Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer
Herausgeber: A. Waldner
Band: 12/13 (1880)
Heft: 14

Artikel: Beitrag zur Bogentheorie
Autor: Göbel, J.B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8617

Beitrag zur Bogentheorie.

Von Dr. *J. B. Gœbel*, Ingenieur der hessischen Ludwigs-Eisenbahn in Mainz.

(Fortsetzung.)

9. Auch die Ordinaten der Momentancentra $(0, n)\, n$ (das Symbol ist hier wieder in seiner gewöhnlichen Bedeutung aufzufassen) können mittelst der leicht nachweisbaren [Gl. (5) und (6)] Formel erhalten werden

$$(15) \qquad y_{(0,n)\,n} = \frac{-y_n + 3 \sum_{i=1}^{i=n} [2(n-i)+1](y_{i-1} + y_i)}{6\, n^2}$$

Da wir jedoch hier vorzugsweise die graphische Behandlungsweise unserer Aufgabe im Auge haben, so soll nunmehr eine Methode erläutert werden, wie mit Hülfe des als gegeben zu betrachtenden Momentancentrums $(0, n-1)\, n-1$ das Momentancentrum $(0, n)\, n$ graphisch ermittelt werden kann. Durch Anwendung derselben können dann, da das Momentancentrum $(0, 1)\, 1$ unmittelbar bekannt ist (§ 5), die übrigen Momentancentra $(0, n)\, n$ ebenfalls angegeben werden.

Als bekannt kann das leicht auffindbare (§§ 7 u. 10) Momentancentrum $(0, n)^*$ vorausgesetzt werden, welches wir kürzer mit M_n bezeichnen wollen. Ferner sind von vorneherein die Verticalen $\left(x = \frac{\lambda n}{3} \text{ und } x = \frac{\lambda(n-1)}{3}\right)$ gegeben, auf welchen die Momentancentra $(0, n)\, n$ und $(0, n-1)\, n-1$ liegen (§ 5). Die letzteren sollen abkürzungsweise als C_n und C_{n-1} bezeichnet werden.

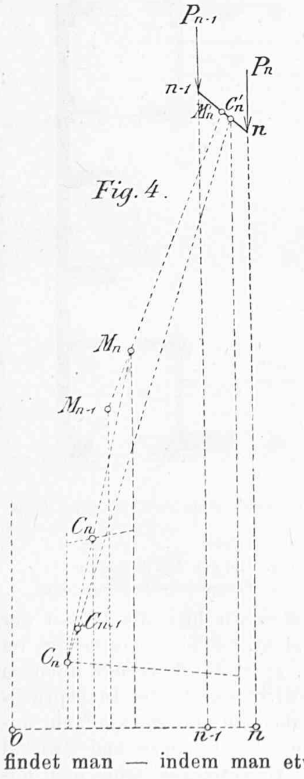


Fig. 4.

In Fig. 4 ist der Punkt 0 als „linker Bogenendpunkt" zu betrachten. Es wurde dort nicht das ganze Bogenstück $(0, n)$, sondern nur die Polygonseite $(n-1, n)$, deren Lage bei dieser Untersuchung allein von Interesse ist, gezeichnet, und zwar ist $(n-1, n)$ als „fünfte Polygonseite" gewählt.

Von Wichtigkeit ist nun die Ermittelung des Momentancentrums $(0, n)\, n-1$, welches mit C_n^* bezeichnet werden soll. Die Rotation $(0, n)\, n-1$ setzt sich offenbar zusammen aus den Rotationen $(0, n-1)\, n-1$ und $(n-1, n)\, n-1$.

Das Momentancentrum $(n-1, n)\, n-1$, welches wir mit C'_n bezeichnen, liegt auf der Verticalen

$$x = \lambda n - \frac{\lambda}{3} = \frac{\lambda}{3}(3n-1)$$

(§ 5). Die (horizontal gemessene) Entfernung der Momentancentra C_{n-1} und C'_n ist $\frac{2}{3} n$. Bezeichnet nun $C_{n-1}\, C_n^*$ den horizontal gemessenen Abstand des Momentancentrums C_n^* von C_{n-1}, so findet man — indem man etwa bezüglich der Verticalen C_{n-1} das Moment der Rotation $(0, n)\, n-1$ gleich der Summe der Momente der Rotationen $(0, n-1)\, n-1$ und $(n-1, n)\, n-1$ setzt — unter Berücksichtigung, dass die Amplituden der drei Rotationen den Zahlen $(n-1)^2 - 1$, $(n-1)^2$ und -1 resp. proportional sind,

$$(16) \qquad C_{n-1}\, C_n^* = -\frac{2\lambda}{3(n-2)}$$

Setzt man $\lambda = 1$, so erhält man für

$n =$	2	3	4	5	6	7	8
$C_n^*\, C_{n-1} =$	∞	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{9}$

