Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 23/24 (1894)

Heft: 17

Artikel: Ueber die Regulierung von Turbinen

Autor: Stodola, Aurel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18670

Ueber die Regulierung von Turbinen.

Von *Aurel Stodola*, Professor am eidgenössischen Polytechnikum.

Die über diesen Gegenstand im letzten Bande der Schweizerischen Bauzeitung veröffentlichte Studie des Verfassers stellt eine erste Uebersicht über die bei der Regulierung von Turbinen in Betracht zu ziehenden prinzipiellen Momente dar. Wie am Schlusse der Abhandlung hervorgehoben, bedarf dieselbe einer Ergänzung, namentlich in zwei Beziehungen: erstens betreffend die Wirkung einer Oelbremse, zweitens, im Zusammenhange hiemit, bezüglich der Trägheit des in Wirklichkeit nie massenlosen Regulators. Im Nachfolgenden soll der Einfluss insbesondere dieser beiden Faktoren ins Auge gefasst werden.

Dank einem ausserordentlich anerkennenswerten Entgegenkommen des Hauses Escher Wyss & Cie. und des Herrn Ing. Peter, Direktor des städt. Wasserwerkes, ist der Verfasser in der Lage, auch über Versuche an einer kleinen Probeturbine zu berichten. Es wurde ein sogen. Löffelrad von 300 *mm* Durchmesser, System Escher Wyss & Cie., von der genannten Maschinenfabrik in ihren neuen, im Hard gelegenen Werkstätten aufgestellt, während Herr Direktor Peter dazu eine ungefähr 200 *m* lange Leitung aus gusseisernen Muffenröhren von 70 *mm* Durchmesser montieren liess, da die an der Versuchsturbine zu gewinnenden Erfahrungen eine Nutzanwendung finden sollten bei künftigen Erweiterungen der Motorenanlage im städt. Wasserwerk. Das Triebwasser wurde abwechselnd dem Fabrikreservoir und der städtischen Leitung entnommen, entsprechend einem Druck von 28 bzw. 45—60 *m*. Die Turbine konnte mittelst eines Prony'schen Zaumes gebremst werden; für gewöhnlich benutzte man eine feste Backenbremse, die leichter als der Pronysche Zaum eine momentane Aenderung der Belastung zu bewirken gestattet. Es war ein Windkessel von etwa 700 *mm* Durchm., 1400 *mm* Länge vorgesehen, welcher mittelst der Dampfspeisepumpe im Kesselhaus aufgefüllt werden konnte. Durch Umschaltventile war die Möglichkeit geboten, mit kleiner oder grosser Leitungslänge zu arbeiten; die Variation der Schwungmasse erfolgte durch wechselweises Aufkeilen von kleineren und grösseren Schwungrädchen auf die Turbinenachse.

Die Versuche sollten vor allem die Wirksamkeit eines Windkessels praktisch darthun, da von mancher Seite aus der Praxis die Meinung ausgesprochen worden war, dass ein Windkessel unter allen Umständen zu zunehmenden Schwankungen führen müsse. Der Versuch bewies, dass diese Meinung eine irrige ist, dass vielmehr der Windkessel in der That schon von mässigen Grössen an ausserordentlich günstig wirkt. Die Turbine arbeitete meist mit einer Belastung von etwa 1 P. S., und es genügten schon 10—15 *l* Luftinhalt, um insbesondere die Druckschwankungen auf einen sehr kleinen Betrag zu reduzieren. In Uebereinstimmung mit der Theorie führte der Versuch auch auf folgende sehr interessante und wohl wenigen bekannte Erscheinung. Während bei mässigem Luftinhalt bei einer plötzlichen Absperrung der Leitung durch die Regulierzunge der Ausgleich der Geschwindigkeit sich in Form von Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollzog, war von einer bestimmten Grösse des Luftraumes an von solchen Schwingungen nichts mehr zu bemerken. Der Druck ging vom Anfangswerte in asymptotischer Weise in den Endwert über. Diese Erscheinung macht es plausibel, warum an einer Turbine, durch Vergrösserung des Windkessels, die Schwingungen reduziert und zuletzt ganz aufgehoben werden können. Eine ziffernmässige Ausnützung des Materials ist wegen Zeitmangel noch nicht erfolgt, auch ist dieselbe, wie man sehen wird, keineswegs einfach.

