Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Band: 21/22 (1893)

Heft: 17

Artikel: Ueber die Regulierung von Turbinen

Autor: Stodola, Aurel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18193

Ueber die Regulierung von Turbinen.

Von *Aurel Stodola*, Professor am eidg. Polytechnikum in Zürich.

I.

Das Problem der Regulierung wurde bisher vielfach behandelt, indessen vorwiegend in Anwendung auf Dampfmaschinen oder auf die dynamischen Verhätnisse des Regulators selbst. In den grundlegenden Arbeiten von Kargl (Civil-Ingenieur 1871—73), Wischnegradsky (Civil-Ing. 1877), Grashof (Theoret. Maschinenlehre) und anderer ist die sogenannte schädliche Massenwirkung des Regulators in erschöpfender Weise untersucht und in Bezug auf diesen schwierigen Gegenstand vollständige Klarheit geschaffen worden. Man kann heute das Regulatorproblem als erledigt betrachten, umsomehr, als seither auch die Praxis eine Anzahl von Typen geschaffen hat, denen man eine fast ideale Vollkommenheit zusprechen muss, d. h. welche so gut wie frei von Massenwirkung sind. Man weiss, dass es um diesen Zweck zu erreichen, notwendig ist, die Energie des Regulators nach Möglichkeit zu steigern und gleichzeitig die Masse desselben nach Möglichkeit zu reducieren. Auch ist es im allgemeinen vorteilhaft, eine Oelbremse zu verwenden. Die meisten modernen, raschlaufenden Federregulatoren entsprechen obiger Forderung, und wir können deshalb, um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, einen idealen Regulator mit unendlich grosser Energie voraussetzen, welcher somit auf jede Geschwindigkeitsänderung des Motors momentan reagiert, d. h. momentan jene Lage einnimmt, welche im Beharrungszustande seinem Gleichgewichte entspricht.

Für die Turbinenregulierung kommen nun, neben der Forderung eines an sich möglichst vollkommenen Regulators, die nachstehenden zwei Hauptmomente in Betracht:

1. es ist im allgemeinen zur Verstellung des Steuer- oder Absperrorganes eine bedeutende Kraft erforderlich;
2. es übt jede Veränderung des Abflusses auf die in Bewegung befindliche Wassermasse der Zuleitung eine Rückwirkung aus, die sich in Druckschwankungen kundgiebt.

Der erste Umstand hat zur Anwendung der indirekten Zustellung unter Zuhilfenahme eines Farcot'schen „Servomotors" oder eines mechanischen Relais geführt, welche bekannten Auslösemechanismen die Energie des Regulators in indirekter Weise beliebig zu steigern, also einen beliebig grossen Widerstand zu überwinden gestatten. Dem zweiten, insbesondere für Hochdruckturbinen wichtigen Moment, suchte man durch schwere Schwungräder, in die Zuleitung eingebaute Windkessel, grosse Leitungsdurchmesser etc. Rechnung zu tragen. Es mangelt indessen bis jetzt jeder Anhaltspunkt, um beurteilen zu können, ob und unter welchen Umständen der angestrebte Zweck: Vermeidung der Druckschwankung mit den genannten Mitteln erreichbar ist. Es soll deshalb die Aufstellung eines hiefür geeigneten Kriteriums die Hauptaufgabe der nachfolgenden Untersuchung bilden.

Es werde hiebei eine Aktions-Turbine vorausgesetzt, bei welcher die Regulierung durch stetige Aenderung des Leitkanalquerschnittes erfolgt, so dass man die ausströmende Wassermenge dem Querschnitt einfach proportional setzen kann. Fast vollkommen wird dieser Voraussetzung entsprochen bei Turbinen mit einem einzigen Leitkanal, der durch eine Zunge reguliert wird; ziemlich genau bei Schieberabschluss, auch wenn mehrere Leitzellen vorhanden sind. Die Verhältnisse gestalten sich verschieden, je nachdem das Absperrorgan dem Regulator in seiner Bewegung momentan, — oder nur mit einer gewissen Verspätung folgt. Der erste Fall ist sehr nahe verwirklicht bei dem hydraulischen Servomotor; man kann die Dimensionen dieses Apparates so gross wählen, dass der Kolben nur Bruchteile einer Sekunde benötigt, um in jede durch den Regulator vorgeschriebene Lage zu gelangen. Der zweite Fall hat Bezug auf alle mechanischen, d. h. von der Turbinenwelle mittelst Transmission angetriebenen Hilfsmotoren, bei welchen schon wegen der plötzlichen Einschaltung der Bewegung die Geschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf.

Die Hilfsmotoren wirken demnach entweder momentan oder verspätet, und die Untersuchung soll diesem charakteristischen Merkmale entsprechend in zwei Abschnitte geteilt werden.

I. Regulierung mit momentan wirkendem Hilfsmotor.

Bei dieser kann die Kombination von Regulator und Hilfsmotor ersetzt gedacht werden durch einen idealen, statischen Regulator mit unendlich grosser Energie, welcher direkt auf das Absperrorgan einwirkt. Jeder Leistung der Turbine entspricht dann im Beharrungszustand ein bestimmter Wasserkonsum pro Zeiteinheit, demnach eine bestimmte Grösse des Leitkanalquerschnittes, eine besondere Lage der Regulatorhülse und eine bestimmte Geschwindigkeit im Zuflussrohr. Wenn nun z. B. wegen plötzlicher Entlastung die Turbine eine beschleunigte Bewegung annimmt, somit der Regulator den Leitkanal zu verengen beginnt, wird als erste Folge hievon, vor der Mündung, im Zuflussrohr, eine Druckerhöhung stattfinden; denn es kann die Wassermasse im Druckrohr nicht momentan die kleinere, dem neuen Beharrungszustande entsprechende Geschwindigkeit annehmen, sie muss sich vielmehr vor der Mündung gewissermassen stauen, so lange, bis der Ueberschuss der ihr innewohnenden lebendigen Kraft aufgezehrt ist. Diese Druckerhöhung wird ferner ein Anwachsen der Ausflussgeschwindigkeit aus dem Leitapparat bewirken; und da nun durch denselben Querschnitt ein grösseres Wasserquantum und mit vergrösserter Geschwindigkeit, d. h. vermehrtem Arbeitsvermögen austritt, muss auch der vollkommene Regulator überregulieren, d. h. er muss, auch wenn die dem künftigen Beharrungszustand entsprechende Leitkanalgrösse erreicht ist, diese noch so lange vermindern, bis die Reduktion der ausströmenden Wassermenge den Ueberschuss ihrer lebenden Kraft aufgewogen hat. Von da ab bewegt sich der Regulator nach abwärts und bewirkt Störungserscheinungen entgegengesetzter Art, d. h. Vergrösserung des Leitkanalquerschnittes, Druckabnahme in der Zuleitung, abermaliges Ueberregulieren, infolge dessen eventuell Wiederbeschleunigung der Druckwassersäule u. s. w. Man sieht, dass sich dieses Spiel einigemal wiederholen kann, somit, dass der Uebergang nicht stetig, sondern im allgemeinen in Form oscillatorischer Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen stattfinden wird. Es kommt nun darauf an, ob die aufeinanderfolgenden Impulse sich in ihrer Wirkung fördern oder hemmen. Die anzustellende Untersuchung wird zeigen, dass *unter bestimmten Umständen die hervorgerufenen Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen an Amplitude zunehmen*, somit einerseits die Regulierung illusorisch wird, andrerseits Gefahr für den Bestand der Leitung vorhanden sein kann.

Das mit besonderem Augenmerk hierauf zu behandelnde Problem kann wie folgt formuliert werden:

Es seien gegeben die Anfangswerte der Geschwindigkeit, des Leitkanalquerschnittes, der Pressung, der Belastung und die sonstigen Dimensionen einer im Beharrungszustande arbeitenden Druck-Turbine. In einem für die Zeitzählung als Null vorausgesetzten Momente ändere sich die Belastung plötzlich auf einen von da ab konstanten kleineren oder grösseren Wert. Welchen Verlauf nimmt, lediglich unter Einwirkung des Regulators, — der Druck und die Geschwindigkeit bis zum Eintritte des neuen Beharrungszustandes?

Die strenge mathematische Durchführung dieser Aufgabe bietet unüberwindliche Schwierigkeiten dar; hingegen wird sie verhältnismässig einfach, wenn die Aenderungen sämtlicher vorkommenden Variablen sehr klein vorausgesetzt werden, um die höheren Potenzen derselben vernachlässigen zu können. Die Resultate darf man dann als erste, aber insbesondere für die Geschwindigkeitsänderung gute Näherung auffassen, da ja die Aufgabe einer guten Regulierung darin besteht, diese Aenderung in enge Grenzen einzuschliessen.

Entwickelung der Hauptgleichungen.

Es bezeichnen für das folgende:

M die auf einen mittleren Radius R_o reducierte Schwungmasse des Laufrades und aller damit verbundenen Teile (Räder, Transmission etc.),

v die auf den Radius R_o bezogene Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades,

P die momentane Umfangskraft am Radius R_o,

Q die konstante Grösse des Widerstandes, reduciert auf den Radius R_o,

H das Gefälle, gerechnet von der Mündung des Leitkanales bis zum Oberwasserspiegel,

L die gesamte Länge der Zuleitung,

d_o den constant vorausgesetzten Durchmesser der Zuleitung,

F den Querschnitt der Zuleitung,

c die Geschwindigkeit in der Zuleitung,

l die auf den Querschnitt des Zuflussrohres reducierte Länge des Windkessels (seines Luftraumes), so dass Fl = dem Volumen desselben wird,

p den Ueberdruck des Aufschlagswassers über die Atmosphäre, gemessen knapp vor dem Leitapparat,

γ das specifische Gewicht des Wassers,

g die Beschleunigung der Schwere,

$u = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta_o}\,\frac{p}{\gamma}}$ die Ausflussgeschwindigkeit aus dem Leitapparat (ζ_o = Widerstands-Koefficient),

f den Ausflussquerschnitt des Leitkanales,

s den Regulatorhub, gerechnet von einem beliebigen Anfangspunkt aus,

$v_o, P_o, c_o, l_o, p_o, u_o, f_o, s_o$ die Anfangswerte der gleichnamigen Grössen für die Zeit $t = 0$,

$x = \frac{v - v_o}{v_o}$ die „verhältnismässige" Aenderung der anfänglichen Umfangsgeschwindigkeit (soll kurz auch „prozentische" Aenderung genannt werden; den Betrag der Aenderung in Prozenten des ursprünglichen Wertes giebt $100\,x$),

$y = \frac{c - c_o}{c_o}$ die „prozentische" Aenderung von c_o,

$z = \frac{p - p_o}{p_o}$ die „prozentische" Aenderung von p_o,

v_1 resp. v_2 die der unteren, resp. der oberen Grenzlage des Regulators entsprechenden Umfangsgeschwindigkeiten,

$\delta = \frac{v_2 - v_1}{v_o}$ den totalen Ungleichförmigkeitsgrad des Regulators,

$h_o = \frac{p_o}{\gamma}$ die piëzometrische Ueberdruckhöhe knapp vor dem Leitapparat,

$\zeta_r\,\frac{L}{d_o}\,\frac{c_o^2}{2g}$ Widerstandshöhe für die Zuleitung (inklusive Krümmungen etc.), Einheiten Meter und Kilogramm.