In ähnlicher Weise ergibt sich auch die Relation

$$(17 \qquad \frac{C_{n-1}\, C_n^*}{C'_n\, C_n^*} = \frac{1}{(n-1)^2}$$

Ferner ist, da (der Horizontalabstand)

$$C_n^*\, C_n = C_n^*\, C_{n-1} + C_{n-1}\, C_n = \frac{2\lambda}{3(n-2)} + \frac{\lambda}{3}$$

$$C_n^*\, C_n = \frac{n\lambda}{3(n-2)}$$

Da nun offenbar $C_n\, M_n = \frac{\lambda n}{6}$ so ergibt sich schliesslich

$$(18) \qquad \frac{C_n\, M_n}{C_n^*\, C_n'} = \frac{n-2}{2}$$

Es erübrigt noch zu zeigen, wie mit Hülfe der so gewonnenen Relationen bei gegebenem Punkt C_{n-1} der Punkt C_n^* und mit diesem der Punkt C_n graphisch sehr genau bestimmt werden kann. Für das Beispiel unserer Figur ist, wie erwähnt, $n = 5$, $C_{n-1}\, C_n^*$ also gleich $-\frac{2}{9}\lambda$ zu setzen, d. h. der Punkt C_n^* liegt auf einer Verticalen, deren Abstand von der Verticalen C_{n-1} (im Sinne der abnehmenden Abscissen von C_{n-1} aus gemessen) $^2/_9$ der Längeneinheit beträgt. Ausserdem muss C_n^* auf der Verbindungslinie der Momentancentra C_{n-1} und C_n (der componirenden Rotationen) liegen, ist also bereits bestimmt.

Es kommt nun zuweilen vor, dass, wie in Fig. 4, die Gerade $C_{n-1}\, C_n'$ und die durch C_n^* gehende Verticale sich unter sehr schiefen Winkeln schneiden. Für diesen Fall dient uns die Relation (17). Trägt man etwa vom Punkte C_{n-1} aus vertical abwärts eine passend zu wählende Strecke auf (in der Figur misst diese Strecke 5 *mm*), so ist vom Punkte C_n' aus vertical abwärts das $(n-1)^2$ fache jener Strecke (in der Figur 80 *mm*) aufzutragen. Die Verbindungslinie der so auf den durch C_{n-1}, resp. C_n' gehenden Verticalen erhaltenen Punkte muss durch C_n^* gehen.

Die Verbindungslinie der Punkte C_n^* und M_n schneidet nunmehr die Verticale $x = \frac{\lambda n}{3}$ in dem gesuchten Punkte C_n. Zu allenfalls erforderlicher genauerer Bestimmung kann hier die Relation (18) benutzt werden.

Das Maass des Abstandes $C_{n-1}\, C_n^*$ nimmt mit wachsendem n ziemlich rasch ab. In vielen Fällen wird demnach der Punkt C_n^* sehr bald mit dem Punkte C_{n-1} verwechselt werden können. Die Zwischenconstruction des Punktes C_n^* wird dann nur noch als Genauigkeitscontrole zu dienen haben.

10. Dass ein ganz ähnliches, noch einfacheres Verfahren zur Bestimmung des Momentancentrums M_n bei gegebenem Momentancentrum M_{n-1} (d. h. $(0, n-1)^*$) angewandt werden kann, ist ersichtlich. Die Verbindungslinie des Punktes M_{n-1} (Fig. 4) mit dem Mittelpunkt M_n' der $n$ten Polygonseite schneidet die Verticale $x = \frac{\lambda n}{2}$ im Punkte M_n. Es verhalten sich dabei die Abstände

$$\frac{M_{n-1}\, M_n}{M_n\, M_n'} = \frac{1}{n-1}$$

Den Ausgangspunkt der Construction bildet hier offenbar das unmittelbar bekannte Momentancentrum $(0,1)^*$.

