'une preuve de «consis N » existe dans un modèle assez grand de l'arithmétique¹³. Naturellement il faut admettre pour cela des preuves de longueurs transfinies.

Le théorème d'incomplétude ne révèle donc pas une faille secrète des mathématiques. Il souligne le fait évident et connu dès l'origine que les preuves

¹³ La théorie des ordinaux permet d'étendre le procédé de l'induction mathématique aux ordinaux transfinis, c'est-à-dire aux ordinaux supérieurs à ω (voir note 11). On parle alors d'induction transfinie. Les ordinaux transfinis réalisent de «grands» modèles de l'arithmétique. Parallèlement, ils permettent de considérer des preuves de longueurs transfinies.

logiques ne se situent pas dans le même espace de pensée que les faits mathématiques auxquels elles correspondent.

Le théorème de complétude montre que chaque être mathématique se manifeste à plusieurs niveaux d'existence. Pour fixer les idées, prenons l'exemple de la sphère. A un niveau supérieur on voit apparaître la Sphère en elle-même. On en parle au singulier. On peut imaginer un «traité de la Sphère». C'est un archétype unique, distinct de la Droite, du Cercle, du Cube et de tous les autres êtres mathématiques exemplaires. Lorsqu'il était de bon ton de crier «A bas le triangle!», c'était le Triangle archétypique qui était visé¹⁴. A un niveau plus bas, la Sphère se manifeste dans les sphères du mathématicien. Dans un même espace euclidien, le géomètre peut considérer autant de sphères qu'il veut. Il peut même considérer plusieurs espaces euclidiens. Mais on a vu que l'Espace euclidien admet une infinité de modèles essentiellement différents. Il en est donc de même des sphères qui y sont incluses. Par un double engendrement, la Sphère principale se déploie dans l'univers du mathématicien. A un troisième niveau, on trouve les objets sphériques de la physique. Le physicien trouve intérêt à leur prêter la traduction de certaines propriétés des sphères géométriques. Elles peuvent être matérielles, comme des bulles de savon ou la surface de billes en acier. Elles peuvent aussi être abstraites du monde physique: une surface de potentiel constant autour d'une charge électrique considérée comme ponctuelle et seule dans l'espace physique est une sphère physique. Elle résulte de la combinaison de deux opérations: une abstraction à partir d'une situation physique et l'attribution opportune d'une étiquette empruntée à la géométrie. A un niveau inférieur encore, on rencontre les objets ronds fabriqués par l'artisan ou par l'artiste, dont on dit alors qu'il fait de l'art «géométrique».

Une analogie : le monde mathématique de Proclus

Proclus (Byzance, ~ 410 – Athènes, 485) est l'un des derniers grands philosophes néoplatoniciens. Son *Commentaire au premier livre des Eléments d'Euclide* est intéressant à plusieurs titres. D'après les spécialistes, c'est dans les prologues de ce texte qu'il expose avec le plus de clarté sa doctrine philosophique¹⁵. Il y témoigne aussi d'une expérience vécue de l'activité du

¹⁴ Les slogans «A bas le triangle!» et «A bas Euclide!» ont été lancés par le mathématicien bourbachique Jean Dieudonné, à plusieurs reprises, dans des colloques internationaux au cours des années soixante.

¹⁵ Voir, par exemple, PROCLUS, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, traduction, introduction et notes par G. R. Morrow, Princeton Univ. Press 1970, page lvi. Ou encore N. HARTMANN, «Principes philosophiques des mathématiques», in S. BRETON (éd.), *Philosophie et mathématique chez Proclus*, Paris, Beauchesne, 1969, p. 187.

mathématicien. Essayons de dresser schématiquement un tableau de l'univers proclusien.

La description de Proclus évoque l'image d'une pyramide. Au sommet figure l'Un, principe de toute chose. Par une sorte de générosité surabondante, l'Un engendre des êtres. A leur tour, héritant de cet élan, ceux-ci engendrent d'autres êtres de proche en proche. Cette cascade descendante est la procession. Les premiers principes issus de l'Un sont l'Être, l'Intelligence première et le Vivant-en-soi. Chez les néo-platoniciens, ces hypostases sont les trois aspects d'un même être que Proclus appelle $\nu\omicron\upsilon\varsigma$ ou Intellect. La connaissance propre à l'Intellect est celle de l'être en tant qu'être. Elle est dite noétique et elle est non discursive. Au bas de la pyramide se trouve le domaine des choses sensibles, perçues par les sens et donnant naissance aux opinions. Le domaine intermédiaire, procédant directement de l'Intellect, est le monde des mathématiques, domaine de la dianoétique ou connaissance discursive.

La mission du sage, du philosophe, est de s'attacher à la conversion qui est le mouvement inverse de la procession. Son but est de découvrir dans les choses les principes dont elles procèdent et de prendre conscience qu'elles sont toutes des images plus ou moins distantes de l'Un. Proclus adopte la doctrine des Idées éternelles et immuables. Elles sont situées dans l'Intellect. Parmi elles se trouvent les archétypes des êtres mathématiques, les Idées-nombres, l'Idée-sphère par exemple. Selon la procession, chaque Idée mathématique se déroule, se déploie en une multiplicité illimitée d'images sur lesquelles peut opérer le mathématicien.

Proclus attribue à la pensée consciente – à l'âme – le passage de l'Idée unique à la multiplicité de ses manifestations dans le monde dianoétique. Il compare l'âme à une tablette de cire doublement écrite. Le contenu de l'Intellect est copié dans l'âme sous la présidence de l'Intellect et par le mouvement propre de l'âme. Mais dans l'Intellect les êtres sont à l'état de paradigmes, en concentration et sous forme non discursive. Dans l'âme, ils sont à l'état d'images, accessibles à la connaissance discursive. Les nombres, par exemple, y sont encore à l'état de prototypes. Ils ne sont pas des pluralités d'unités. Les figures – le Triangle, la Sphère – n'y ont pas d'extension, pas de grandeur. Mais ils sont vivants et automoteurs comme l'âme elle-même. La pensée les dégage alors et les déploie, donnant naissance aux divers objets dont traite le mathématicien, par la dianoia ou pensée discursive. Toutefois, l'objectif du mathématicien est de mieux connaître, au-delà du discours, les Idées dont ces objets procèdent.

L'âme peut projeter sa connaissance des êtres mathématiques dans le monde des sensibles. Elle donne ainsi naissance aux mathématiques appliquées : mécanique, astronomie, canonique, optique, etc. Mais Proclus exclut l'origine sensible des êtres mathématiques. Où, dans le sensible, voyons-nous des choses sans épaisseur, sans profondeur? demande-t-il. Bien au contraire, l'étude des choses sensibles conduit à des connaissances dispersées et hétérogènes. Les données de nos sens distraient notre esprit de son besoin de

retrouver l'unité située au-dessus des choses divisées. Il y a là un obstacle important sur la voie de la conversion. A la manière de Platon, Proclus le surmonte en recourant à la notion de *réminiscence*. Les impressions de nos sens éveillent dans l'âme un souvenir des principes éloignés qui les précèdent dans la descente. Cette part de l'âme qui se souvient a son essence dans les Idées mathématiques. Elle en a une connaissance immédiate, même si elle ne s'en sert pas. Lorsqu'elle se libère des entraves que constitue l'afflux des données sensorielles, elle s'éveille et devient attentive à elle-même. Cet éveil met la pensée en marche dans la bonne direction, vers le haut, vers la contemplation de l'Être.

Ce survol trop rapide met cependant en relief le rôle majeur que Proclus impartit aux mathématiques dans la quête du philosophe. Il nous montre aussi quelques convergences entre sa représentation du monde mathématique et certaines conséquences des théorèmes de Gödel.

Pour Proclus, les êtres mathématiques ne sont pas les produits de l'abstraction opérant sur des données sensibles. De même, nous savons aujourd'hui que l'infini est une notion première en mathématiques. Elle précède la notion de finitude et il est impossible d'en faire l'économie. Mais elle ne saurait résulter d'aucune observation physique. Il en est de même de la finitude, notion complexe qui outrepassa la notion non mathématique de numéral. Quant à l'axiome du choix, non seulement aucune expérience physique ne permet de le justifier, mais dans la plupart des cas où il est indispensable, aucune procédure mathématique n'est en mesure de déterminer la fonction de choix recherchée.

Pour Proclus, les Idées mathématiques sont éternelles, donc hors du temps. Elles ne sauraient être des créations de l'homme. Qu'en est-il en mathématiques post-gödéliennes? Le verbe «créer» est souvent confus. Le grand mathématicien Dedekind considère les nombres naturels comme «une libre création de l'esprit humain»¹⁶. Pour l'établir, il part de l'idée de «chaîne». Il l'introduit en considérant un ensemble non vide E et une application $f : E \rightarrow E$. Une partie non vide K de E est une chaîne si $F(K)$ est inclus dans K . Il introduit la suite S des ensembles $K, f(K), f(f(K)), f(f(f(K))), \dots$ qui le conduit, après quelques développements, à l'ensemble N des nombres naturels. Mais on constate que, dans cette démarche, N est sous-jacent à la construction de Σ . Dedekind n'a fait que donner un autre nom à une notion qui préexistait dans sa pensée. D'autre part le théorème d'incomplétude implique que Dedekind ne pouvait pas prouver que sa construction fournissait un modèle ensembliste de l'arithmétique. Le théorème de complétude nous dit en outre que cette construction ne saurait fournir un modèle essentiellement unique des nombres naturels, à moins qu'elle ne s'appuie sur un tel modèle donné à l'avance. L'exemple de Dedekind montre quelle prudence il faut observer à l'égard de

¹⁶ Cf. préface de la première édition de l'ouvrage de R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, 1888.

la «construction» par l'esprit humain d'un être mathématique aussi élémentaire que le nombre naturel. D'ailleurs l'axiome du choix est manifestement l'aveu qu'il existe des objets mathématiques que la pensée discursive est incapable de créer.

Le théorème de complétude de Gödel fait apparaître, pour chaque être mathématique caractérisé par une théorie du premier ordre ayant des modèles infinis, une disposition pyramidale qu'on retrouve chez Proclus. C'est cette analogie qui justifie le rapprochement qui est fait ici. Cette ressemblance n'est pas entièrement fortuite, parce qu'il s'agit dans les deux cas des mêmes objets. Il serait toutefois téméraire de voir en Proclus un précurseur de Gödel. Une considérable différence d'échelle sépare les connaissances mathématiques du V^e siècle de celles du XX^e. Mais les précautions et la lucidité de Proclus quand il parle des choses de la pensée – l'exemple de Dedekind nous les rend plus sensibles – nous autorisent à tirer parti de l'analogie observée.

Pour Proclus le domaine mathématique est à cheval sur le noétique et le dianoétique, sur la compréhension non discursive et l'intelligence discursive. Dans le couple gödelien formalisme–intuition, le formalisme se situe au niveau discursif. Mais l'intuition est à cheval sur le discursif et le non-discursif. Elle opère déjà dans le formalisme. Mais son action porte plus haut, sur la représentation que la pensée se donne des êtres mathématiques et, plus haut encore, sur les choses dont ces représentations livrent des images. Nous sommes là dans un domaine qui échappe au discours, bien qu'il préside à la recherche et à l'invention mathématiques.

Il convient aussi de relever au moins deux discordances entre les mathématiques de Proclus et les mathématiques post-gödeliennes. La première réside dans la complexité des systèmes de modèles d'un même être mathématique. Proclus ne pouvait pas imaginer l'infinie diversité des modèles de l'espace euclidien, par exemple, encore que sa doctrine ne l'exclut pas. Une autre discordance apparaît quand on constate le rôle que Proclus attribue aux mathématiques. Elles sont pour lui une sorte de propédeutique à la théologie sur la voie de la conversion. Il serait imprudent d'en dire autant des mathématiques d'aujourd'hui.

Conclusion

Ce qui précède ne répond que très imparfaitement à la question posée par le titre de cet exposé. Cette question semble appeler une caractérisation nette de la nature des êtres mathématiques, tout au moins de ceux qui se présentent comme les plus élémentaires. Or, bien que chacun d'eux soit identifiable, autonome et consistant, il se réalise à une infinité de niveaux essentiellement différents. De plus, entre les manifestations concrètes de certaines notions – par exemple la finitude, l'ensemble, la sphère – et les êtres mathématiques qu'elles désignent, il existe une frontière invisible mais infranchissable. La

«caractérisation nette» des objets mathématiques exige donc un autre discours que celui qui convient aux objets des sciences naturelles. Pour en arriver là, nous nous sommes appuyés sur quelques faits incontestables qui limitent la fantaisie de ceux qui s'expriment sur la nature des êtres mathématiques. Ainsi, parmi les auteurs qui prétendent apporter du nouveau en philosophie mathématique, certains reprennent à leur compte des préceptes qui ont prévalu pendant des siècles :

- *Il faut évacuer toute «mystique» des mathématiques.*
- *Il faut maintenir une continuité absolue entre les mathématiques et la physique.*

De tels auteurs considèrent comme «réel» uniquement ce qui est directement ou indirectement perceptible par les sens et qui peut être localisé dans l'espace physique. Est qualifié par eux de «mystique» tout ce qui n'est pas réel au sens précédent. Ces deux injonctions n'en forment peut-être qu'une seule. Quoi qu'il en soit, les travaux de Gödel montrent que toutes deux ignorent la nature des mathématiques.

On peut dire les choses autrement. Les mathématiques d'aujourd'hui enseignent d'une manière positive ce que les Anciens avaient compris à leur façon. A savoir que les êtres mathématiques se déploient dans une réalité incorporelle, de l'ordre de la pensée et même de la pensée non discursive. Ils en démontrent l'existence et ils font voir que les lois qui régissent cette réalité diffèrent fondamentalement de celles qui nous permettent de décrire la réalité matérielle. Cette assertion est sans doute banale pour un philosophe. Mais il est intéressant de constater qu'elle émane de celle qui passe pour la petite servante des sciences naturelles et techniques.