

Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer
Herausgeber: A. Waldner
Band: 14/15 (1881)
Heft: 7

Artikel: Versuche der Umkehrung des graphischen Potenzirens
Autor: Smreker, Oscar
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9345>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Versuche der Umkehrung des graphischen Potenzziens.

Von Oscar Smreker, Ingenieur, in Prag.

(Schluss.)

Da nun die Curve hinsichtlich des Doppelpunktes und der Asymptoten hinlänglich untersucht ist, kann man zu weiteren Eigenschaften derselben schreiten.

Zunächst ist es selbstverständlich, dass die Curve keinen Rückkehrpunkt haben kann; denn sie besitzt ja einen Doppelpunkt und ist, wie ihre Gleichung angibt, nur von der dritten Ordnung.

Im Allgemeinen hat eine Curve dritter Ordnung neun Wendepunkte, welche je zu drei auf einer Geraden liegen; da aber der Doppelpunkt die Stelle von sechs Wendepunkten einnimmt, so können demgemäss nur mehr noch drei Wendepunkte vorhanden sein; diese drei Wendepunkte werden mittelst der zu der vorliegenden Curve gehörigen Hesse'schen Curve bestimmt, welche die Eigenschaft besitzt, aus der Curve sämtliche Wende- und Doppelpunkte herauszuschneiden. Um die Gleichung der Hesse'schen Curve aufstellen zu können, muss die Gleichung III zunächst in homogenen Coordinaten dargestellt werden, was jedoch sofort aus Gleichung II abgeleitet werden kann, indem man dort

$$n = 3$$

einsetzt; darnach schreibt sich Gleichung III in homogenen Coordinaten wie folgt:

$$C \equiv x_2^3 + x_1^2 x_2 - c x_1 x_2 x_3 - u x_1^2 x_3 = 0 \quad \text{IV}$$

Bezeichnet man allgemein die zweite Ableitung dieser Function nach zweien der drei Variablen mit:

$$C_{ik} = \frac{d^2 C}{dx_i dx_k}$$

wobei i und k Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3 sind, so erhält man die Gleichung der Hesse'schen Curve in homogenen Coordinaten in folgender Determinantenform gegeben:

$$H \equiv \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Diese Determinante ist stets symmetrisch, da bekanntlich die Relation allgemein gilt:

$$\frac{d^2 C}{dx_i dx_k} = \frac{d^2 C}{dx_k dx_i}$$

Bildet man nun diese Determinante in Bezug auf die Gleichung IV, so erhält man:

$$H \equiv \begin{vmatrix} 6x_2 & (2x_1 - cx_3) & -cx_1 \\ (2x_1 - cx_3) & (2x_2 - 2ux_3) & (-cx_2 - 2ux_1) \\ -cx_1 & (-cx_2 - 2ux_1) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Daraus folgt durch Ausrechnung als Gleichung der Hesse'schen Curve:

$$H \equiv 3c^2 x_2^3 + 12ucx_1 x_2^2 + (12u^2 + c^2)x_1^2 x_2 - 4ucx_1^3 + u^2 c^2 x_1^2 x_3 + c^3 x_1 x_2 x_3 = 0. \quad \text{V}$$

Sucht man die unendlich fernen Punkte dieser Curve dritter Ordnung, indem man ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden aufsucht, so sieht man, dass diese Curve mit der ihr zu Grunde gelegten keine Punkte im Unendlichen gemeinsam hat; folglich müssen die drei noch zu bestimmenden Wendepunkte im Endlichen liegen. Aus der nähern Betrachtung der Construction und der Gleichung der besprochenen Curve geht es unzweifelhaft hervor, dass dieselbe von einer Geraden nur dann in drei reellen endlichen Punkten geschnitten werden kann, wenn diese Gerade die Schleife des Doppelpunktes schneidet. Da aber auf der Schleife kein Wendepunkt liegen kann, die drei Wendepunkte jedoch auf einer Geraden liegen müssen, so folgt hieraus, dass nur ein einziger Wendepunkt reell vorhanden sein kann; die nähere Bestimmung desselben, die ohne jede Schwierigkeit vorgenommen werden kann, hat jedoch kein allgemeines Interesse.

Mit Hilfe der Plücker'schen Formeln können die übrigen Singularitäten der Curve leicht bestimmt werden, was der Vollständigkeit halber hier auch durchgeführt werden soll.