11. Mittelst des Vorhergehenden können einerseits die den einzelnen Belastungen P zugehörigen Momentancentra $(0, n)\ n$ bestimmt, andererseits genügende Anhaltspunkte gewonnen werden, um das Polarsystem $(0{,}2\ m)$, in welchem jenen Momentancentra $(0, n)\ n$ die Richtungslinien der betreffenden Widerlagerreactionen entsprechen, bei der weiteren constructiven Behandlungsweise benützen zu können. Die Aufgabe ist hiermit eigentlich auf eine rein geometrische Aufgabe zweiten Grades zurückgeführt, deren Lösung nunmehr noch zu besprechen wäre.

In einem Polarsystem sind bekanntlich unendlich viele Polardreiecke enthalten (Vergl. v. Staudt, Geom. d. Lage 236). Seien A, B, C die Eckpunkte, also BC, CA und AB die denselben entsprechenden, gegenüberliegenden Seiten eines solchen Polardreiecks. Den sämmtlichen Punkten $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ einer Seite, z. B. AB, des Polardreiecks, welche aus dem gegenüberliegenden Eckpunkt, also aus C, durch die Strahlen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ projicirt seien, entsprechen gewisse durch C gehende Geraden q_1', q_2', q_3', welche die Seite AB in den — den Strahlen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ entsprechenden — Punkten $Q_1', Q_2', Q_3' \ldots$ schneiden. Die Punktreihen $(Q_1, Q_2, Q_3 \ldots)$ und $(Q_1', Q_2', Q_3' \ldots)$ sowie die Büschel $(q_1, q_2, q_3 \ldots)$ und $(q_1', q_2', q_3' \ldots)$ sind in involutorischer Lage.

Im Polarsystem $(0, 2\ m)$ benützen wir das Polardreieck, welches die unendlich ferne Gerade, die horizontale und die verticale Polaraxe zu Seiten hat (§ 7). Nehmen wir zunächst als Seite AB die horizontale Polaraxe, als gegenüberliegenden Eckpunkt C demnach den unendlich fernen Punkt der verticalen Polaraxe an, so entsteht nach dem Vorigen in der horizontalen Polaraxe eine Involution von Punkten $Q\ Q' \ldots$, welche aus dem unendlich fernen Punkt der Verticalen (d. h. durch Verticale) durch die Involution von Strahlen $q\ q' \ldots$ projicirt wird. *Ein* Paar jener Punktinvolution wird offenbar durch den unendlich fernen Punkt der Horizontalen und den Mittelpunkt S gebildet (§ 7). Der letztere kann demnach auch als „Mittelpunkt der *Involution*" bezeichnet werden. Ein anderes Punktepaar kann sofort angegeben werden. Wir wissen nämlich, dass — in Bezug auf den ganzen Bogen — der durch den Endpunkt $2m$ gehenden Verticalen ein (auf der horizontalen Polaraxe liegender) Punkt von der Abscisse $\frac{2}{3}\lambda m$ entspricht (§ 5). In der betrachteten Involution entspricht mithin dem Punkt von der Abscisse $2\lambda m$ der Punkt von der Abscisse $\frac{2}{3}\lambda m$. Die Abstände dieser beiden Punkte vom Mittelpunkt S der Involution sind λm und $\frac{\lambda m}{3}$. Die Entfernungen x_n der Punkte des zum Mittelpunkt S symmetrisch gelegenen Paars *vom* Mittelpunkte ergeben sich demnach aus

$$x_h^2 = \frac{(\lambda m)^2}{3} \tag{19}$$

Der Werth x_h^2 wird öfter als Constante der Involution bezeichnet. Irgend einer Verticalen, welche von der verticalen Polaraxe den Abstand ξ hat, entspricht ein Punkt, welcher — auf der entgegengesetzten Seite der verticalen Polaraxe liegend — von dieser den Abstand hat

$$\xi' = \frac{(\lambda m)^2}{3\,\xi}$$

Die Momentancentra (0,1) 1, (0,2) 2 u. s. w., die wir also kürzer mit $C_1, C_2 \ldots$ bezeichnen, Fig. 5, liegen nun auf Verticalen, welche von der verticalen Polaraxe die Abstände haben

