

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 11/12 (1888)
Heft: 19

Artikel: Die Trägheitsellipse, geometrisch abgeleitet
Autor: Ritter, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14952>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Die Trägheitsellipse, geometrisch abgeleitet. Von Prof. W. Ritter. — Viaduc de Paderno sur l'Adda. — Eidg. Parlaments- und Verwaltungsgebäude in Bern. Von Prof. Hans Auer. — Die Delegiertenversammlung des Schweizerischen Ingenieur- und Architekten-

Vereins. — Necrologie: † Fritz Müller, † Wilhelm Kutter, † Alfred Augustin Durand-Claye. — Patentliste. — Vereinsnachrichten. Stellenvermittlung.

Hiezu eine Tafel: Viaduc de Paderno sur L'Adda.

Die Trägheitsellipse, geometrisch abgeleitet.

Von Prof. W. Ritter.

Die Trägheitsellipse eines ebenen Punktesystems, beziehungsweise einer ebenen Figur ist bis dahin meistens auf rechnerischem Wege abgeleitet worden, während eine rein geometrische Ableitung nicht nur der Natur der Sache angemessener, sondern namentlich auch für die graphische Statik vorzuziehen wäre. So viel mir bekannt, haben italienische Schriftsteller zuerst den Weg der geometrisch-synthetischen Behandlung des Trägheits- und des Centrifugalmomentes betreten; ihre Arbeiten sind jedoch, wie es scheint, in deutschen Kreisen unbekannt geblieben; sonst wäre nicht, wie es noch vor Kurzem von massgebender Seite aus-
gesprochen ist, der Trägheitsellipse zum Vorwurf gemacht worden, dass sie die Darstellung einer auf analytischem Wege abgeleiteten Formel sei. *)

Es seien $P_1, P_2, \dots$ Punkte, von denen jeder ein bestimmtes Gewicht besitzt, und S sei deren Schwerpunkt. Multipliziert man das Gewicht eines Punktes mit dessen Abstand von einer Axe a , so erhält man dessen statisches Moment; die Summe sämtlicher statischen Momente ist dann gleich der Summe sämtlicher Gewichte, multipliziert mit dem Abstand des Schwerpunktes von der Axe. $M = (\Sigma P) y_s$.

Nun multiplizieren wir das Gewicht eines Punktes mit seinen Abständen von zwei Axen a und b und nennen das Product „Centrifugalmoment“ des Punktes bezogen auf die beiden Axen und die Summe sämtlicher Producte das Centrifugalmoment des ganzen Systems; dann findet man die Grösse dieses letzteren auf folgende Weise:

Man denkt sich jedem der einzelnen Punkte dessen statisches Moment bezogen auf a als Gewicht zugewiesen, und bestimmt wiederum den Schwerpunkt dieser Gewichte; es sei dies der Punkt A ; dann ist das Centrifugalmoment des ganzen Systems gleich dem gesammten statischen Momente, multipliziert mit der Entfernung des Punktes A von b , oder nach früher gleich der Summe sämtlicher Gewichte multipliziert mit dem Abstände des Punktes S von a und mit dem Abstände des Punktes A von b . In Buchstaben ausgedrückt:

$$C = (\Sigma P) y_s x_a$$

Lässt man die Axe b mit a zusammenfallen, so geht das Centrifugalmoment in das Trägheitsmoment über, das ist die Summe derjenigen Producte, welche man erhält, wenn man die Gewichte der einzelnen Punkte mit den Quadraten ihrer Entfernungen von einer festen Axe multipliziert. Für die Axe a wird somit das Trägheitsmoment des ganzen Punktesystems

$$J = (\Sigma P) y_s^2$$

Während der Schwerpunkt S des Punktesystems unveränderlich bleibt, ist die Lage des Punktes A für ein gegebenes System von der Lage der Axe a abhängig; für jede in der Ebene liegende Axe lässt sich auf dem oben

angegebenen Wege ein ganz bestimmter Punkt als Mittel- oder Schwerpunkt der statischen Momente bestimmen und der Axe als ihr eigenthümlich zuweisen. Wir wollen der Kürze halber sagen, der Punkt A sei der „Pol“ der Axe a .