Bezeichnet:

m die Ordnung der Curve; diese ist im vorliegenden Falle, wie die Gleichung III lehrt, gleich 3, also:

$$m = 3$$

n die Classe der Curve;

d die Anzahl der Doppelpunkte; nach dem Vorhergehenden hier gleich 1, also:

$$d = 1$$

t die Anzahl der Doppeltangenten;

r die Anzahl der Rückkehrpunkte oder Spitzen; da keine solchen hier vorhanden sind, so folgt:

$$r = 0$$

i die Anzahl der Wendepunkte oder Inflectionstangenten; da die Curve drei Wendepunkte, wie nachgewiesen, besitzt, so ist:

$$i = 3.$$

Die Classe der Curve ergibt sich aus der folgenden Relation:

$$n = m(m-1) - 2d - 3r$$

ausgerechnet, ergibt dies

$$n = 4$$

Die Anzahl der Doppeltangenten f bestimmt sich nach der Formel:

$$t = \frac{n(n-1) - m - 3i}{2}$$

woraus folgt:

$$t = 0$$

Zur vollständigen Untersuchung der Curve gehört noch die Bestimmung ihrer Maxima und Minima, die nun im Folgenden noch erfolgen soll.

Die Gleichung der Curve schreibt sich nach III wie folgt:

$$y^3 + y[x^2 - cx] - ux^2 = 0$$

Diese implicite Function nach x differentiirt, ergibt wie früher:

$$\frac{dy}{dx} (3y^2 + x^2 - cx) + y(2x - c) - 2ux = 0$$

Als Bedingung für den Eintritt von Maxima oder Minima besteht die Erfüllung der Relation:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

d. h. in unserem Falle:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ux - 2xy + cy}{3y^2 + x^2 - cx} = 0$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden für jene Punkte der Curve, deren Coordinaten x und y die Gleichung

$$2xy - 2ux - cy = 0 \quad \text{VI}$$

erfüllen. Wie man sofort übersieht, ist der durch diese Gleichung dargestellte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, deren einfachste Construction im Folgenden speciell abgeleitet werden soll, da von derselben später noch einmal Gebrauch gemacht werden wird.

7. Ist eine reelle Grösse a gegeben, so ist es stets möglich, auf unendlich mannigfache Weise zwei reelle Werthe p und q so zu bestimmen, dass

$$pq = 4a$$

ist. Wird a positiv angenommen, so werden p und q stets das gleiche Vorzeichen haben, also entweder werden beide gleichzeitig positiv oder beide gleichzeitig negativ sein.

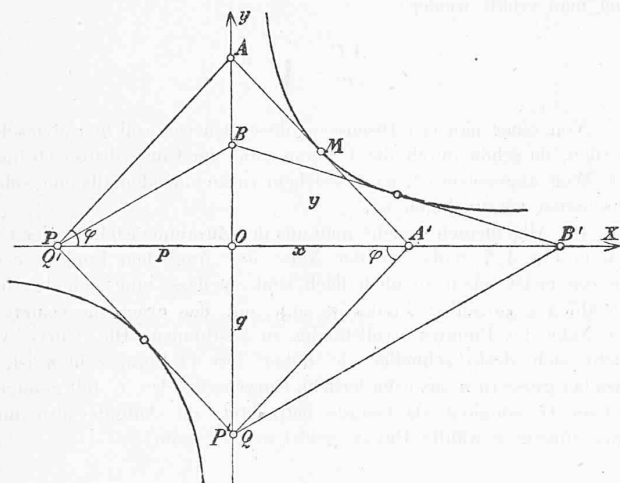
Trägt man in Fig. 5 vom Koordinatenanfangspunkte O aus die beiden zusammengehörigen Werthe von p und q nach Grösse und Richtung auf die beiden Coordinatenachsen auf, so dass

$$OP = -p$$

$$OQ = -q$$

wird, wobei zu bemerken ist, dass die beiden Grössen lediglich deshalb negativ aufgetragen wurden, um die Figur nicht zu verwirren.

Fig. 5



Betrachtet man nun die beiden so erhaltenen Punkte P und Q als die Scheitel zweier projectivischer Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen einander parallel sind, also:

$$PA \parallel QA'$$

$$PB \parallel QB'$$

u. s. w., so wird die Punktreihe $A, B, \dots$, welche vom Strahlenbüschel $[P, AB \dots]$ auf der y -Axe herausgeschnitten wird, projectivisch sein zur Punktreihe $A'B' \dots$, welche vom Strahlenbüschel $[Q, A'B' \dots]$ auf der x -Axe erzeugt wird. Die Verbindungslinien