Der Versuch zeigte aber auch, dass eine Reduktion des Schwunggewichtes nur bis zu einer bestimmten Grenze möglich ist, darüber hinaus fruchtete eine Vergrösserung des Luftraumes nichts mehr. Der Grund für dieses Verhalten konnte nur darin liegen, dass, entgegen den in der ersten Behandlung des Problems gemachten Vereinfachungen,

1. der Regulator nicht massenlos ist, also einen nicht vernachlässigbaren Trägheitswiderstand aufweist;

2. der Hülfsmotor nicht momentan wirkt;

3. der Windkessel nicht in unmittelbarster Nähe des Leitapparates aufgestellt werden konnte.

Der Verfasser unternahm es deshalb, die Wirkung auch dieser Faktoren rechnerisch zu untersuchen, und gelangte zu den hier mitzuteilenden Resultaten, welche, wie gleich bemerkt werden soll, durch den Versuch in glänzender Weise bestätigt wurden. Die Turbine ist mit einem leichten, rasch laufenden Federregulator versehen, wie er vom Hause Escher Wyss & Cie. seit Jahren gebaut wird, dessen Masse etwa zehnmal geringer ist, wie die eines Gewichtsregulators, und deshalb zuerst, anscheinend mit Recht, für vernachlässigbar angesehen wurde. Da indessen schon Vischnegradsky in der früher citierten Abhandlung nachgewiesen hatte, dass die Trägheit der Regulatormassen durch eine Bremse kompensiert werden muss, lag es nahe, auch hier, trotz der Kombination mit Leitung und Windkessel, eine ähnliche Wirkung zu erwarten. Diese Vermutung wurde durch die Rechnung und das Experiment bestätigt. Nachdem man am Regulator eine Oelbremse angebracht hatte, **war es in der That möglich, die Schwungmassen auf das erreichbare Minimum, d. h. auf die Masse des Laufrades allein zu reduzieren.**

Man kann nun nachweisen, dass die Oelbremse nicht bloss zum Ausgleich der Massenträgheit notwendig ist, sondern, auch in Begleitung eines idealen Regulators, das beste Mittel für die Herabsetzung der Schwankungen bildet und sich dabei in einem eigentümlichen Gegensatz zum „langsam wirkenden Hülfsmotor“ befindet, von dem man doch der unmittelbaren Anschauung nach einen ähnlichen Einfluss erwarten würde.

Im folgenden wird der erste Teil dieser Arbeit als bekannt vorausgesetzt und die dort benutzte Bezeichnung auch hier beibehalten.

I. Hauptgleichungen.

1. Die Regulatormassen werden unter dem Einfluss der durch eine Geschwindigkeitsvariation hervorgerufenen „Energie“ (besser „Stellkraft“) eine Geschwindigkeit und damit eine lebendige Kraft annehmen, welche sie zwingt, über die Gleichgewichtslage hinauszuschlagen.

Der Regulator kann hier als ein beliebiger, mit Massen ausgestatteter, zwangläufiger Mechanismus gedacht werden, der um eine Achse rotiert, und dabei der Einwirkung der Schwere, der Fliehkräfte und gewisser innerer, z. B. Federkräfte unterworfen ist. Er hat der Bedingung zu genügen, dass sein Gleichgewicht innerhalb des benutzten Ausschlages ein stabiles sei.

Es bezeichne:

m, ein beliebiges kleines Massenpartikel des Regulators,
y, den Abstand dieses Partikels von der Achse,
ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der Achse,
$F = my\,\omega_0^2$ die auf das Partikel wirkende Fliehkraft,
$F' = my\,(\omega_0 + \Delta\omega)^2$ die der Aenderung von ω_0 auf $\omega_0 + \Delta\omega$ entsprechende Fliehkraft,
E, die Stellkraft, d. h. die Kraft, welche an einem bestimmten, „Hülse“ genannten Punkt des Regulators angreifen muss, um das Gleichgewicht der Kräfte bei der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 + \Delta\omega$ herzustellen,

S, die am gleichen Punkt in entgegengesetzter Richtung notwendige Kraft, welche am nicht rotierenden Regulator das Gleichgewicht herstellt; sie werde „statische Hülsenkraft“ genannt,

s die Projektion der Verschiebung des Angriffspunktes von S auf die Richtung von S von der Ruhelage aus, d. h. den Hub des Regulators.