Geht die Axe a durch den Schwerpunkt S , so wird das statische Moment des Systems gleich null, während das Centrifugal- bzw. das Trägheitsmoment im Allgemeinen von null verschieden ist; der entsprechende Pol muss daher im Unendlichen liegen. Fällt umgekehrt die Axe in's Unendliche, so haben alle Punkte gleiche Hebelarme; der Pol A als Mittelpunkt der statischen Momente fällt daher mit dem Schwerpunkte der Gewichte, mit S zusammen.

Sind zwei Axen a und b und der Pol der ersteren, A , gegeben, so ist das Centrifugalmoment gleich der Gewichtssumme mal der Entfernung des Schwerpunktes S von a mal der Entfernung des Poles A von b . Ist umgekehrt der Pol B von b bekannt, so erhält man das Centrifugalmoment auch, indem man die Summe aller Gewichte mit dem Abstände des Schwerpunktes von b und mit dem Abstände des Poles B von a multipliziert.

Bleibt die Axe a fest, während sich b bewegt, so ändert

sich das Centrifugalmoment proportional der Entfernung der Axe b von A ; es wechselt sein Zeichen, wenn b den Punkt A überschreitet. Geht (Fig. 2) die Axe b durch den Pol A , so wird die Entfernung x_a und somit auch das Centrifugalmoment C gleich null. Betrachtet man in diesem Falle b als erste Axe, so muss deren Pol B nothwendig auf a liegen, weil sonst das Centrifugalmoment nicht gleich Null würde.

Geht die eine der beiden Axen durch den Pol der zweiten, so geht auch die zweite Axe durch den Pol der ersten.

Dreht sich die Axe b um den Punkt A , so bewegt sich somit ihr Pol B auf der Geraden a , deren Pol der Punkt A ist. Es folgt daraus, dass nicht nur jeder Axe ein bestimmter Pol, sondern auch jedem Pole eine einzige Axe entspricht. Weiter ergibt sich hieraus, dass der Schnittpunkt O der beiden Axen der Verbindungslinie o der beiden Pole entspricht; denn da a und b durch den Punkt O gehen, so muss sowohl A als auch B auf der dem Pole O zugeordneten Axe liegen.

Wir haben somit in ABO ein Tripel conjugirter Elemente vor uns; da ferner die besprochenen Beziehungen nicht an besondere Lagen der Elemente gebunden sind, sondern von allen Linien und Punkten der Ebene gelten, so bilden die Axen und Pole zusammen ein Polarsystem, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt des Punktesystems ist.

Wenn alle Punktgewichte dasselbe Vorzeichen haben, so ist der Pol stets weiter von der Axe entfernt als der Schwerpunkt; haben die Gewichte verschiedenes Zeichen, so kann das Umgekehrte stattfinden. Im ersteren Fall ist daher die Ordnungcurve des Polarsystems stets imaginär; im letzteren kann sie reell werden. Da dieser letztere Fall in der Bautechnik bis jetzt keine Anwendung gefunden hat, so werden wir uns in der Folge nur mit dem ersteren beschäftigen.

Um nun trotzdem auch hiefür, das heisst für ein Punktesystem mit lauter gleichen Vorzeichen, eine das Polarsystem darstellende Curve zu erhalten, weisen wir der Axe a nicht den Punkt A , sondern (Fig. 1) den auf der entgegengesetzten Seite vom Schwerpunkt, in gleicher Entfernung von diesem liegenden Punkt A' zu. Wir betrachten

*) Civilingenieur 1887, S. 61.

mit andern Worten die Gesamtheit der einander entsprechenden Geraden und Punkte als ein „Antipolarsystem“. Dann besitzt das System eine *reelle Ordnungscurve*, und diese wird *Centralellipse des Punktesystems* genannt.

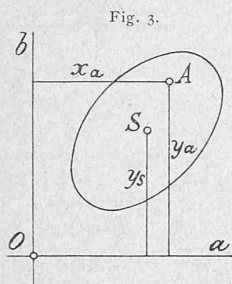


Fig. 3.

Es sei die in der Fig. 3 gezeichnete Ellipse die Centralellipse eines Systems von belasteten Punkten; S sei deren Schwerpunkt und A der Antipol der Axe a . Dann ergeben sich nach früher die folgenden Sätze:

Das Centrifugalmoment des Systems in Bezug auf zwei beliebige Axen ist gleich der Summe sämtlicher Gewichte, multiplicirt mit dem Abstand des Schwerpunktes von der einen Axe und mit dem Abstand des Antipoles

dieser Axe von der zweiten. $C = (\sum P) y_s x_a$.

Das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf eine Axe ist gleich der Summe sämtlicher Gewichte, multiplicirt mit den Abständen des Schwerpunktes und des Antipoles von der Axe. $J = (\sum P) y_s y_a$.

Geht die eine von zwei Axen durch den Antipol der andern, so verschwindet das Centrifugalmoment. Speziell ist dies der Fall, wenn die eine Axe ein Durchmesser der Centralellipse ist und die andere zum conjugirten Durchmesser parallel läuft.

Die Berechnung des Centrifugalmomentes mit Hülfe der Centralellipse wird practisch unausführbar, wenn beide Axen durch den Schwerpunkt gehen, weil dann der Antipol unendlich fern liegt. Für diesen Fall bietet das folgende Verfahren Ersatz.

Nach der in Fig. 4 eingeschriebenen Bezeichnung wird das Centrifugalmoment für die Axen durch O

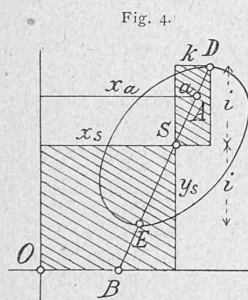


Fig. 4.

$C = (\sum P) y_s x_a = (\sum P) y_s (x_s + a)$.

Nun bilden auf dem zur x -Axe conjugirten Durchmesser die Punktepaare AB , DE und ∞S eine Involution; folglich verhält sich

$$SA : SD = SE : SB$$

und hiernach

$$a : k = i : y_s$$

oder $y_s a = ik$.

Somit ist das Centrifugalmoment

$$C = (\sum P) (y_s x_s + ik).$$

Die hier auftretende Klammer-summe ist für rechtwinklige Axen nichts anderes als der Flächeninhalt der beiden in der Figur 4 schraffirten Rechtecke. Gehen nun die Axen durch den Schwerpunkt, so verschwindet der erstere der beiden Summanden und es ergeben sich die Sätze:

Das Centrifugalmoment für zwei durch den Schwerpunkt gehende Axen ist gleich der Gewichtssumme, multiplicirt mit den Coordinaten des Endpunktes eines der zu den Axen conjugirten Durchmesser. $C_s = (\sum P) i k$.

Das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe ist gleich der Gewichtssumme, multiplicirt mit dem Quadrate der Entfernung der zur Axe parallelen Tangente. $J_s = (\sum P) i^2$.

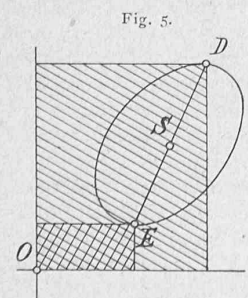


Fig. 5.

Bezeichnet man in der Figur 4 die Coordinaten von D und E mit y_d, x_d und y_e, x_e , so ist

$$y_a x_d + y_e x_e = (y_s + i)(x_s + k) + (y_s - i)(x_s - k) = 2(y_s x_s + ik).$$

Vergleicht man dieses Ergebniss mit dem weiter oben stehenden Werthe von C , so erhält man die Beziehung

$$C = \frac{1}{2} (\sum P) (y_d x_d + y_e x_e).$$

Für rechtwinklige Axen ist diese Klammersumme gleich dem Flä-

cheninhalt der in der Figur 5 schraffirten beiden Rechtecke. In Worten könnte man sich folgendermassen ausdrücken:

Vereinigt man in jedem Endpunkte eines der zu den Axen conjugirten Durchmessers die halbe Gewichtssumme, so bleibt das Centrifugalmoment (bzw. das Trägheitsmoment) des Systems unverändert.

Es bleibt zum Schlusse noch übrig, zu zeigen, dass unter gewissen Bedingungen für jeden Punkt O der Ebene (nicht nur für den Schwerpunkt) eine Ellipse (die *Trägheitsellipse*) existirt, aus welcher die Momente zweiter Ordnung für die durch den Punkt gehenden Axen entnommen werden können.

Wir stellen zu diesem Zwecke die Bedingung auf, es soll zu jeder durch den Punkt O gelegten Axe a (analog der Figur 4) ein Punkte D gesucht werden, dessen Entfernungen von der gegebenen und einer beliebigen zweiten durch O gehenden Axe b , miteinander und mit $(\sum P)$ multiplicirt, das Centrifugalmoment des Systems in Bezug auf die beiden Axen ergeben.

Dann muss (Fig. 6) der Punkt D offenbar auf derjenigen durch O gehenden Geraden a' liegen, welche den Pol der gegebenen Axe a enthält; sonst würde sich das Centrifugalmoment für die Axen a und a' nicht gleich Null ergeben. Die Geraden a und a' sind hinsichtlich des Polarsystems einander conjugirt und bilden daher ein Paar einer Strahleninvolution um O . b, b' sei ein zweites solches Paar und D' der dem Strahle b entsprechende Punkt. Das

Centrifugalmoment in Bezug auf die Axen a und b lässt sich dann sowohl mittelst des Punktes D als auch mittelst D' bestimmen. Misst man die Abstände dieser Punkte nicht senkrecht, sondern parallel zu den Axen a und b , so folgt, dass die in der Figur schraffirten Dreiecke ODE und $OD'E'$ gleichen Flächeninhalt haben müssen. Dies ist der Fall, wenn der Punkt D' einen Kegelschnitt (und zwar eine Ellipse) beschreibt, für welchen die Strahlenpaare a, a' , b, b' etc. conjugirte Durchmesser sind. Denn da die Sehne DD' von dem zu ihr conjugirten Strahle OG halbart wird, haben die Dreiecke ODG und $OD'G$ gleichen Inhalt. OG halbart aber auch das Parallelogramm $OEGE'$; folglich sind die beiden schraffirten Dreiecke als Differenzen gleich grosser Flächen ebenfalls flächengleich.

Der Beweis für die Trägheitsellipse lässt sich noch kürzer folgendermassen führen:

Fügt man zu dem gegebenen Punktesystem ein zweites, gleich grosses und zu O symmetrisch liegendes hinzu, so werden die Centrifugal- und Trägheitsmomente für alle durch O gehenden Axen doppelt so gross. Bestimmt man daher für O als Schwerpunkt des verdoppelten Systems die Centralellipse, so ist diese zugleich die Trägheitsellipse für das einfache System. Denn nach der oben festgestellten Definition gelangt man in beiden Fällen auf den nämlichen Punkt D ; nur ist in dem einen Fall die einfache Gewichtssumme, im anderen die doppelte einzuführen.

Die einem Punkte O entsprechende Trägheitsellipse steht mit der Centralellipse stets in affiner Verwandtschaft; denn die Tangenten parallel OS sind beiden gemeinschaftlich und die zu OS conjugirten Durchmesser sind einander parallel. Berücksichtigt man noch, dass, wenn die Ellipsenradien in der Richtung OS mit r_o und r_s bezeichnet werden, $r_o^2 = r_s^2 + OS^2$ sein muss, so ist der Zusammenhang beider Ellipsen vollständig bestimmt.

Für zwei spezielle Punkte der Ebene geht die Trägheitsellipse in einen Kreis über; es sind dies die Brennpunkte

F und F' des Polarsystems; denn für diese wird die Involution conjugirter Strahlen rechtwinklig. Die Brennpunkte liegen auf der kleinen Halbaxe der Centraellipse und stehen vom Schwerpunkte um die Strecke $\sqrt{b^2 - a^2}$ ab, wenn a die kleine und b die grosse Halbaxe bedeutet. Die Radien der beiden Kreise sind gleich b .

Da die Trägheitsmomente für je zwei Axen, die mit der Hauptaxe der Trägheitsellipse gleiche Winkel einschliessen, gleich gross sind, und da auch alle Axen durch die Brennpunkte gleiche Trägheitsmomente ergeben, so erhält man die Hauptaxen der Trägheitsellipse für den Punkt O , wenn man den Winkel FOF' halbt.

Diese und manche andere längst bekannte Beziehungen lassen sich aus dem Vorhergehenden in einfachster Weise herleiten; ich verzichte indessen auf weitere Ausspinnung des Gegenstandes; es kam mir nur darauf an, zu zeigen, dass sich Central- und Trägheitsellipse auch ohne Zuhülfnahme der Analysis, d. h. auf rein geometrischem Wege herleiten lassen.

Viaduc de Paderno sur l'Adda.

(Avec une planche.)

La voie ferrée de Ponte-S. Pietro à Seregno qui relie la ligne de Bergame-Lecco à celle du Gothard entre Monza et Côme, franchit l'Adda à une distance d'environ 20 km de Lecco, près du village de Paderno.

La grande largeur de la vallée ainsi que sa profondeur considérable exigeaient, pour la traversée du chemin de fer, un ouvrage d'art de dimensions peu communes.

Divers projets de viaduc, dressés tant par les ingénieurs du génie civil italien et ceux de la compagnie d'exploitation que par divers constructeurs du pays, furent soumis à l'examen du conseil supérieur des travaux publics. Celui-ci donna son approbation au projet rédigé par l'ingénieur J. Röthlisberger de la Société des Usines de Savigliano en Piémont, et le gouvernement italien conclut avec cette société un marché à forfait moyennant lequel cette dernière s'engageait à construire le viaduc, y compris ses maçonneries, dans l'espace de dix-huit mois et pour la somme de 1 850 000 frs.

Le viaduc se compose d'un tablier de 266 m de longueur et d'un arc de 150 m de corde mesurés entre les sabots d'acier des retombées.

Le tablier est à double usage. Il sert non seulement au passage de la voie ferrée mais aussi à celui de la route provinciale.

La voie ferrée est placée dans l'intérieur du tablier, tandis que la route est disposée sur les grandes poutres de la travée continue. La route a une largeur totale de 7 m, dont 5 m pour la voie charretière et 2 m pour les deux trottoirs.

Le dessin annexé donne une idée suffisamment exacte des dimensions et de la disposition générale de l'ouvrage pour que nous puissions nous abstenir d'entrer dans de plus amples détails.

Les surcharges d'épreuve fixées par le cahier de charges du gouvernement italien sont de 5 100 kg par mètre courant pour le pont de chemin de fer, et de 3 900 kg pour le pont route.

Il y a en outre à tenir compte dans les calculs de stabilité d'une pression horizontale de vent de 250 kg par m², le pont étant déchargé, et de 150 kg lorsque la surcharge est complète.

La situation locale du viaduc a paru au constructeur s'adapter mieux à un montage des arcs sur pont de service, plutôt qu'au système de mise en place en porte à faux. — Le pont de service est actuellement entièrement achevé et le travail de montage commencé, de sorte que tout fait prévoir que les travaux seront terminés pour la fin Novembre de l'année courante, terme fixé par la convention passée entre le gouvernement italien et le constructeur.

Eidg. Parlaments- und Verwaltungsgebäude in Bern.

Von Prof. Hans Auer.

Die vor gerade drei Jahren durchgeführte Concurrenz für ein eidg. Parlaments- und Verwaltungsgebäude hat im Allgemeinen die gemeinsame Anschauung der beteiligten Architekten zu Tage gefördert, dass die beiden Neubauten als zwei getrennte Baukörper neben dem alten Bundesrathshaus zu errichten seien; doch zeigten sich innerhalb dieses Gedankens zwei von einander principiell verschiedene Lösungen, deren eine, in dem erstprämiirten Project am prägnantesten zur Darstellung gelangend, dahin gieng, die beiden Gebäude als unter sich völlig unabhängige, freistehende Baukörper zu behandeln, deren innerer Zusammenhang nur durch die Verbindungsgallerie hergestellt war und zum Ausdruck gelangte.

