L'intégrateur mécanique de MM Abdank-Abakanowicz et Napoli

L'Intégrateur mécanique de MM. Abdank-Abakanowicz et Napoli.

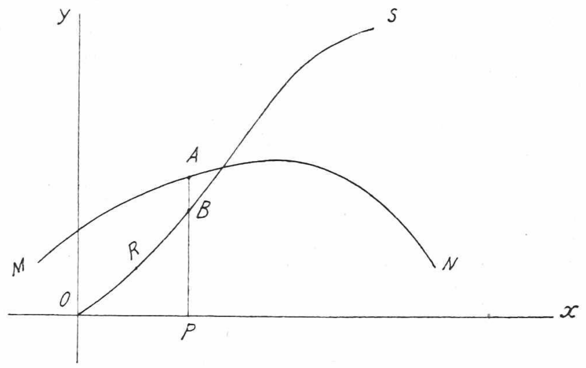
Soit $y' = f(x)$ l'équation d'une courbe MN (fig. 1) rapportée à deux axes rectangulaires, et soit $F(x)$ la fonction qui a $f(x)$ pour dérivée. Concevons une seconde courbe dont l'ordonnée y soit déterminée par la relation:

$$ay = \int_0^x f(x)\, dx = F(x) - F(0)$$

a désignant une longueur convenue et déterminée. De cette définition même il résulte que l'aire comprise entre la courbe proposée, l'axe des y, celui des x et une certaine ordonnée AP, sera égale au rectangle obtenu en multipliant par la longueur constante a l'ordonnée $y = BP$ de la seconde courbe correspondant à la même valeur de x. Cette courbe RS, dont les ordonnées mesurent de la sorte les aires correspondantes de la courbe proposée, se nomme la *courbe intégrale* de celle-ci.

On doit à Mr. Abdank-Abakanowicz l'invention d'un instrument qui permet de décrire mécaniquement la courbe

Fig. 1.



intégrale d'une courbe quelconque dont le tracé est donné, en le faisant parcourir par un style.

Cet instrument, que l'inventeur nommé *intégraphe* (par euphonie, au lieu de *intégrographe*), repose sur une propriété fort simple de la courbe intégrale. Pour éviter la confusion, supposons (fig. 2) que la courbe proposée et la courbe intégrale soient rapportées à des axes des x distincts, celui des y leur demeurant commun. Soient A et B deux points correspondants des deux courbes et soit TB la tangente en B à la courbe intégrale et φ l'angle de cette tangente avec l'axe des x. Comme on a : $\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx}$ et $a \frac{dy}{dx} = f(x) = y'$ on voit que $y' = a \operatorname{tang} \varphi$. Cela étant, si, à partir du pied P de l'ordonnée du point A, nous prenons, dans la direction de o, la longueur $\overline{QP} = a$ et si nous joignons QA, le triangle QAP donnera : $\overline{AP} = \overline{QP} \operatorname{tang} AQP$, ou $y' = a \operatorname{tang} AQP$; on voit donc que $AQP = \varphi$ et que par conséquent la tangente TB à la courbe intégrale est parallèle à QA. De même, pour deux autres points correspondants A' et B'; on aurait $T'B'$ parallèle à $A'Q'$, la distance $Q'P'$ étant, comme QP, égale à a.

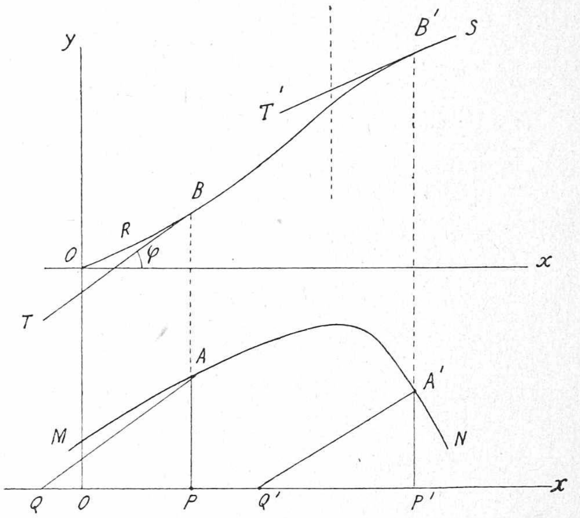
Le problème de l'intégraphe peut donc se ramener à celui-ci : *Pendant que le style A décrit la courbe proposée, faire ensorte qu'il entraine avec lui le triangle rectangle variable QAP, dont le côté QP est invariable en longueur et toujours appliqué sur ox tandis que AP reste perpendiculaire à ox, et que ce triangle, à son tour, entraine un galet tranchant dont le point de contact B avec le plan du dessin puisse se déplacer suivant le prolongement de AP et dont le plan demeure toujours parallèle à QA l'hypoténuse du triangle,*

C'est ce qui a été réalisé dans l'instrument que nous allons décrire (fig. 3), qui a été combiné sur les indications de l'inventeur par Mr. Napoli, ingénieur des ateliers de précision du Chemin de fer de l'Est, à Paris.