Wir denken nun der Regulatorshülse eine unendlich kleine Verschiebung δs erteilt, und bezeichnen mit

A_F die hiebei verrichtete Arbeit der Fliehkräfte F,
A_F' „ „ „ „ „ „ F',
A_G „ „ „ „ „ Schwerkräfte,
A_I „ „ „ „ „ inneren Kräfte,
$-E\delta s$ „ „ „ „ „ Stellkraft E,
$S\delta s$ „ „ „ „ „ stat. Hülsenkraft S.

Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen muss die Summe der Arbeiten der sich jeweilen das Gleichgewicht haltenden Kräfte $= 0$ sein.

Bei der Winkelgeschwindigkeit ω_0 besteht Gleichgewicht zwischen den Flieh-, den Schwer- und den inneren Kräften, also ist

$$A_F + A_G + A_I = 0.$$

Bei der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 + \varDelta\omega$ desgleichen zwischen den Fliehkräften F' und den Schwer- und inneren Kräften, sowie der Stellkraft E, also ist

$$A_F' + A_G + A_I - E\delta s = 0.$$

In der Ruhelage ist S im Gleichgewichte mit der Schwere und den inneren Kräften, somit

$$A_G + A_I + S\delta s = 0,$$

hieraus folgt

$$\frac{E}{S} = \frac{A_F' - A_F}{A_F}.$$

Wir werden auch hier die Aenderung $\varDelta\omega$ so klein voraussetzen, dass deren Quadrat vernachlässigt werden kann; beachtet man dass A_F und A_F' sich auf die gleiche Konfiguration des Regulators beziehen, so folgt dann

$$\frac{E}{S} = \frac{(\omega_0 + \varDelta\omega)^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = 2\,\frac{\varDelta\omega}{\omega_0};$$

und da ω und v proportional sind, d. h.

$$\frac{\varDelta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = x,$$

so folgt schliesslich

$$E = 2\,S\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

oder: **die „Stellkraft“ ist das Produkt aus der statischen Hülsenkraft und der doppelten verhältnismässigen Geschwindigkeitsänderung.**

Dieser Satz wurde nach Wissen des Verfassers zuerst von Lang, indessen nur für Pendelregulatoren und in sehr umständlicher Weise abgeleitet.

2. Der Hub des Regulators in der Gleichgewichtslage ist eine Funktion der Maschinengeschwindigkeit und umgekehrt,

$$v = \Phi\,(s).$$

Gehen wir von der Anfangslage $v_0\,s_0$ aus, und lassen wir bei konstantem s_0 die Geschwindigkeit v_0 um $\varDelta v$ zunehmen, so entwickelt der Regulator an der Hülse die Stellkraft

$$E_v = 2\,S\,x.$$

Lassen wir ein zweites mal v_0 konstant und verschieben wir die Hülse um $\varDelta s$, so wird eine Stellkraft E_s entwickelt, genau so gross, wie sie bei dem Hube $s_0 + \varDelta s$ der Abnahme der Gleichgewichtsgeschwindigkeit von $v_0 + \varDelta v$ auf v_0 entspräche, d. h. es ist nach (59)

$$E_s = 2\,(S + \varDelta S)\,\frac{v_0 - (v_0 + \varDelta v_0)}{v_0 + \varDelta v}$$

und unter Vernachlässigung kleiner Grössen 2ter Ordnung

$$E_s = -2\,S\,\frac{\varDelta v}{v_0} = -2\,S\left(\frac{\varDelta v}{\varDelta s}\right)\frac{s_r}{v_0}\,\frac{\varDelta s}{s_r}.$$

Für die sehr kleinen Aenderungen der Variablen, wie wir sie hier voraussetzten, ist

$$\varDelta v : \varDelta s = dv : ds = d\Phi : ds.$$

Wir setzen ferner

$$\frac{s_r}{v_0}\,\frac{d\Phi}{ds} = \delta_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und nennen δ_0 *die Ungleichförmigkeit im Punkte* $s_0\,v_0$. Wenn s und v linear zusammenhängen, ist δ_0 die ganze Ungleichförmigkeit, d. h. $(v_{max} - v_{min}) : v_0$.