$$AA', BB' \dots$$

u. s. w., je zweier entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen umhüllen stets einen Kegelschnitt. Rechnet man den Koordinatenanfangspunkt O zur x -Axe, so entspricht ihm der unendlich ferne Punkt der y -Axe, folglich muss die y -Axe eine Asymptote an den Kegelschnitt sein; das Gleiche gilt von der x -Axe, denn wird der Anfangspunkt O zur y -Axe gerechnet, so entspricht ihm der unendlich ferne Punkt der x -Axe. Der erzeugte Kegelschnitt ist also eine Hyperbel und zwar eine gleichseitige, weil ihre Asymptoten die beiden auf einander senkrecht stehenden Coordinatenachsen sind; die nächste Aufgabe ist es nun, den Zusammenhang der Gleichung dieser Hyperbel mit den beiden Grössen p und q festzustellen.

Sei b die reelle Halbaxe dieser Hyperbel, so stellt sich ihre Gleichung auf die Asymptoten als die Coordinatenachsen bezogen, bekanntlich, wie folgt, dar:

$$xy = \frac{b^2}{2}$$

Betrachtet man einen beliebigen Punkt M dieser Hyperbel, so muss dieser die Länge der Tangente zwischen den beiden Asymptoten halbiren, so dass

$$AM = MA'$$

wird. Bezeichnen x und y ferner die beiden Coordinaten dieses Punktes M , so folgt aus der soeben angeführten Eigenschaft:

$$x = \frac{1}{2} OA'$$

$$y = \frac{1}{2} OA$$

Diese beiden Grössen OA und OA' können jedoch unmittelbar durch die Grössen p und q ausgedrückt werden, wenn man den Winkel φ einführt, den der Strahl PA und QA' mit der positiven x -Axe einschliesst; denn es folgt:

Aus Dreieck OAP :

$$OA = OP \cdot \tan \varphi = p \cdot \tan \varphi$$

Aus Dreieck $OA'Q$:

$$OA' = OQ \cdot \cotg \varphi = q \cdot \cotg \varphi$$

Darauf ergibt sich:

$$x = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \cotg \varphi$$

$$y = \frac{1}{2} p \cdot \tan \varphi$$

Dies in die obige Gleichung

$$xy = \frac{1}{2} b^2$$

der gleichseitigen Hyperbel eingesetzt, ergibt:

$$xy = \frac{1}{2} b^2 = \frac{1}{4} p \cdot q$$

Berücksichtigt man ferner, dass in der Einleitung die beiden Grössen p und q so bestimmt wurden, dass dieselben die Bedingung erfüllen:

$$pq = 4a$$

so folgt als Gleichung der auf die oben angegebene Weise erzeugten gleichseitigen Hyperbel:

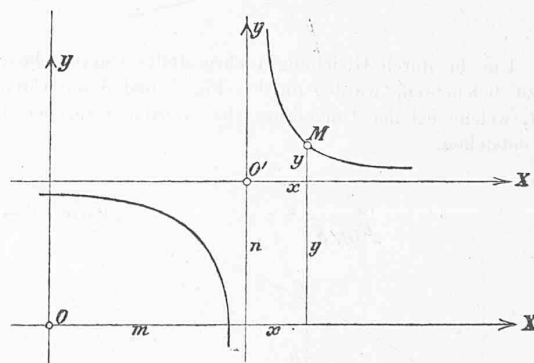
$$xy = a = \frac{b^2}{2}$$

Um diese Gleichung auf die unter VI erscheinende Form zu bringen, ist es nur nöthig eine Transformation des Coordinatensystems vorzunehmen und zwar nur eine Parallelverschiebung, wie sofort nachgewiesen werden wird.

Die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die beiden Asymptoten als Coordinatenachsen, kann stets in folgender Form dargestellt werden:

$$X \cdot Y = a$$

Fig. 6



Nimmt man nun ein neues Coordinatensystem mit dem Ursprung O an, dessen beide Axen jedoch parallel zu den beiden Asymptoten sind; sind ferner m und n die Coordinaten des Mittelpunktes O' der Hyperbel, bezogen auf das neue System, so bestehen zwischen den Coordinaten X, Y eines Punktes, auf das neue System bezogen, folgende Relationen:

$$X = x - m$$

$$Y = y - n$$

Dies in die Gleichung der Hyperbel eingesetzt, ergibt folgende Form der neuen Gleichung:

$$xy - nx - my = (a - mn) \quad \text{VII}$$

Diese Gleichung VII hat eine der Gleichung VI ganz analoge Gestalt. Für die Hyperbel, welche durch Gleichung VI repräsentirt ist, hat man nur zu setzen:

