

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 21/22 (1893)
Heft: 19

Artikel: Ueber die Regulierung von Turbinen
Autor: Stodola, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18200>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber die Regulierung von Turbinen. III. — Aus der Baugeschichte der Stadt Luzern. IV. (Schluss.) — Zur Frage der Rauchbelästigung. — Miscellanea: Versuche mit Gasheizöfen. Schienensstoss. Die Jura-Simplon-Bahn hat bei der schweiz. Industriegesellschaft 104 dreiaxige Personenwagen bestellt. Die neuen städtischen Wasser-

werke am Müggelsee zu Berlin. — Konkurrenzen: Jonas Furrer-Denkmal in Winterthur. — Realschule in Stuttgart. — Nekrologie: † Ludwig Maring. † Dr. Hermann Seger. — Berichtigung. — Vereinsnachrichten: Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. Stellenvermittlung. Hierzu eine Tafel: Plan der Stadt Luzern 1890.

Ueber die Regulierung von Turbinen.

Von *Aurel Stodola*, Professor am eidg. Polytechnikum in Zürich.

III.

II. Regulierung mit langsam wirkendem Hilfsmotor.

Das Wesen dieser Regulierungsart ergibt sich aus folgender Betrachtung. Bezeichnen wir mit *S* jenen Punkt des Regulators, auf den sich der Hub *s* desselben bezieht. Mit dem Hilfsmotor, der den Regulierschieber bethätigt, denken wir uns einen ideellen, widerstandslosen Mechanismus von solcher Beschaffenheit verbunden, dass ein Punkt *S'* desselben in unmittelbarer Nachbarschaft des Punktes *S* eine mit diesem kongruente Bahn beschreibt und im Beharrungszustande mit *S* zusammenfällt. Der Hub von *S'* werde mit *s'* bezeichnet, und von demselben Anfangspunkte aus gerechnet, wie *s*, so dass für den Beharrungszustand stets *s' = s*, und insbesondere für den Anfangszustand *s' = s₀* ist. Sowohl *s* wie *s'* sollen nach jener Richtung als positiv zählen, für welche einem Wachsen der Geschwindigkeit eine Zunahme der beiden entspricht. Bewirkt der Regulator infolge einer Belastungsänderung eine Verschiebung des Punktes *S* nach irgend einer Richtung, so nimmt der Punkt *S'* sofort eine Bewegung in gleichem Sinne an, allein mit einer durch den Hilfsmotor bedingten Geschwindigkeit, die verschieden ist von derjenigen von *S*. Die Bewegung und damit die Regulierung dauern so lange an, bis *S'* wieder mit *S* zusammenfällt. Bewegt sich *S* zurück, muss auch *S'* ihm folgen.

Das Charakteristische der Anordnung besteht also darin, dass so lange als *s' = s*, der Hilfsmotor in Ruhe verharrt; dass hingegen eine Bewegung im Sinne von *S* eintritt, wenn *s' < s* ist. Dieses Verhältnis kann für die Rechnung am bequemsten dargestellt werden durch die Annahme

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_0 \frac{s - s'}{s_0} \dots \dots \dots (30)$$

d. h. durch die Voraussetzung, die Geschwindigkeit des Punktes *S'* sei proportional dem Abstände der Punkte *S* und *S'* von einander. Da (*s - s'*), wenn *s' > s* ist, negativ wird, ist durch den Ausdruck (30) auch der Bewegungssinn richtig dargestellt.

Der Hub des statischen und als masselos vorausgesetzten Regulators ist eine Funktion der Turbinengeschwindigkeit und kann für kleine Aenderungen der letzteren einfach proportional gesetzt werden, d. h. wir können annehmen

$$\frac{s - s_0}{s_0} = \alpha \frac{v - v_0}{v_0} = \alpha x \dots \dots \dots (31)$$

Wir führen jetzt eine neue Variable ein, definiert durch die Gleichung

$$\frac{s' - s_0}{s_0} = \alpha w \dots \dots \dots (32)$$

Es ist somit *w* eine reine Zahl, proportional der „prozentischen“ Aenderung des Hubes *s'*. Wir schreiben die Gleichung (30) nun in der Form:

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_0 \left[\frac{s - s_0}{s_0} + \frac{s_0 - s'}{s_0} \right];$$

ferner setzen wir:

$$T_0 = \frac{s_0}{v_0}$$

und führen diese Grösse, sowie *x* und *w* in den Ausdruck für $\frac{ds'}{dt}$ ein. Dies ergibt

$$T_0 \frac{dw}{dt} = x - w \dots \dots \dots (33)$$

Die mechanische Bedeutung der Grösse *T₀* erhellt aus folgendem: Die Geschwindigkeit $\frac{ds'}{dt}$ ist am grössten, wenn die Differenz *s - s'* ein Maximum geworden ist. Dies findet statt, wenn sich der Punkt *S* in der oberen, und *S'* in der unteren Grenzlage befindet, oder umgekehrt. Dann ist aber *s - s'* gleich dem ganzen Hube des Regulators, den wir vorübergehend mit *s_r* bezeichnen wollen, und wir haben

$$\left(\frac{ds'}{dt}\right)_{max} = \sigma_0 \frac{s_r}{s_0}; \text{ hieraus } T_0 = \frac{s_r}{\left(\frac{ds'}{dt}\right)_{max}} \quad (34 a)$$

d. h. *T₀* ist jene Zeit, welche der Hilfsmotor benötigen würde, um alle Leitkanäle zu schliessen (oder zu öffnen), wenn die ganze Bewegung mit der maximalen Geschwindigkeit vor sich ginge. Wir wollen *T₀* der Kürze halber die „Regulierungsdauer“ nennen. $\frac{1}{T_0}$ bildet dann einen Masstab für die „Regulierungsgeschwindigkeit“. Man findet für die wirkliche Zeitdauer, während welcher der Weg *s₂' - s₁'* bei konstantem *s* beschrieben wird, durch Integration den Wert

$$t_0 = T_0 \log n \frac{s_1' - s}{s_2' - s}$$

Beträgt die Differenz *s₂' - s* in der Endlage z. B. $\frac{1}{100}$ der anfänglichen Differenz *s₁' - s*, so wird *t₀* = 4,6 *T₀*; hingegen für *s₂' - s* = 0 wird *t₀* = ∞, d. h. das letzte Wegelement, welches den Punkt *S'* zum Zusammenfallen mit *S* bringt, wird erst in unendlich langer Zeit zurückgelegt. Diese Eigentümlichkeit der obigen Formel stellt in ziemlich richtiger Weise den bei jedem Hilfsmotor vorhandenen „toten Gang“ dar, welcher (unterstützt durch die Ueberdeckung der Steuerorgane) bewirkt, dass der Motor nie genau in die dem Regulatorhube entsprechende Lage gelangen kann, sondern stets etwas über oder unter derselben stehen bleiben muss.

Für jene Motoren, welche, wie die Klinkenmechanismen, mit konstanter Geschwindigkeit regulieren, werden die zu entwickelnden Formeln nur beschränkte Gültigkeit besitzen. Man kann etwa das oben berechnete *t₀*, welches die Zeit zum Schliessen von 99% aller Leitkanäle darstellt der faktischen Schliessungsdauer dieser Motoren gleich setzen, oder auch den Wert von *T₀* lediglich durch Schätzung bestimmen.

Die anderen Hauptgleichungen lassen sich aus den im ersten Abschnitt entwickelten leicht herleiten.

Für die Bewegung der Schwungmasse gilt, wie dort:

$$\frac{Mv_0}{P_0} \frac{dx}{dt} = \frac{P - Q}{P_0} = \Pi + \frac{f - f_0}{f_0} - \frac{v - v_0}{v_0} + 3 \frac{u - u_0}{u_0}$$

Wegen der relativen Unabhängigkeit der Punkte *S* und *S'* von einander, ist der Querschnitt *f* unmittelbar nur eine Funktion von *s'*, welche wir für kleine Aenderungen wieder linear voraussetzen können. Es wird demnach

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\beta \frac{s' - s_0}{s_0} = -\alpha\beta w$$

Hierin ist $\alpha\beta$ = dem Koeffizienten α_0 des vorigen Abschnittes, denn im Beharrungszustande ist *w* = *x*, also

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\alpha\beta x = -\alpha_0 x$$

Mit obigem Wert für die Querschnittsänderung und mit den Bezeichnungen des ersten Abschnittes ergibt sich dann

$$T_1 \frac{dx}{dt} = \Pi - \alpha_0 w - x + \frac{3}{2} \tau$$

Die Gleichung für die Beschleunigung der Druckwassersäule bleibt ungeändert, und in der Gleichung für die Schwankung des Windkessel-Wasserspiegels ist bloss *x* durch *w* zu ersetzen. Wir erhalten demnach das folgende System von Grundgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} T_0 \frac{dw}{dt} + w - x &= 0 \\ T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2} \chi &= II \\ T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + \chi &= 0 \\ T_3 \frac{dz}{dt} - \alpha_0 w - y + \frac{1}{2} \chi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

Die Integrierung obiger Gleichungen ist nach dem im ersten Abschnitt benutzten Schema durchzuführen. Da indessen die charakteristische Gleichung vom vierten Grade ist, lassen sich aus derselben nicht so leicht allgemeine Folgerungen ziehen. Wir beschränken deshalb die Untersuchung auf den Fall, dass kein Windkessel vorhanden ist, d. h. dass $T_3 = 0$ wird. Ebenso werde $\varepsilon = 0$ gesetzt, da wir gesehen haben, dass, soferne kein Windkessel vorhanden ist, diese Grösse nur einen untergeordneten Einfluss auf die Resultate ausübt.

Man kann dann aus der letzten der Gleichungen (35) χ berechnen und in die drei ersten substituieren. Dies ergibt:

$$\left. \begin{aligned} T_0 \frac{dw}{dt} + w - x &= 0 \\ T_1 \frac{dx}{dt} - 2 \alpha_0 w + x - 3 y &= II \\ T_2 \frac{dy}{dt} + 2 \alpha_0 w + 2 y &= 0 \end{aligned} \right\} (36)$$

Die Lösung dieses Systemes führt auf die folgende charakteristische Gleichung:

$$T_0 T_1 T_2 \varphi^3 + [2 T_0 T_1 + T_1 T_2 + T_2 T_0] \varphi^2 + [2 T_0 - (2 \alpha_0 - 1) T_2 + 2 T_1] \varphi + 2 (\alpha_0 + 1) = 0 \quad (37)$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung reell und von einander verschieden, so ist die vollständige Lösung:

$$\left. \begin{aligned} w &= \Theta + \lambda m_1 e^{f_1 t} + \mu m_2 e^{f_2 t} + \nu m_3 e^{f_3 t} \\ x &= \Theta + \lambda a_1 e^{f_1 t} + \mu a_2 e^{f_2 t} + \nu a_3 e^{f_3 t} \\ y &= -\alpha_0 \Theta + \lambda b_1 e^{f_1 t} + \mu b_2 e^{f_2 t} + \nu b_3 e^{f_3 t} \end{aligned} \right\} (38)$$

Hierin bedeuten:

$$\Theta = \frac{II}{\alpha_0 + 1} \dots \dots \dots (39)$$

$$m_k = (T_2 \varphi_k + 2); a_k = (T_0 \varphi_k + 1) (T_2 \varphi_k + 2); b_k = -2 \alpha_0; k = 1, 2, 3.$$

Die Grössen $\lambda \mu \nu$ sind zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \Theta + m_1 \lambda + m_2 \mu + m_3 \nu \\ 0 &= \Theta + a_1 \lambda + a_2 \mu + a_3 \nu \\ 0 &= -\Theta \alpha_0 + b_1 \lambda + b_2 \mu + b_3 \nu. \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

Sind hingegen zwei der Wurzeln der charakteristischen Gleichung komplex und zwar $\varphi_2 = r + si, \varphi_3 = r - si$, so ist die Lösung

$$\left. \begin{aligned} w &= \Theta + \lambda_1 m_1 e^{f_1 t} + 2 [(\mu \varrho_2 - \nu \varrho_3) \cos st - (\mu \varrho_3 + \nu \varrho_2) \sin st] e^{rt} \\ x &= \Theta + \lambda a_1 e^{f_1 t} + 2 [(\mu \alpha_2 - \nu \alpha_3) \cos st - (\mu \alpha_3 + \nu \alpha_2) \sin st] e^{rt} \\ y &= -\alpha_0 \Theta + \lambda b_1 e^{f_1 t} + 2 [(\mu \beta_2 - \nu \beta_3) \cos st - (\mu \beta_3 + \nu \beta_2) \sin st] e^{rt}. \end{aligned} \right\} (41)$$

Hier bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= (T_2 \varphi_1 + 2); a_1 = (T_0 \varphi_1 + 1) (T_2 \varphi_1 + 2); b_1 = -2 \alpha_0 \\ \varrho_2 &= (T_2 r + 2); \alpha_2 = (T_0 r + 1) (T_2 s + 2) - T_0 T_2 s^2; \\ &\beta_2 = -2 \alpha_0 \\ \varrho_3 &= T_2 s; \alpha_3 = (T_0 r + 1) T_2 s + (T_2 s + 2) T_0 s; \beta_3 = 0. \end{aligned} \right\} (41a)$$

Zur Bestimmung der Konstanten $\lambda \mu \nu$ dienen in diesem Falle die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Theta + m_1 \lambda + 2 \varrho_2 \mu - 2 \varrho_3 \nu &= 0 \\ \Theta + a_1 \lambda + 2 \alpha_2 \mu - 2 \alpha_3 \nu &= 0 \\ -\alpha_0 \Theta + b_1 \lambda + 2 \beta_2 \mu - 2 \beta_3 \nu &= 0 \end{aligned} \right\} (41b)$$

Diskussion der Resultate.

Da die Form der Lösung mit jener, die im ersten Abschnitt gefunden wurde, identisch ist, gelten die dort aufgestellten Relationen für die Koeffizienten der charakteristischen

Gleichung, mit entsprechender Uebertragung, auch hier. Der Koeffizient d ist hier immer positiv, also wird stets eine negative reelle Wurzel vorhanden sein. Wir erhalten demnach folgende Hauptbedingungen:

1. Wenn alle Wurzeln reell sind, muss $2 (T_0 + T_1) - (2 \alpha_0 - 1) T_2 > 0$ sein . . . (42)
2. Wenn zwei Wurzeln komplex sind, muss

$$[T_1 T_2 + T_2 T_0 + 2 T_0 T_1][2 T_0 + 2 T_1 - (2 \alpha_0 - 1) T_2] - 2 (\alpha_0 + 1) T_0 T_1 T_2 > 0 \text{ sein} \dots (43)$$

Das Kriterium, ob die Wurzeln reell oder imaginär sind, liefert Ausdruck (19).

Die Hauptfrage, welche hier gestellt werden kann, lautet:

Welche Grösse muss die Reguliergeschwindigkeit erhalten, damit die Regulierung mit abnehmenden Schwankungen stattfindet?

Um diese Frage beantworten zu können, ordnen wir den Ausdruck (43) nach Potenzen von T_0 und schreiben

$$F(T_0) = 2 [2 T_1 + T_2] T_0^2 + [(2 T_1 + T_0)^2 - 2 \alpha_0 T_2 (3 T_1 + T_2)] T_0 + [(2 T_1 + T_2) - 2 \alpha_0 T_2] T_1 T_2 > 0 \dots (44)$$

Denken wir T_1 und T_2 gewählt oder gegeben, so stellt die Relation (44) eine Bedingung dar, welcher T_0 genügen muss. Setzen wir

$$F(T_0) = A T_0^2 + 2 B T_0 + C = 0 \dots (45)$$

somit

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 [2 T_1 + T_2] \\ 2 B &= [(2 T_1 + T_2)^2 - 2 \alpha_0 (3 T_1 + T_2)] \\ C &= [(2 T_1 + T_2) - 2 \alpha_0 T_2] T_1 T_2 \end{aligned} \right\} (45 a)$$

und bezeichnen wir mit T_0' die kleinere, mit T_0'' die grössere der Wurzeln der Gleichung (45), d. h. es sei

$$\left. \begin{aligned} T_0' &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \\ T_0'' &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Die Wurzeln sind reell:

1. $C < 0$; es wird T_0' negativ; T_0'' positiv. Die Funktion $F(T_0)$ ist positiv, wenn T_0 entweder kleiner als T_0' oder grösser als T_0'' gewählt wird. Da indessen negative Werte von T_0 keinen Sinn haben, bleibt als Bedingung, damit $F(T_0) > 0$ sei, nur $T_0 > T_0''$.
2. $C > 0$ und $B < 0$. Es werden sowohl T_0' als auch T_0'' positiv, und zwar ersteres, wie man leicht einsieht, im allgemeinen klein. Demnach muss entweder $T_0 < T_0'$ oder $T_0 > T_0''$ stattfinden.
3. $C > 0$ und $B > 0$. Beide Wurzeln sind negativ, es genügt, wenn $T_0 > 0$ ist.

II. Die Wurzeln sind imaginär. Die Funktion $F(T_0)$ wechselt das Zeichen nicht, und da sie für $T_0 = \infty$ positiv ist, bleibt sie es für jedes beliebige T_0 . Es genügt demnach wieder $T_0 > 0$.

Das Vorzeichen der Koeffizienten hängt von T_1 und T_2 ab. Wir zerlegen zuerst B in zwei Faktoren und schreiben

$$2 B = \left[2 T_1 - \frac{1}{2} (3 \alpha_0 + \sqrt{(9 \alpha_0 + 8) \alpha_0}) T_2 \right] \left[2 T_1 - \frac{1}{2} (3 \alpha_0 - \sqrt{(9 \alpha_0 + 8) \alpha_0}) T_2 \right].$$

Der zweite Faktor ist stets positiv, also hängt das Vorzeichen nur vom ersten ab. Dieser selbst nimmt bei Vernachlässigung von 1 neben α_0 den Wert

$$2 T_1 - 3 \alpha_0 T_2$$

an; somit ist ersichtlich, dass

$$B \geq 0 \text{ wird, je nachdem } T_1 \geq 1.5 \alpha_0 T_2 \text{ ist.}$$

Im Ausdrucke für C streichen wir auch 1 neben α_0 , dann ergibt sich $C \geq 0$, je nachdem $T_1 \geq \alpha_0 T_2$ ist. A ist stets positiv.

Man überzeugt sich leicht, dass für die zumeist vorkommenden Werte von α_0 (etwa 25—100) die Determinante $B^2 - AC$ negativ ist, wenn T_1 zwischen 1.3 bis 1.4 $\alpha_0 T_2$ und 1.6 ÷ 1.75 $\alpha_0 T_2$ liegt. Man sieht demnach, dass

das Verhältnis von T_1 zu $\alpha_0 T_2$ die Natur der Wurzeln bestimmt, und zwar ergibt sich folgende Zusammenstellung:

- (α) Eine Wurzel ist posit., eine negat., wenn $0 < T_1 < \alpha_0 T_2$
- (β) Beide Wurzeln sind posit., wenn $\alpha_0 T_2 < T_1 < \text{etwa } 1.3 \alpha_0 T_2$
- (γ) Beide Wurzeln sind imaginär, wenn $1.3 \alpha_0 T_2 < T_1 < \text{etwa } 1.7 \alpha_0 T_2$
- (δ) Beide Wurzeln sind posit., wenn $1.7 \alpha_0 T_2 < T_1 < \infty$.

Beachten wir nun, dass $T_1 = \alpha_0 T_2$ zugleich die minimale Schwungmasse bestimmt, welche bei einer Turbine ohne Windkessel nach Abschnitt I notwendig ist, und bezeichnen wir diese Schwungmasse, wie schon früher, als „normale“, so können wir schliesslich die Bedingungen, unter denen $F(T_0) > 0$ wird, in folgender Form aussprechen:

1. So lange die Schwungmasse kleiner ist als die „normale“ [$T_1 < \alpha_0 T_2$] muss die Regulierungsdauer, um zunehmende Schwankungen zu vermeiden, gross gewählt werden [$T_0 > T_0''$].

2. Für etwas über der „normalen“ liegende Schwungmassengrössen [$\alpha_0 T_2 < T_1 < 1.3 \alpha_0 T_2$ bis $1.5 \alpha_0 T_2$] muss die Regulierungsdauer entweder sehr gross [$T_0 > T_0''$], oder sehr klein [$T_0 < T_0'$] werden. Das zwischen T_0' und T_0'' liegende Intervall entspricht Druck- und Geschwindigkeits-Schwankungen mit zunehmender Amplitude.

3. Bei grossen Schwungmassen [$T_1 > 1.3 \alpha_0 T_2$ bis $1.5 \alpha_0 T_2$] findet trotz noch so kleiner Reguliergeschwindigkeit ein Uebergang mit abnehmenden Schwingungen statt.

Es ist indessen wichtig, zu bemerken, dass jede Verkleinerung der Reguliergeschwindigkeit mit einer Vergrößerung der grössten vorkommenden Geschwindigkeitsänderung verbunden ist, und zwar auch dann (von einer gewissen Grenze an), wenn der Uebergang ohne periodische Schwingungen vor sich geht.

Denn denken wir uns die Reguliergeschwindigkeit ungewein klein gewählt, so wird z. B. im Falle einer Entlastung der Leitkanalquerschnitt sehr langsam verengt werden, das Laufrad wird eine beschleunigte Bewegung annehmen, die so lange andauert, bis der, mit wachsender Geschwindigkeit von selbst abnehmende Umfangsdruck, trotz wenig veränderter Wassermenge, dem Widerstande gleich geworden ist. Dieses Gleichgewicht entspricht aber einer procentischen Steigerung der Umfangsgeschwindigkeit um einen Betrag, der ungefähr gleich ist der procentischen Aenderung der Belastung. Nun erst wird, dem langsam sich verengenden Kanalquerschnitt entsprechend, die Geschwindigkeit successive abnehmen und der Beharrungszustand sich nach und nach einstellen. Die vorhin angeführten Fälle 1, ferner $T_0 > T_0''$ in 2 und Fall 3 bei sehr grossem T_0 entsprechen einer derartigen Regulierung; dieselbe wird wegen des grossen Geschwindigkeitssprunges in den meisten Fällen unbrauchbar sein, wenn schon die Schwankungen dabei abnehmen.

Zum Schlusse werde ein praktisch wichtiger Specialfall behandelt, nämlich:

Die offene Turbine.

Bei dieser kann $c_0 = 0$ gesetzt werden, und es ergibt sich die charakteristische Gleichung in der Form:

$$T_0 T_1 \varphi^2 + (T_0 + T_1) \varphi + (\alpha_0 + 1) = 0 \quad (47)$$

Interesse besitzt bloss die Bestimmung der Geschwindigkeitsschwankung. Sind die Wurzeln von (47) reell, gleich φ_1 und φ_2 , so findet man:

$$x = \frac{II}{\alpha_0 + 1} \left[1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} e^{\varphi_1 t} - \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} e^{\varphi_2 t} \right] \quad (48)$$

sind hingegen φ_1 und φ_2 komplex, und zwar:

$$\varphi_1 = r + si \quad \varphi_2 = r - si,$$

so wird

$$x = \frac{II}{\alpha_0 + 1} \left[1 + \left\{ -\cos(st) + \frac{T_0(r^2 + s^2) + r}{s} \sin(st) \right\} e^{rt} \right] \quad (49)$$

Da die Koeffizienten der Gleichung (47) sämtlich positiv sind, werden sowohl die reellen Wurzeln, als auch der reelle Teil der imaginären stets negativ. Der explicite Ausdruck für die Wurzeln lautet:

$$\left. \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{matrix} \right\} = \frac{-(T_0 + T_1) \pm \sqrt{D}}{2 T_0 T_2} \quad (50)$$

Hierin ist

$$D = (T_0 + T_1)^2 - 4 (\alpha_0 + 1) T_0 T_1 = [T_0 - \{ (2 \alpha_0 - 1) + 2 \sqrt{\alpha_0 (\alpha_0 - 1)} \} T_1] [T_0 - \{ (2 \alpha_0 - 1) - 2 \sqrt{\alpha_0 (\alpha_0 - 1)} \} T_1]$$

oder angenähert (da 1 klein ist gegen α_0)

$$D = [T_0 - 4 \alpha_0 T_1] \left[T_0 - \frac{1}{4 \alpha_0} T_1 \right].$$

Man sieht demnach, dass $D > 0$, d. h. dass die Wurzeln reell werden, wenn beide Faktoren positiv, oder beide negativ sind, d. h. wenn

$$\text{entweder } T_0 < \frac{1}{4 \alpha_0} T_1 \text{ oder } T_0 > 4 \alpha_0 T_1 \quad (51)$$

In diesem Falle findet ein Uebergang ohne Schwingung statt; allein es unterscheidet sich, wie schon oben bemerkt, die Regulierung für die Annahme $T_0 < \frac{1}{4 \alpha_0} T_1$ wesentlich von jener, für welche $T_0 > 4 \alpha_0 T_1$ ist. Bei ersterer nähert sich x unter allen Umständen ohne Schwingung der Grenze $\frac{II}{\alpha_0 + 1}$; bei letzterer wächst x zunächst über $\frac{II}{\alpha_0 + 1}$ hinaus, um dann stetig auf diesen Grenzwert abzunehmen. Man kann dies allgemein nachweisen, wie folgt. Berechnen wir aus der Gleichung $\frac{dx}{dt} = 0$ jenen Zeitwert t_m , für welchen x in Gleichung (48) zu einem Maximum wird, so erhalten wir

$$t_m = \frac{\log e}{\varphi_1 - \varphi_2} \log \frac{T_0 \varphi_2 + 1}{T_0 \varphi_1 + 1} \quad (52)$$

Hier ist, entsprechend den Gleichungen (50), $\varphi_1 - \varphi_2$ stets positiv; man kann ferner leicht nachweisen, dass

$$\frac{T_0 \varphi_2 + 1}{T_0 \varphi_1 + 1} \geq 1$$

ist, je nachdem $T_0 > 4 \alpha_0 T_1$ oder $T_0 < \frac{1}{4 \alpha_0} T_1$ ist; es wird demnach der Logarithmus und damit die Zeit t_0 unter denselben Bedingungen positiv oder negativ. Dies bedeutet, dass im Falle $T_0 < \frac{1}{4 \alpha_0} T_1$ das Maximum der Geschwindigkeit für einen negativen Zeitwert stattfindet, also in Wirklichkeit nicht mehr vorkommen wird, während umgekehrt der Fall $T_0 > 4 \alpha_0 T_1$ ein Maximum aufweist, aber nur ein einziges. Da dieses Maximum im allgemeinen sehr gross wird, darf die Regulierungsdauer nicht den Wert $4 \alpha_0 T_1$ erreichen. Durch Nachrechnung numerischer Beispiele (unter Benutzung von Gleichung (49)) kann man sich überzeugen, dass die grösste vorkommende Geschwindigkeitsänderung vom Werte $T_0 = \frac{1}{4 \alpha_0} T_1$ an rapid zunimmt, so dass nicht bloss der Wert $T_0 = 4 \alpha_0 T_1$ ausgeschlossen erscheint, sondern die Regulierungsdauer noch bedeutend mehr herabgesetzt werden muss. Man hat somit folgendes Schlussresultat:

Bei einer offenen Turbine treten nie Geschwindigkeitsschwankungen mit wachsender Amplitude auf. Bei sehr grosser oder sehr kleiner Regulierungsdauer vollzieht sich der Uebergang überhaupt ohne Schwingungen; allein mit zunehmendem T_0 wächst auch der Betrag der grössten vorkommenden Geschwindigkeitsänderung, und es ist deshalb der für diese als zulässig erachtete Grösstwert, welcher das zulässige Maximum der Regulierungsdauer bestimmt. (Schluss folgt.)

Aus der Baugeschichte der Stadt Luzern.

(Mit einer Tafel.)

IV. (Schluss.)

Das XIX. Jahrhundert.*) Im Laufe der ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts hat sich die Stadt Luzern in ihrer

*) Mit dem XVIII. Jahrhundert schliesst der Artikel des Herrn Staatsarchivar v. Liebenau. Die folgenden Angaben sind dem Abschnitt der Festschrift: Die Stadt Luzern in der neueren Zeit entnommen.