Ausserdem definieren wir die neue Variable w' durch die Gleichung

$$w' = \frac{\varDelta s}{s_r} = \frac{s - s_0}{s_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60\,a)$$

wo, wie bis jetzt, s_r den ganzen Regulatorhub bezeichnet.

Wird von der Gleichgewichtslage $s_0\,v_0$ aus gleichzeitig v_0 um $\varDelta v$ und s_0 um $\varDelta s$ verändert, so entsteht an der Hülse die Stellkraft E, welche mit gleicher Annäherung wie das bisher Entwickelte der algebraischen Summe der Bestandteile E_s und E_v gleich ist:

$$E = E_v + E_s = 2\,S\,\frac{\varDelta v}{v_0} - 2\,S\,\delta_0\,\frac{\varDelta s}{s_r}$$

oder

$$E = 2\,S\,(x - \delta_0\,w') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Wir nehmen an, dass an der Hülse des Regulators noch eine Oelbremse angreift und dort eine Kraft B ausübt. In B kann man auch sonstige Widerstände einbegriffen denken, falls ihr Aenderungsgesetz übereinstimmt mit dem des Bremswiderstandes.

3. Bezogen auf die relative Bewegung des Regulators gegen die Achse ist die während des Zeitelementes dt, d. h. auf dem Wegelement ds auf die Regulatormassen übertragene Arbeit:

$+ E\,ds$ als Summe der Arbeiten der Flieh-, der Schwer- und der inneren Kräfte

$- B\,ds$ von der Bremse herrührend, und der Natur der Sache nach stets negativ.

Die Summe obiger Arbeiten ist gleich der Aenderung der relativen lebendigen Kraft, d. h. $= \Sigma\,mv_r\,dv_r$, wenn mit v_r die relative Geschwindigkeit des Massenpartikels m bezeichnet wird.

Es sei nun

m_r die bezüglich der lebendigen Kraft auf die Hülse reducierte Masse des Regulators,

$v_h = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der Hülse; es wird dann

$$m_r\,v_h^2 = \Sigma\,m\,v_r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61\,a)$$

Im allgemeinen ändert sich m_r mit dem Hube s, soll aber hier als Konstante vorausgesetzt werden. Dann wird die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\Sigma\,m\,v_r\,dv_r = m_r\,v_h\,dv_h = (E - B)\,ds, \text{ oder}$$

$$m_r\,\frac{d^2 s}{dt^2} = E - B.$$

Diese Gleichung ist im Zusammenhange mit den folgenden nur dann integrabel, wenn man voraussetzt, der Widerstand der Bremse sei in jedem Moment der Hülsengeschwindigkeit proportional, d. h. es sei

$$B = K\,\frac{ds}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61\,b)$$

Ein Versuch des Verfassers mit einem Katarakt von 50 *mm* Durchmesser und 150 *mm* Hub des Kolbens, welcher eine durch einen Konus regulierbare Oeffnung von 5 *mm* Φ besass, ergab folgende Werte:

Belastung	5	10	20	*kg*
Oeffnung 9,4 mm^2; Geschwindigkeit .	4	8	17	*mm* p. S.
„ 19,0 „ „ .	16	33	66	„ „

Der Katarakt war mit gewöhnlichem Olivenöl gefüllt.

Man sieht ans obigen Zahlen, dass bei der Oelbremse Belastung und Geschwindigkeit einander in der That sehr nahe proportional sind.

Durch Einführung der Varibleu w' in der Gleichung der lebendigen Kraft erhält man

$$m_r\,s_r\,\frac{d^2 w'}{dt^2} = 2\,S\,(x - \delta_0\,w') - K\,s_r\,\frac{dw'}{dt}$$

und nach Division mit 2 S und den Bezeichnungen

$$T^2 = \frac{m_r\,s_r}{2\,S}, \qquad T' = \frac{K\,s_r}{2\,S} \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

$$T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_o w' - x = o \quad . \quad (62\,a)$$

Die Koefficienten T und T' haben die Dimension einer Zeit, und es ist insbesondere T ein Mass für das Verhältnis der Regulatormasse zur „Energie"; T' ein Mass für das Verhältnis des Kataraktwiderstandes zur Energie.