Le châssis mobile qui porte tous les organes a la forme d'un T, dont la traverse est formé par un chariot H portant deux galets qui roulent dans la rainure d'une règle SS'. Cette règle se fixe sur le plan du dessin et représente la direction de l'axe des x. La grande branche du T, perpendiculaire à cet axe, est constituée par deux règles rigides en cuivre FF. Les deux styles A et B, dont le premier est promené le long de la courbe proposée tandis que le second décrit la courbe intégrale, se trouvent au centre de deux chariots mobiles C, C', mobiles le long des règles FF.

Le chariot C fait corps avec une tige D percée d'un oeil dans lequel passe le style A. Cette tige peut tourner, tout en ayant la faculté de glisser, autour d'un point déterminé par deux galets $d\,d'$ fixés à une tige X qui est elle-

Fig. 2.



même fixée perpendiculairement à une des règles F et par suite parallèle à SS'. Cette règle détermine la situation de l'axe des x. Les galets $d\,d'$, et par suite le point de pivotement qu'ils déterminent, peuvent se déplacer à volonté le long de la tige X. La distance entre ce point, auquel on peut ainsi donner la situation qu'on veut, et la parallèle aux règles F et F sur laquelle les styles A et B sont assujetis à se mouvoir relativement au châssis, représente la distance fixe a et la direction variable de la règle D est celle de l'hypoténuse AQ du triangle QAP de la fig. 2.

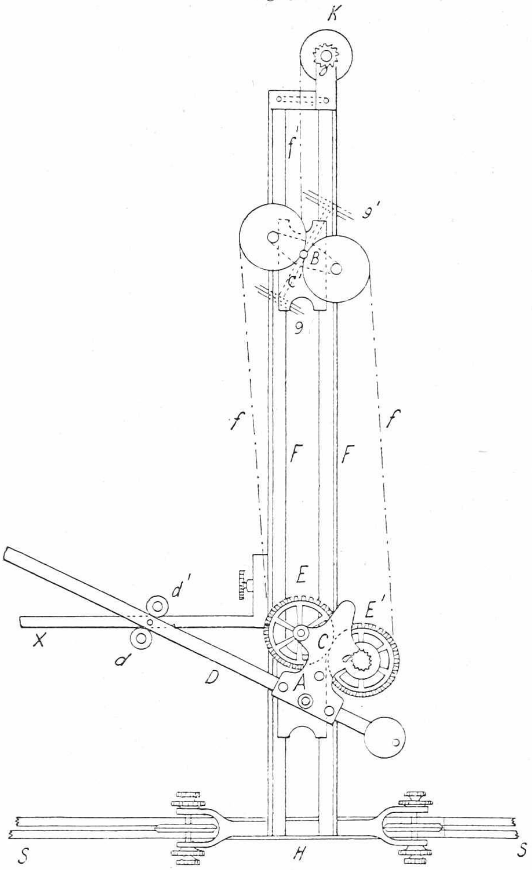
L'organe intégrateur qui fait partie du chariot C', n'est pas constitué comme cela pourrait se faire théoriquement par un galet tranchant mais par un tireligne monté entre deux galets $g\,g'$ et traversant leur essieu à égale distance des deux, de façon à ce que sa fente soit parallèle à leurs plans.

L'instrument est disposé de façon à ce que la distance des chariots puisse se modifier sans que le plan des deux galets, et par conséquent la direction du tireligne B cesse jamais d'être parallèle à la direction variable de la tige D. Voici par quel mécanisme cela est obtenu.

Sur le chariot C' se trouvent deux roues à gorge solidaires de l'axe qui est entraîné par les galets dont il vient d'être question. Deux fils f et f passent sur les gorges de ces roues et y sont fixés. Ils viennent ensuite s'enrouler respectivement sur deux treuils formant corps avec deux roues d'engrenage EE' égales entre elles qui sont fixées au chariot C de façon à ce que leur ligne de centres soit parallèle à la tige D. Un ressort à barillet (non visible dans la figure) placé au centre d'une de ces roues dentées maintient les deux fils tendus, le tranchant des galets qui appuient sur le papier empêchant le chariot C' de se rapprocher de C. Mais pendant la marche de l'appareil, c'est-à-dire pendant que l'opérateur promène le style A le long de la courbe donnée, les deux chariots peuvent s'éloigner ou se rapprocher, et les lignes des centres g et g' d'une part E et E' de l'autre demeureront toujours parallèles, les treuils montés sur les roues dentées ne laissant les deux fils se raccourcir ou se rallonger que de quantités rigoureusement égales par suite de l'engrènement de ces roues.

Les deux règles F et F sont reliées à leur extrémité par une pièce qui achève de les rendre solidaires. Cette

Fig. 3.



pièce porte en dessus un tambour à barillet K sur lequel est enroulé un fil f' dont l'autre extrémité vient se fixer au chariot C', et qui vient ainsi, par l'action du ressort de K, contrebalancer la tension des fils ff. Cette même pièce porte en dessous un galet non tranchant qui est parallèle à SS' et qui concourt à supporter le poids de tout ce châssis mobile.

Cet instrument que Mr. Napoli a eu l'obligeance de nous montrer fonctionne avec une précision remarquable.

On voit que, pour son objet et son principe, il diffère essentiellement du planimètre et de l'intégrateur d'Amsler dans lesquels l'intégration est donnée par le nombre de tours d'une roulette d'un diamètre déterminé.

Mr. Abdank-Abakanowicz a publié à la fin de 1886, sous le titre de: *Les Intégraphes, la courbe intégrale et les applications* (Paris. Gauthier-Villars), une brochure très étendue à laquelle nous renvoyons le lecteur pour la description d'autres variétés du même appareil.

Il y a entre la courbe donnée et la courbe intégrale certaines relations qui se découvrent du premier coup.

A tous les points d'intersection de la courbe donnée avec l'axe des x correspondent sur la courbe intégrale des points maximum ou minimum.

A tous les points maximum ou minimum correspondent des points d'inflexion.

Une droite parallèle à l'axe des x a pour intégrale une droite inclinée, et une droite inclinée a pour intégrale une parabole.

A une droite parallèle à l'axe des y correspond un *point anguleux* : pendant que le stylet tenu par la main décrit cette droite, le stylet intégrateur pivote sur place.

Aux points où la tangente est parallèle à l'axe des y correspondent des points de rebroussement.

La courbe intégrale n'a pas d'éléments parallèles à l'axe des y : de tels éléments ne pourraient correspondre qu'à des ordonnées infinies de la courbe donnée.

Au point de vue purement théorique le rôle de l'intégraphe peut être renversé; en faisant parcourir une courbe donnée par le stylet intégrateur, l'autre stylet décrivait sa *courbe dérivée*, d'ordonnée $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$. Dans la pratique ce n'est pas possible. L'intégrateur a un fonctionnement basé sur la grandeur de l'ordonnée de la courbe donnée, grandeur qui ne présente pas d'incertitude, tandis que celui du *dérivateur* devrait se baser sur l'inclinaison de la tangente, et on sait que *graphiquement* cette inclinaison est généralement mal déterminée. De plus dans l'intégrateur le stylet traceur ne reproduit pas ou atténue beaucoup les mouvements parasits du stylet tenu par la main; c'est le contraire qui aurait lieu s'il s'agissait d'effectuer la dérivation, et chaque fois que la main ferait décrire un élément parallèle aux ordonnées, le stylet dérivateur devrait pouvoir aller à l'infini. On a donc ici, sous le rapport de la difficulté relative des problèmes, tout le contraire de ce qui existe en analyse.

Les applications de la courbe intégrale sont multiples. Si par exemple on prend pour axe des x une droite représentant une poutre rectiligne et si on trace la ligne de charge, c'est-à-dire une ligne dont l'ordonnée est proportionnelle en chaque point à la charge, la ligne intégrale de cette ligne sera la courbe des efforts tranchants et l'intégrale de cette première intégrale sera celle des moments de flexion.

Si on prend pour axe des x une droite représentant en profil une route ou un chemin de fer et si on trace une courbe dont les ordonnées représentent en chaque point la surface du profil en travers correspondant, en dessus pour les déblais, en dessous pour les remblais, le lieu des extrémités de ces ordonnées sera une courbe dont les aires successives, alternativement en dessus ou dessous de l'axe des x, représentent les cubes des déblais et ceux des remblais. Or l'intégrale de cette courbe, en raison même de sa définition, n'est autre chose que la *courbe du nivellement des masses*, dont Culmann a fait connaître les remarquables et utiles propriétés dans sa *Statique graphique*.

La courbe intégrale d'une ligne limitant une surface permet aussi d'obtenir graphiquement le moment statique et le moment d'inertie de cette surface par rapport à un axe donnée.

Les limites de cet article ne nous permettent pas d'entrer dans plus de détails sur les applications de la courbe intégrale, et nous devons nous borner à renvoyer le lecteur au chapitre V de la brochure citée, où il trouvera les éclaircissements les plus complets.

Semper-Denkmal.

(Mit einer Lichtdrucktafel.)

Der einer früheren Nummer beigelegten Darstellung der Büste Sempers folgt heute eine Abbildung des ganzen, am 21. Mai d. J. enthüllten Denkmals. Entsprechend dem gegenüberliegenden Monument für Prof. Culmann besteht das Semper-Denkmal aus einer Büste aus carrarischem Marmor in etwa $1^1/_3$ Lebensgrösse, die in einer reichen