Zu jeder Umfangsgeschwindigkeit v gehört eine bestimmte Gleichgewichtslage des Regulators, also ist s eine Funktion von v. Ferner ist die Absperrzunge durch einen zwangläufigen Mechanismus mit dem Regulator verbunden und muss dessen Bewegungen mitmachen; demnach ist f eine Funktion von s. Substituieren wir in letztere s als Funktion von v, so erhalten wir auch f = einer Funktion von v. Für unendlich kleine Differenzen darf man dann setzen.

$$f = f_o + (v - v_o)\left(\frac{df}{dv}\right)_{v=v_o}.$$

Führen wir die Bezeichnung ein $\alpha_o = -\frac{v_o}{f_o}\left(\frac{df}{dv}\right)_{v=v_o}$ (1)

so erhalten wir $f = f_o\left(1 - \alpha_o\,\frac{v - v_o}{v_o}\right) = f_o(1 - \alpha_o\,x)$. (1a)

Es ist $\alpha_o f_o : f_1$ ein Mass der Astasie des Regulators; denn nehmen wir im einfachsten Fall einen linearen Zusammenhang zwischen f und v an, so dass $f = f_1\,\frac{v_2 - v}{v_2 - v_1}$, also für $v = v_2$ $f = 0$ (obere Grenzlage des Regulators), für $v = v_1$ $f = f_1$ = dem voll geöffneten Leitradquerschnitt wird, so folgt $\left(\frac{df}{dv}\right)_{v=v_o} = -\frac{f_1}{v_2 - v_1}$ und damit

$$f_o\,\alpha_o = f_1\,\frac{v_o}{v_2 - v_1} = \frac{f_1}{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

Demnach ist $f_o\,\alpha_o : f_1$ um so grösser, je kleiner die Ungleichförmigkeit, d. h. je grösser die Astasie des Regulators ist. α_o selbst variiert stark mit dem Verhältnis $\frac{f_1}{f_o}$. Als Mittelwert wollen wir wählen $\frac{f_1}{f_o} = 2$; $\delta = \frac{1}{25}$; somit $\alpha_o = 50$. Da wir eine Druckturbine voraussetzen, wird die Ausflussgeschwindigkeit u bei unendlich kleiner Differenz $p - p_o$ darstellbar sein wie folgt:

$$u = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\,\frac{p}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\left(1 + \frac{p - p_o}{p_o}\right)\frac{p_o}{\gamma}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2g}{(1+\zeta)}\,\frac{p_o}{\gamma}}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{p - p_o}{p_o}\right\}$$

oder
$$u = u_o\left(1 + \frac{1}{2}\,z\right)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit im Druckrohr gegen u vernachlässigt werden könne, was wohl zumeist zutrifft.

Die Umfangskraft P finden wir als Quotienten aus Leistung und Geschwindigkeit; somit ist, wenn η den hydraulischen Wirkungsgrad bedeutet:

$$P = \left(fu\,\frac{\gamma}{g}\right)\frac{u^2}{2}\,\eta\cdot\frac{1}{v}$$

Der Verlauf des Wirkungsgrades wird für konstantes u bekanntlich durch eine parabelartige Kurve dargestellt, deren Scheitel dem normalen Gange entsprechen soll; für konstantes v und variables u wird die Kurve komplizierter, besitzt jedoch auch ein Maximum im Punkte des normalen Ganges. Wir können demnach η, da hier u, v sich nur wenig ändern sollen, als konstant voraussetzen. Bilden wir von P das logarithmische Differential und ersetzen dP durch $P - P_o$ etc., so erhalten wir

$$\frac{P - P_o}{P_o} = -\frac{v - v_o}{v_o} + \frac{f - f_o}{f_o} + 3\,\frac{u - u_o}{u_o}$$

oder in den Ausdrücken x, y, z:

$$\frac{P - P_o}{P_o} = -(\alpha_o + 1)\,x + \frac{3}{2}\,z.$$

Die Bewegungsgleichung des Laufrades lautet nun:

$$M\,\frac{dv}{dt} = P - Q = (P_o - Q) + (P - P_o) \qquad \text{oder}$$

$$\frac{M\,v_o}{P_o}\,\frac{dx}{dt} = \frac{P_o - Q}{P_o} - (\alpha_o + 1)\,x + \frac{3}{2}\,z \quad . \quad (2)$$

Die Differentialgleichung für die Bewegung der Druckwassersäule ergiebt sich durch Anwendung des Principes der lebendigen Kraft. Während des Zeitelementes dt tritt in die Zuleitung oben das elementare Wasservolumen $Fcdt$ ein, und wird von der Geschwindigkeit c_o' im Oberwassergraben auf die Geschwindigkeit c beschleunigt. Wir nehmen an, die Widerstände seien hinreichend klein und c_o' von c resp. c_o hinreichend wenig verschieden, um von der Aenderung der lebendigen Kraft dieses Elementes absehen zu können. Die Wassermasse in der Zuleitung wird von c auf $c + dc$ beschleunigt; demnach erfährt ihre lebendige Kraft einen Zuwachs von $FL\,\frac{\gamma}{g}\,c\,dc$, mkg (g = Beschleunigung der Schwere) und dieser Zuwachs muss gleich sein der algebraischen Summe aller auf die Wassermasse übertragenen Arbeiten. Solche sind: 1. die Arbeit der Schwerkraft = dem Produkt aus Gesamtgewicht in den Elementarweg des Schwerpunktes = dem Produkt aus dem Elementargewicht $F c d t \gamma$ in das ganze Gefälle, also $= F c d t \gamma H$; 2. die Arbeit der Wasserpressung im unteren Endquerschnitt (abzüglich derjenigen auf den oberen Querschnitt) $= - F p . c d t$; 3. die Reibungsarbeit =

$$-\int_o^L (F c d t \gamma)\, \zeta_r \frac{d L}{d o} \frac{c^2}{2 g} = -(F c d t \gamma)\, \zeta_r \frac{L}{d_o} \frac{c^2}{2 g};$$

wir erhalten also

$$\frac{L \gamma}{g} \frac{d c}{d t} = H \gamma - p - \zeta_o \frac{L}{d_o} \frac{c^2}{2 g} \gamma.$$

Substituieren wir hier die Werte $c = c_o (1 + y)$; $p = p_o (1 + z)$, $\frac{d c}{d t} = c_o \frac{d y}{d t}$ und vernachlässigen wir alle Glieder mit höheren Potenzen von y und z; beachten wir schliesslich, dass für $t = o$ auch $\frac{d c}{d t} = o$, d. h. dass

$$o = H \gamma - p_o - \zeta_r \frac{L}{d_o} \frac{c_o^2}{2 g} \gamma$$

so resultiert nach Division mit p_o und Einführung von $h_o = \frac{p_o}{\gamma}$

$$\left(\frac{L}{h_o} \frac{c_o}{g}\right) \frac{d y}{d t} = -\left(\frac{\zeta_r}{g} \frac{L}{h_o} \frac{c_o^2}{d_o}\right) y - z \quad . \quad . \quad (3)$$

Eine dritte Relation ergiebt sich aus der Druckschwankung im Windkessel. Es hat keinen Sinn, eventuelle Abweichungen von der isothermischen Zustandsänderung für die im Windkessel eingeschlossene Luft zu berücksichtigen; wir erhalten demnach, wenn p_a die atmosphärische Pressung bedeutet:

$$(p_o + p_a)\, l_o = (p + p_a)\, l =$$
$$+ (p_o + p_a)\left(1 + \frac{p - p_o}{p_o + p_a}\right) l_o \left(1 + \frac{l - l_o}{l_o}\right).$$

Bei kleinen Differenzen $p - p_o$ und $l - l_o$ folgt hieraus

$$\frac{p - p_o}{p + p_a} = -\frac{l - l_o}{l_o}.$$

Im Zeitelement $d t$ fliesst dem Windkessel das Volumen $F c d t$ zu, von demselben ab: $f u d t$; die Differenz giebt die Kompression des Windkesselinhaltes:

$$- F d l = F c d t - f u d t.$$

Substituieren wir hier $\frac{d l}{d t} = -\frac{l_o}{p_o + p_a} \frac{d p}{d t} =$

$$= -\frac{l_o\, p_o}{p_o + p_a} \frac{d z}{d t},$$

erner $F c_o = f_o u_o$; $f u = f_o (1 - \alpha_o x)\, u_o \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cong$

$$\cong f_o\, u_o \left(1 - \alpha_o x + \frac{z}{2}\right)$$

und $c = c_o (1 + y)$, so erhalten wir

$$\frac{l_o}{c_o} \frac{p_o}{p_o + p_a} \frac{d z}{d t} = \alpha_o x + y - \frac{z}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Im Interesse kürzerer Schreibweise führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} T_1 = \frac{M v_o}{P_o},\; T_2 = \frac{L}{h_o} \frac{c_o}{g},\; T_3 = \frac{l_o}{c_o} \frac{p_o}{p_o + p_a}, \\ \frac{P_o - Q}{P_o} = \Pi,\; \frac{\zeta_r}{g} \frac{L}{h_o} \frac{c_o^2}{d_o} = \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Es sind hier ε, Π reine Zahlen, T_1, T_2, T_3 der Dimension nach Zeitgrössen, deren mechanische Bedeutung aus den angeschriebenen Ausdrücken leicht abzuleiten ist. Es bedeutet insbesondere:

T_1 die Zeit, welche notwendig ist, um die Masse M durch die konstante Kraft P_o von o bis zur Geschwindigkeit v_o zu beschleunigen. Es ist T_1 ein Mass der Schwungradgrösse.

T_2 ist ein Mass der Leitungslänge,

T_3 ist ein Mass der Windkesselgrösse,

ε ist ein Mass der Reibungswiderstandshöhe,

Π ist ein Mass der verhältnismässigen („prozentischen") Belastungsänderung.

Die Hauptgleichungen (2), (3), (4) erscheinen nun in der Form:

$$\left.\begin{aligned} T_1 \frac{d t}{d t} + (\alpha_o + 1)\, x - \frac{3}{2} z = \Pi \\ T_2 \frac{d \eta}{d t} + \varepsilon \eta + z = o \\ T_3 \frac{d z}{d t} - \alpha_o x - y + \frac{1}{2} z = o \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Um das konstante Glied Π zu beseitigen, werde gesetzt $x = \xi + \xi_1$, $y = \eta + \eta_1$, $z = \zeta + \zeta_1$, wo $\xi_1\ \eta_1\ \xi_1$ konstant sind. Es ergiebt sich dann

$$\left.\begin{aligned} T_1 \frac{d \xi}{d t} + (\alpha_o + 1)\, \xi - \frac{3}{2} \zeta = o \\ T_2 \frac{d \eta}{d t} + \varepsilon \eta + \zeta = o \\ T_3 \frac{d \zeta}{d t} - \alpha_o \xi = y + \frac{1}{2} \zeta = o \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

sofern die Konstanten ξ_1, η_1, ζ_1 bestimmt werden aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_o + 1)\, \xi_1 - \frac{3}{2} \zeta_1 = \Pi \\ \varepsilon \eta_1 + \zeta_1 = o \\ -\alpha_o \xi_1 - \eta_1 + \frac{1}{2} \zeta_1 = o \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Es ist bekannt, dass die Lösungen für ξ, η, ζ aus den Gleichungen (7) sich darstellen als Summen von Exponentialausdrücken mit konstanten Koefficienten. Wir wenden deshalb die Methode des Ansatzes mit unbestimmten Koefficienten an:

$$\xi = a e^{\varphi t} \qquad \eta = b e^{\varphi t} \qquad \zeta = c e^{\varphi t}$$

und substituieren diese Werte in das System (7). Nach Kürzung mit $e^{\varphi t}$ ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} (T_1 \varphi + \alpha_o + 1)\, a - \frac{3}{2} c = o \\ (T_2 \varphi + \varepsilon)\, b + c = o \\ -\alpha_o a - b + \left(T_3 \varphi + \frac{1}{2}\right) c = o \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Damit diese Gleichungen gleichzeitig bestehen können, muss bekanntlich die Determinante ihrer Koefficienten verschwinden, d. h. es muss φ aus folgender, sogenannter „charakteristischen" Gleichung berechnet werden:

$$T_1\, T_2\, T_3\, \varphi^3 + \left[(\alpha_o + 1)\, T_2\, T_3 + \varepsilon\, T_2\, T_1 + \frac{1}{2} T_1\, T_2\right] \varphi^2 +$$
$$+ \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) T_1 - \left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) T_2 + (\alpha_o + 1)\, \varepsilon\, T_3\right] \varphi +$$
$$+ (1 - \varepsilon)\left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = o \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Gleichung liefert drei Werte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, für φ, welche einzeln in (9) substituiert je drei Gleichungen zur Bestimmung von a, b, c, also insgesamt drei Wertsysteme dieser Konstanten ergeben. Da indessen die rechten Seiten der Gleichungen (9) = o sind, bleiben nur die Verhältnisse $a : b : c$ vorgeschrieben und es muss zur vollständigen Bestimmung die Anfangsbedingung herbeigezogen werden. Um das genannte Verhältnis zu berechnen, bezeichnen wir mit a_k, b_k, c_k eines der möglichen Wertsysteme, welches zur Wurzel φ_k gehört; wählen wir dann etwa die zweite und dritte der Gleichungen (9) zur Berechnung, so folgt

$$a_k : b_k : c_k = \left[(T_2\, \varphi_k + \varepsilon)\left(T_3\, \varphi_k + \frac{1}{2}\right) + 1\right] : -\alpha_o : +$$
$$+ \alpha_o\, (T_2\, \varphi_k + \varepsilon).$$

Wenn demnach λ, μ', ν' drei willkürliche Konstanten bedeuten, so erscheint die vollständige Lösung von (7) und damit jene von (6) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} x = \xi_1 + \lambda\, a_1\, e^{\varphi_1 t} + \mu'\, a_2\, e^{\varphi_2 t} + \nu'\, a_3\, e^{\varphi_3 t} \\ y = \eta_1 + \lambda\, b_1\, e^{\varphi_1 t} + \mu'\, b_2\, e^{\varphi_2 t} + \nu'\, b_3\, e^{\varphi_3 t} \\ z = \zeta_1 + \lambda\, c_1\, e^{\varphi_1 t} + \mu'\, c_2\, e^{\varphi_2 t} + \nu'\, c_3\, e^{\varphi_3 t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (11)$$

Als a_1, a_2 .... wählen wir am einfachsten die Werte

$$\left.\begin{aligned} a_k &= (T_2\, \varphi_k + \varepsilon)\left(T_3\, \varphi_k + \frac{1}{2}\right) + 1 \\ b_k &= -\alpha_o \\ c_k &= \alpha_o \left(T_2\, \varphi_k + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} k = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Die charakteristische Gleichung (10) besitzt, wie sich später zeigen wird, zumeist eine reelle (φ_1) und zwei imaginäre Wurzeln φ_2, φ_3. Diese müssen bekanntlich die Form haben: $\left.\begin{matrix}\varphi_2\\ \varphi_3\end{matrix}\right\} = r \pm s\,i$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist. In diesem Falle müssen μ', ν' ebenfalls als konjugierte komplexe Grössen gewählt werden, um die Lösungen in reelle Form zu überführen. — Es sind dann a_2, a_3 und c_2, c_3 ebenfalls konjugiert komplex und zwar

$$\left.\begin{matrix}a_2\\ a_3\end{matrix}\right\} = \alpha_2 \pm \alpha_2\, i \qquad \left.\begin{matrix}c_2\\ c_3\end{matrix}\right\} = \gamma_2 \pm \gamma_3\, i, \text{ wobei}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_2 &= T_2\,T_3\,(r^2 - s^2) + \left(\frac{T_2}{2} + T_3\,\varepsilon\right) r + \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right); \\
&\qquad\qquad \gamma_2 = \alpha_o\,(T_2\,r + \varepsilon) \\
\alpha_3 &= \left(\frac{T_2}{2} + T_3\,\varepsilon + 2\,T_2\,T_3\,r\right) s; \qquad \gamma_3 = \alpha_o\,T_2\,s,
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

während a_1, b_1, b_2, b_3, c_1 reell bleiben und nach (12) zu rechnen sind. Setzen wir schliesslich $\mu' = \mu + \nu i$, $\nu' = \mu - \nu i$ und machen Gebrauch von der Relation $e^{(r \pm si)t} = e^{rt}[\cos(st) \pm i \sin(st)]$, so resultiert:

$$\begin{aligned}
x &= \xi_1 + \lambda\,a_1\,e^{\varphi_1 t} + 2\,[(\mu\alpha_2 - \nu\alpha_3)\cos(st) - (\mu\alpha_3 + \nu\alpha_2)\sin(st)]\,e^{rt} \\
y &= \eta_1 + \lambda\,b_1\,e^{\varphi_1 t} + 2\,\alpha_o\,[-\mu\cos(st) + \nu\sin(st)]\,e^{rt} \qquad (14) \\
z &= \zeta_1 + \lambda\,c_1\,e^{\varphi_1 t} + 2\,[(\mu\gamma_2 - \nu\gamma_3)\cos(st) - (\mu\gamma_3 + \nu\gamma_2)\sin(st)]\,e^{rt}
\end{aligned}$$

Sollten zwei oder drei Wurzeln φ einander gleich werden, nimmt die Lösung wieder andere Formen an, doch soll von der Besprechung dieser ganz singulären Fälle hier abgesehen werden.

Die in den Ausdrücken (11) und (14) vorkommenden willkürlichen Konstanten λ, μ', ν' resp. λ, μ, ν sind, wie schon erwähnt, aus der Bedingung für den Anfangszustand zu bestimmen. Nun soll für $t = 0$, $x = y = z = 0$ sein; demnach ergiebt sich z. B. für den Fall imaginärer Wurzeln das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 + a_1\,\lambda + 2\,\alpha_2\,\mu - 2\,\alpha_3\,\nu &= 0 \\
\eta_1 + b_1\,\lambda - 2\,\alpha_o\,\mu &= 0 \\
\zeta_1 + c_1\,\lambda + 2\,\gamma_2\,\mu - 2\,\gamma_3\,\nu &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14\,a)$$

Aus diesen Gleichungen sind λ, μ, ν zu bestimmen.

Diskussion der Resultate.

Die Formen der Lösung in Nr. (11) und (14) zeigen, dass die Regulierung eine grundverschiedene ist, je nach der Natur der Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Im Falle imaginärer Wurzeln sind alle Ausdrücke mit periodischen Funktionen behaftet, der Uebergang vollzieht sich oscillatorisch; im Falle reeller Wurzeln treten keine Schwingungen auf, und die Werte von x, y, z nähern sich stetig bestimmten Grenzen, wenn alle Wurzeln negativ sind, oder aber sie wachsen über alle Grenzen, wenn eine der Wurzeln positiv ist. Es müssen demnach, sofern ein korrektes Regulieren möglich sein solle, folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Keine der reellen Wurzeln darf positiv sein, weil sonst der zugehörige Exponentialausdruck $e^{\varphi t}$ ins Unendliche zunimmt. Da die entwickelten Formeln für grosse Aenderungen der Werte x, y, z nur beschränkte Gültigkeit besitzen, ist hieraus zu folgern, dass der Regulator bis in die obere Grenzlage heraufgeht, also die Absperrklappe zunächst ganz schliesst, dann wieder ganz öffnet, und so zwischen den Hubbegrenzungen spielen wird, während die Pressung und die Geschwindigkeit grossen Variationen ausgesetzt sein können.

2. Im Falle komplexer Wurzeln muss der reelle Teil derselben negativ sein, sonst würden x, y, z in Form von Schwingungen mit zunehmender Amplitude um den neuen Grenzwert herum schwanken, ohne ihn je zu erreichen.

Das letzte Glied $(1 - \varepsilon)\left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$ der charakteristischen Gleichung ist fast ausnahmslos positiv, da ε sehr kleine Werte aufweist. Es wird demnach immer eine negative reelle Wurzel vorhanden sein. Wenn alle Wurzeln reell sind (und nur dann), müssen, damit Bedingung 1 erfüllt werde, auch die übrigen Koefficienten positiv sein. Dies ist der Fall, wenn

$$\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) T_1 - \left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) T_2 + (\alpha_o + 1)\,\varepsilon\,T_3 > 0 \text{ ist.} \quad (15)$$

Um die Bedingung 2 mathematisch zu formulieren, gebrauchen wir ein Verfahren, welches bereits Wischnegradsky im Civil-Ingenieur 1877, Seite 110 verwendet hat. Es werde zu diesem Behufe die charakteristische Gleichung in der Form $a\varphi^3 + b\,\varphi^2 + c\,\varphi + d = 0$ geschrieben, so dass

$$\left.\begin{aligned}
a = T_1\,T_2\,T_3;\quad b &= \left[\left(\alpha_o + 1\right) T_2\,T_3 + \varepsilon\,T_2\,T_1 + \frac{1}{2}\,T_1\,T_2\right]; \\
c &= \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) T_1 - \left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) T_2 + \left(\alpha_o + 1\right) \varepsilon\,T_3\right]; \\
d &= \left(1 - \varepsilon\right)\left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \text{ ist.}
\end{aligned}\right\} (16)$$

Wir dividieren mit a und substituieren $\varphi = \psi - \frac{b}{3a}$; dies giebt

$$\psi^3 + p\,\psi + q = 0,$$

wo $p = \left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2$; $q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right)$.

Bezeichnen wir ferner mit Δ den Ausdruck $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$, und setzen wir

$$U = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}; \quad V = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},$$

so lauten bekanntlich die expliciten Ausdrücke für die Wurzeln wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \psi_1 - \frac{b}{3a} = U + V - \frac{b}{3a} \\
\varphi_2 &= \psi_2 - \frac{b}{3a} = -\frac{1}{2}\left(U + V\right) - \\
&\qquad - \frac{b}{3a} + i\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\left(U - V\right) = r + s\,i \\
\varphi_3 &= \psi_3 - \frac{b}{3a} = -\frac{1}{2}\left(U + V\right) - \\
&\qquad - \frac{b}{3a} - i\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\left(U - V\right) = r - s\,i
\end{aligned}\right\} (17)$$

Sofern $\Delta < 0$, sind φ_2 und φ_3 imaginär; vergleicht man φ_2 mit φ_1, so ergiebt sich $\varphi_1 = -2r - \frac{b}{a}$. Wir setzen diesen Wert in die charakteristische Gleichung ein, und erhalten

$$8\,a\,r^3 + 8\,b\,r^2 + 2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + c\right] r + \left[\frac{bc}{a} - d\right] = 0.$$

r ist die einzige reelle Wurzel dieser Gleichung; das Vorzeichen derselben ist nach einem Lehrsatz der Algebra entgegengesetzt gleich dem Vorzeichen des letzten Gliedes; also wird r, d. h. der reelle Teil der komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung negativ, wenn $\frac{bc}{a} - d > 0$ ist, oder mit Substitution der Werte von a, b, c, d, wenn

$$\begin{aligned}
&\left[(\alpha_o + 1)\,T_2\,T_3 + \varepsilon\,T_3\,T_1 + \frac{1}{2}\,T_1\,T_2\right] \\
&\left[\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) T_1 - \left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) T_2 + (\alpha_o + 1)\,\varepsilon\,T_3\right] - \\
&\quad - \left[(1 - \varepsilon)\left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right] T_1\,T_2\,T_3 > 0 \quad . \quad (18)
\end{aligned}$$

Der günstigste Fall für die Regulierung (drei negative reelle Wurzeln) erfordert schliesslich neben Bedingung (15) noch $\Delta < 0$, oder in a, b, c, d ausgedrückt:

$$\frac{b^3\,d}{a^4} - \frac{1}{4}\,\frac{b^2\,c^2}{a^4} + \frac{27}{4}\,\frac{d^2}{a^2} - \frac{9}{2}\,\frac{b\,c\,d}{a^3} + \frac{c^3}{a^3} < 0 \quad (19)$$

Wischnegradsky hat am angegebenen Orte nachgewiesen, dass die Bedingung (19) die Relation (18) in sich einschliesst; also ist die Bedingung (18) die allgemeinere, welche stets erfüllt sein muss, und im Falle komplexer Wurzeln allein hinreicht.

Durch Nachrechnung numerischer Beispiele überzeugt man sich, dass die Bedingung (19) schwer realisierbar ist, da entweder übergrosse Schwungmassen oder sehr weite Leitungsrohre und Windkessel notwendig werden.

Die Relationen (18), (15), (19) gestatten die sofortige Kontrolle einer gegebenen Turbine in Bezug auf ihre Regulierfähigkeit, resp. die entsprechende Dimensionierung einer Neuanlage. Bevor zu ihrer detaillierten Diskussion geschritten wird, sollen einige sich aus denselben unmittelbar ergebenden Folgerungen angeführt werden. Es erhellt nämlich aus der Form der genannten Ausdrücke, dass die Grundwerte, welche auf die Turbine Bezug haben, in denselben nicht vereinzelt, sondern bloss in den Kombinationen T_1, T_2, T_3, ε, α_o vorkommen; die verschiedensten Turbinenanlagen, sofern ihnen dieselben Werte dieser Grössen entsprechen, werden sich demnach in Bezug auf die Regulierung gleichartig verhalten.

Betrachten wir z. B. $T_1 = \frac{M v_o}{P_o}$ und schreiben wir diesen Ausdruck in der Form $T_1 = 2 \left(\frac{M v_o^2}{2}\right)\left(\frac{1}{P_o v_o}\right)$, so können wir den Satz aussprechen:

In Bezug auf die Regulierung einer Turbine ist nicht das Gewicht massgebend, sondern die lebendige Kraft der Schwungmassen pro Einheit der Leistung.

Ferner war $T_2 = \left(\frac{L}{h_o}\right) \frac{c_o}{g}$ und $\varepsilon = \frac{\zeta_r}{g} \left(\frac{L}{h_o}\right) \frac{c_o^2}{d_o}$; es kommt demnach die Leitungslänge nur im Verhältnis $\left(\frac{L}{h_o}\right)$ welches angenähert $= \left(\frac{L}{H}\right)$ ist, vor; hieraus folgt:

Zwei Turbinen mit gleichem Verhältnis der Leitungslänge zum Gefälle sind in Bezug auf die Regulierung gleichwertig.

Es besteht kein principieller Unterschied zwischen Hoch- und Niederdruckturbinen. Nur ist zu beachten, dass „Gleichwertigkeit“ hier besagen will: gleiche „prozentische“ Aenderung der Pressung und der Geschwindigkeit. Die absolute Grösse dieser Aenderung kann also sehr stark verschieden sein.

Schliesslich haben wir $T_3 = \frac{l_o}{c_o} \frac{p_o}{p_o + p_a}$, und es kommt die Grösse des Windkessels, l_o, bloss an dieser Stelle vor; man kann demnach sagen:

Das Windkesselvolumen ist der absoluten Grösse nach massgebend, und nicht etwa mit der Leitungslänge ins Verhältnis zu setzen; oder: **Abgesehen vom meist nahe der Einheit gleichen Faktor $\frac{p_o}{p_o + p_a}$ erheischen bei gleichem P_o, c_o, $\left(\frac{L}{h_o}\right)$ die kürzeste und die längste Rohrleitung dasselbe Windkesselvolumen.**

Specialfälle.

Um die allgemeinen Resultate übersichtlicher zu machen, sollen jetzt eine Reihe einfacher Specialfälle besprochen werden. Als solche werden gewählt:

I. Turbine ohne Windkessel mit Vernachlässigung der Flüssigkeitsreibung.

Eine Anlage dieser Art ist charakterisiert durch die Werte $T_3 = 0$, $\varepsilon = 0$. Man findet

$$\xi_1 = \frac{\Pi}{\alpha_o + 1}; \quad \eta_1 = -\frac{\Pi \alpha_o}{\alpha_o + 1}; \quad \zeta_1 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung wird quadratisch;

$$T_1 T_2 \varphi^2 + [2 T_1 - (2 \alpha_o - 1) T_2] \varphi + 2 (\alpha_o + 1) = 0.$$

Da α_o im Mittel $= 50$ ist, wollen wir 1 neben α_o vernachlässigen, und schreiben

$$T_1 T_2 \varphi^2 + 2 [T_1 - \alpha_o T_2] \varphi + 2 \alpha_o = 0.$$

Die Bedingung, dass die Wurzeln dieser Gleichung reell und negativ seien, lautet:

$$T_1 - \alpha_o T_2 > 0, \text{ und } (T_1 - \alpha_o T_2)^2 - 2 \alpha_o T_1 T_2 > 0 \text{ oder}$$
$$[T_1 - (2 + \sqrt{3}) \alpha_o T_2] [T_1 - (2 - \sqrt{3}) \alpha_o T_2] > 0.$$

Beide Faktoren des letzten Ausdruckes müssen das gleiche Vorzeichen haben, und da schon $T_1 > \alpha_o T_2$ ist, so folgt

$$T_1 > (2 + \sqrt{3}) \alpha_o T_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Die Wurzeln werden imaginär, mit negativem reellen Teil, sofern

$$(2 + \sqrt{3}) \alpha_o T_2 > T_1 > \alpha_o T_2 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus (22) folgt: **Die Schwungmassengrösse einer geschlossenen Turbine mit Zuleitung, ohne Windkessel, ist an einen bestimmten Kleinstwert gebunden $[T_1 = \alpha_o T_2]$; unterschreitet man diesen, so treten Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen mit zunehmender Amplitude auf.**

Im Falle imaginärer Wurzeln $\varphi_1 = r + si$; $\varphi_2 = r - si$, findet man schliesslich die vollständigen Lösungen in der Form:

$$\left.\begin{aligned} x &= \Pi \Big[\frac{1}{\alpha_o} + \frac{1}{\alpha_o} \Big\{ -\cos(st) + \\ &\qquad + \left(\frac{T_2}{2} \frac{r^2 + s^2}{s} + \frac{r}{s} \right) \sin(st) \Big\} e^{rt} \Big] \\ y &= \Pi \Big[-1 + \Big\{ \cos(st) - \frac{r}{s} \sin(st) \Big\} e^{rt} \Big] \\ z &= \Pi T_2 \frac{r^2 + s^2}{s} \sin(st) e^{rt} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Wählen wir die Schwungmasse entsprechend dem Grenzfall $T_1 = \alpha_o T_2$, so ergiebt sich $r = 0$; $s = \frac{\sqrt{2}}{T_2}$, und hieraus für Druckschwankung z

die Schwingungsperiode $T' = \frac{2 \pi}{s} = \pi \sqrt{2}\, T_2$

die Amplitude $R = \Pi \sqrt{2}$.

Daraus folgt der Satz:

Bei Anwendung der minimalen, noch zulässigen Schwungmasse, wobei sich Schwingungen mit konstanter, nur durch die Reibung nach und nach verkleinerter Amplitude einstellen, ist die Grösse der Druckschwankung unabhängig von den Dimensionen der Turbine, und zwar stets $= \sqrt{2}$ mal der prozentischen Belastungsänderung.

II. Turbine ohne Windkessel; mit Berücksichtigung der Reibung.

Hier ist $T_3 = 0$, die charakteristische Gleichung wird

$$\left[\varepsilon T_3 T_1 + \frac{1}{2} T_1 T_2\right] \varphi^2 + \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) T_1 - (\alpha_o - 1) T_2\right] \varphi +$$
$$+ \left[(1 - \varepsilon)\left(\alpha_o - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right] = 0.$$

Auch hier werde 1 neben α_o vernachlässigt. Es folgt als Bedingung für abnehmende Schwingungen

$$\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) T_1 - \alpha_o T_2 > 0, \text{ oder } T_1 > \frac{\alpha_o T_2}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \quad . \quad (24)$$

Im Falle I war nach (22) $T_1 > \alpha_o T_2$. ε ist im allgemeinen klein; z. B. für $\frac{L}{h_o} = 10$, $c_o = 1$, $\zeta_r = 0.03$, $d_o = 0.2$ $\varepsilon = \zeta_r \frac{L}{h_o} \frac{c_o^2}{g\, d_o} = 0.15$. Es unterscheidet sich die nach (25) berechnete Schwungmasse nur um einige Prozente von der nach (22) berechneten.

Der Einfluss der Bewegungswiderstände ist ein untergeordneter. (Fortsetzung folgt.)

Die Vollendung des Gotthardbahn-Netzes.

(Mit einer Tafel.)

Nachdem die Anlage des zweiten Geleises auf der Bergstrecke der Gotthardbahn Ende Mai dieses Jahres ihren Abschluss gefunden, hat die Gotthardbahn-Gesellschaft noch ein letztes Erfordernis zu erfüllen, um dem ursprünglichen Staatsvertrag vom 15. Oktober 1869, der durch den Zusatzvertrag vom 12. März 1878 in verschiedenen Richtungen beschränkt worden ist, Genüge zu leisten. Es betrifft dies den Bau der nördlichen Zufahrtslinien: Luzern-Küssnacht-Immensee und Zug-St. Adrian-Goldau. Bereits ist die erstere Linie in Angriff genommen und da nun auch die Unterhandlungen mit der Nordostbahn-Gesellschaft und der Stadt Zug, betreffend die neue Bahnhof-Anlage daselbst, beendigt sind, so wird es voraussichtlich nicht mehr lange dauern, bis auch auf dieser letzteren Strecke die Bauthätigkeit beginnen wird. Durch die Vollendung dieser Strecke im Verein mit der bereits im Bau befindlichen Zufahrtslinie Zürich-Thalweil-Zug erhält die nordöstliche Schweiz die schon längst erhoffte kürzere Verbindung mit dem Gotthard.

Auf beifolgender Tafel, die wir der Gefälligkeit der Herausgeber der schon mehrfach erwähnten Festschrift der Sektion Vierwaldstätte verdanken, ist das generelle Trace der beiden Zufahrtsstrecken durch eine rote Linie angegeben, ebenso auch ein Teil der Traces der im vergangenen Sommer eröffneten Stanserhornbahn. Die Karte zeigt ferner, wie sehr die Verkehrsinteressen dieses Teiles unseres Landes durch die Anlage neuer Eisenbahnverbindungen (Südostbahn, Brünigbahn, Pilatusbahn, Bürgenstockbahn, Strassenbahn Kriens-Luzern) in letzter Zeit gefördert worden sind.