4. Der Regulator sei versehen mit einem langsam wirkenden Hilfsmotor. Es finden dann die Formeln (30)—(33) des ersten Teiles Anwendung, mit folgenden kleinen Modifikationen: die Variable w sei definiert durch die Gleichung

$$\frac{s' - s_o'}{s_r} = \frac{1}{\delta_o} w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

dann ist

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_o \frac{s - s'}{s_r} = \sigma_o \left[\frac{s - s_o}{s_r} + \frac{s_o - s'}{s_r}\right] = \sigma_o \left[w' - \frac{1}{\delta_o} w\right]$$

und mit der Bezeichnung

$$T_o = \frac{s_r}{\sigma_o} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63\,a)$$

die Bewegungsgleichung

$$T_o \frac{dw}{dt} + w - \delta_o w' = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

5. Die Bewegung des Laufrades ist zu beurteilen wie in Abschnitt II beim „langsam wirkenden Hülfsmotor"; es gilt also Gleichung (2) in Gruppe (35)

$$T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_o w + x - \frac{3}{2} z = \Pi \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

6. Zwischen Leitapparat und Windkessel befinde sich eine Rohrleitung, für welche bezeichnen mögen

L' die Länge,
F' den konstanten Querschnitt,
d' „ „ Durchmesser,
p „ Ueberdruck am Leitapparat,
p' „ „ im Windkessel,
c' die Geschwindigkeit,
$p_o\, p_o'\, c_o'$ die Anfangswerte von $p\, p'\, c'$,
$z' = (p' - p_o') : p_o$ die Pressungsänderung im Windkessel, in Teilen von p_o,
$y' = (c' - c_o') : c_o'$ die Geschwindigkeitsänderung in Teilen von c_o',
$\zeta' \frac{L'}{d'} \frac{c'^2}{2g}$ die Reibungshöhe, inklusive Krümmer etc.

Das Wasserniveau im Windkessel wird in einer Höhe mit der Leitradmündung vorausgesetzt.

Die Gleichung der lebendigen Kraft, angewendet auf das Rohrstück L' (bis knapp zum Leitapparat) gibt dann

$$T_2' \frac{dy'}{dt} = z' - z - \varepsilon' y'$$

mit $$T_2' = \frac{L'}{h_o} \frac{c_o'}{g} \qquad \varepsilon' = \left(1 + \zeta' \frac{L'}{d'}\right) \frac{c_o'^2}{h_o g} \quad . \quad (66)$$

7. Die Gleichung, welche aussagt, dass der Abfluss aus dem Windkessel gleich ist der Summe aus dem Zufluss und der Ausdehnung des Luftvolumens, lautet

$$F c + F \frac{dl}{dt} = F' c',$$

unter Beachtung, dass $F c_o = F' c_o'$, und nach Einführung der Variablen z', y, y' erhält man

$$T_3 \frac{dz'}{dt} = y - y',$$

wobei $$T_3 = \frac{l_o}{c_o} \frac{p_o}{p_o' + p_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

8. Für die Bewegung der Druckwassersäule gilt wie im ersten Teil

$$T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + z' = o.$$

9. Die Kontinuitätsgleichung sagt aus, dass im Beharrungszustand der Zufluss und Abfluss gleich sind, und lautet $$fu = F'c',$$
woraus bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung folgt

$$\alpha_o w + y' - \frac{1}{2} z = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

10. Die in 1. bis 9. entwickelten 7 Gleichungen reichen mit den Anfangsbedingungen hin, um die sieben Variablen w', w, x, y, z, y', z' zu bestimmen. Das Gleichungssystem lautet:

$$\left.\begin{aligned}
T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_o w' - x &= o \\
T_o \frac{dw}{dt} + w - \delta_o w' &= o \\
T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_o w + x - \frac{3}{2} z &= \Pi \\
T_2' \frac{dy'}{dt} + \varepsilon' y' - z' + z &= o \\
T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + z' &= o \\
T_3 \frac{dz'}{dt} + y' - y &= o \\
\alpha_o w + y' - \frac{z}{2} &= o
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (69)$$