$$\xi = \frac{\lambda}{3}\,(3\,m - i)$$

wenn hierin i die ganzen Zahlen von 1 bis $2\ m$ bedeutet. Die diesen Momentancentra entsprechenden Geraden, d. h. die Richtungslinien der betreffenden Widerlagerreactionen R_i gehen mithin durch (auf der horizontalen Polaraxe liegende) Punkte T_i, welche vom Mittelpunkt S die Abstände haben

$$\xi' = \frac{\lambda\ m^2}{3\ m - i} \tag{20}$$

In ähnlicher Weise verfährt man, um die Constante x_v^2 der in der *verticalen* Polaraxe entstehenden Punktinvolution zu bestimmen. Mittelpunkt der Involution ist natürlich wieder der Mittelpunkt S des Polarsystems. Weiterhin ist noch der der Auflagersehne entsprechende Punkt bekannt. Derselbe hat die Ordinate y_ϱ (§ 8). Wird auch die Ordinate des Mittelpunktes S, wie früher (§ 7), mit y_σ bezeichnet, so sind die Abstände der Auflagersehne, resp. des ihr entsprechenden Punktes vom Mittelpunkte S gleich y_σ und $y_\varrho - y_\sigma$ zu setzen. Es wird also die Constante der Involution

$$x_v^2 = y_\sigma\,(y_\varrho - y_\sigma) \tag{21}$$

Mit Verwendung der Grösse x_v könnte man nun graphisch sehr leicht für jede Widerlagerreaction einen zweiten — auf der Symmetrieaxe gelegenen — Punkt bestimmen, und die Aufgabe wäre dann als gelöst zu betrachten. Zur Probe könnte auch noch die Involution von Strahlen um den Mittelpunkt S herum — die unendlich ferne Gerade als Gerade AB betrachtet — benutzt werden, allein wir ziehen vor, weitere Punkte der Widerlagerreactionen in anderer Weise zu bestimmen.

(Schluss folgt.)

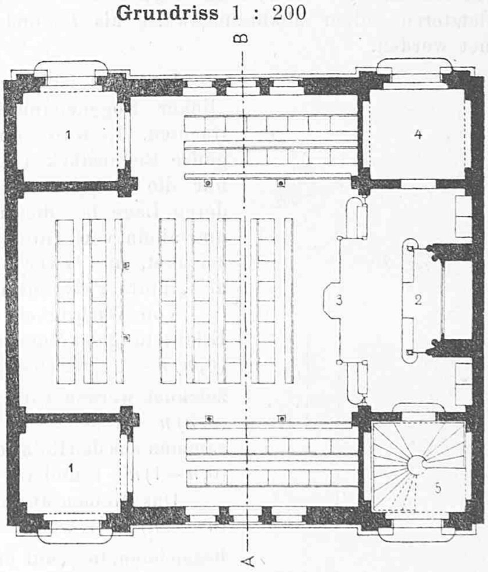
Synagoge in St. Gallen.

Von *Chiodera & Tschudy*, Architecten in Zürich.

Im Frühling dieses Jahres übergab die Vorsteherschaft der israelitischen Religionsgenossenschaft in St. Gallen den Architecten Chiodera & Tschudy in Zürich die Ausführung der Synagogenbaute.

Dieselbe wurde für 250 Sitzplätze berechnet. In der Grundform ein Quadrat gestaltet sich der Innenraum zu einem griechischen Kreuz, über dessen Armen die achteckige Kuppel sich erhebt. Die vier Quadrate, zwischen je zwei Kreuzarmen eingeschlossen, bilden die Vorhalle, das Rabbinerzimmer und den Raum für die Treppe, die zu der Frauengallerie führt.

Grundriss 1 : 200



Legende

1. Vorhalle
2. al Memor
3. Kanzel
4. Zimmer des Rabbiners
5. Treppe zur Frauentribüne.

Was den Styl anbetrifft, so finden wir hier die Bauart der ägyptischen Moscheen frei nachgeahmt. Reich, buntfarbig im Innern, mit farbigen Glasmalereien, zeigt die Synagoge auch im Aeussern einen Farbenschmuck, bewirkt durch die Inanspruchnahme eines, zur Zeit der Renaissance in Italien vielfach angewendeten Materiales, der Fayence. Die Gesimse und Zwickel über den Fenstern und Thüren der Hauptfaçade sind aus obgenanntem Material (gebranntem und glasirtem Thon mit reicher bunter Bemalung) ausgeführt. Diese Gesimse können, wie die