Die andere Lösung, im 2. und 5. prämiirten Project am charakteristischsten enthalten, suchte im Gegensatz zu jener die zwei neuen Gebäude mit dem bestehenden Bundesrathshaus zu einer einheitlichen, geschlossenen Gruppe zu vereinigen, indem nicht nur das neue Verwaltungsgebäude als ein mit dem alten Bundesrathshaus in Masse und Gestaltung symmetrischer Bau behandelt, sondern der Zwischenraum der drei Gebäude auch auf ein solches Minimum reducirt wurde, dass schon durch diese innige Verbindung desselben der innere Zusammenhang sich offenbarte und die Galerie nur mehr diesen Eindruck zu bestätigen hatte. — Entgegen der Entscheidung des Preisgerichtes hat sich die Bundesversammlung mit ihrem Votum dem zweitgenannten Princip angeschlossen und es wurde hienach die Ausführung des „neuen Bundesrathshauses“, wie es nun officiell genannt wird, mir anvertraut.

In jüngster Zeit wurden nun von massgebender Seite eine Reihe von practischen und ästhetischen Bedenken gegen die gewählte Anordnung der Bauten erhoben, und durch die öffentlichen Blätter verbreitet, so dass der Vorstand des schweiz. Ingenieur- und Architekten-Vereins den Entschluss fasste, diesen Gegenstand auf das Programm der Delegirten-Versammlung in Bern zu setzen, wodurch mir in verdankenswerther Weise die Gelegenheit geboten wurde, die nothwendigen Aufklärungen zu geben.

Vor Allem sei constatirt, dass die Front des neuen Bundesrathshauses 107 m misst, im Gegensatz zu 112,20 des alten Baues (im Erdgeschoss gemessen). Die Reduction des Längenmasses erfolgte, um den früher von uns selbst in Bezug auf die Beleuchtung der Zwischenräume etwas knapp befundenen Abstand auf ein solches Mass zu bringen, dass sich hieran keine Zweifel mehr knüpfen sollten. Es ergab sich daraus ein Zwischenraum von 78,75 m, zwischen den beiden südlichen Ecken des alten und des neuen Bundesrathshauses gemessen, und wenn nun der Mittelbau mit 54 m angenommen wird, von reichlich 12 m zwischen den drei Gebäuden.

In jenen Einwendungen wurde nun diese Entfernung als viel zu gering erklärt, sie müsse auf wenigstens 100 m angesetzt werden, damit zu beiden Seiten des Parlamentshauses 20—25 m frei bleiben und das letztere zwischen den grossen Massen nicht eingezwängt und kleinlich erscheine.

Was nun die ästhetische Seite dieser Bedenken betrifft, so kann darüber natürlich keine Einwendung gemacht werden, weil sie sich auf einen rein subjectiven Eindruck bezieht, der mit dem Geschmack des Beschauers zusammenhängt. Indessen lässt sich diesem Urtheil die Thatsache gegenüberstellen, dass von Andern, denen die perspectivische Ansicht der Gruppe vorlag, diese Bemerkung nicht gemacht wurde, ja dass sehr bedeutende Capacitäten auf diesem Gebiete, wie Oberbaurath Freiherr Friedrich v. Schmidt, auf eine directe Anfrage in dieser Beziehung sich entschieden äusserten, jenen Eindruck nicht zu gewinnen. Zur allgemeinen Orientirung über die Breite des zukünftigen Mittelbaues in Bezug auf die Gesamtlänge sei constatirt, dass er etwas mehr als $\frac{1}{6}$ des letztern beträgt (beiläufig das schöne Verhältniss der Mittelbauten der kaiserl. Museen in Wien) und endlich,