11. Die Integration dieses Gleichungssystems hat nach dem bekannten Schema zu erfolgen, welches im ersten Teil dieser Arbeit mehrfach verwendet wurde. Sie führt indessen auf eine charakteristische Gleichung 7. Grades, von deren allgemeiner Auflösung, also auch von der expliciten Darstellung der Funktionen w, w', ... keine Rede sein kann. Von grosser Wichtigkeit wäre es nun, zumindest die Natur der Wurzeln, insbesondere das Vorzeichen ihres reellen Teiles konstatieren zu können. Wenn wir auch die komplexen Wurzeln nach diesem Vorzeichen kurzweg positiv oder negativ nennen, so kann man sagen, dass schon eine einzige positive Wurzel hinreicht, um die Variablen über alle Grenzen wachsen, oder die Amplitude der Oscillation endlos zunehmen zu lassen. Auch hier besteht also die Forderung, dass die charakteristische Gleichung nur negative Wurzeln enthalten dürfe.

Die Algebra war bis heute nicht im stande, auf die Frage, unter welchen Bedingungen die obige Forderung erfüllt sei, eine Antwort zu erteilen. Herr Prof. Hurwitz hatte nun die ausserordentliche Freundlichkeit, sich für dieses Problem zu interessieren, und entwickelte die im nachfolgenden mit seiner Erlaubnis mitgeteilten, höchst eleganten Lehrsätze, deren Begründung demnächst in den „Mathematischen Annalen" veröffentlicht werden soll.

Es sei

$$c_o x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + c_n = o$$

eine Gleichung n-ten Grades mit reellen Koefficienten und es werde $c_o > o$ vorausgesetzt. Die Bedingung dafür, dass alle Wurzeln der Gleichung negative reelle Teile besitzen, lautet dann:

1. Es müssen sämtliche Koefficienten der Gleichung $> o$ sein;
2. Es müssen die nach dem Schema

$$\varDelta_k = \begin{vmatrix}
c_1, & c_3, & c_5, & c_7 & \ldots\ldots & c_{2k-1} \\
c_o, & c_2, & c_4, & c_6 & \ldots\ldots & c_{2k-2} \\
o, & c_1, & c_3, & c_5 & \ldots\ldots & c_{2k-3} \\
o, & c_o, & c_2, & c_4 & \ldots\ldots & c_{2k-4} \\
o, & o, & c_1, & c_3 & \ldots\ldots & c_{2k-5} \\
o, & o, & c_o, & c_2 & \ldots\ldots & c_{2k-6} \\
- & - & - & - & - - - & - \\
o, & o, & o, & o & \ldots\ldots & c_k
\end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (70)$$

gebildeten $n-2$ Determinanten, welche entstehen, wenn k successive die Werte 2, 3, 4, ... $(n-1)$ annimmt, sämtlich positive Werte haben. Die Koefficienten c_{n+1}, c_{n+2}, ... sind $= o$ zu setzen. Das Bildungsgesetz der Determinanten ist leicht zu übersehen, wenn man die 1., 3., 5.. . . -te, sodann die 2., 4., 6., . . .-te Zeile mit einander vergleicht.

Man ist hiernach im stande, aus probeweise angenommenen $T\ T'\ T_o\ T_1$ . . . und den daraus sich ergebenden Koefficienten der charakteristischen Gleichung durch Berechnung der Hurwitz'schen Determinanten den Nachweis zu erbringen, ob in dem konkreten Fall nur negative Wurzeln vorkommen oder nicht. In diesem Sinne ist das Problem vollständig gelöst.

Bei der im gegenwärtigen Moment noch geringen Erfahrung in Bezug auf automatische Regulierung von Hochdruckturbinen wäre es sehr wichtig, allgemeine Beziehungen zwischen den Koefficienten $T\ T'$ . . . aufstellen zu können, welche diese Faktoren von vorneherein so zu berechnen gestatteten, dass die charakteristische Gleichung keine positive Wurzel enthielte.

Da aber schon die Koefficienten der charakteristischen Gleichung komplizierte, aus den Konstanten $T\,T' \ldots$ gebildete Ausdrücke sind, wird es wohl schwer gelingen, in den noch viel verwickelteren Determinanten den Einfluss jedes einzelnen der $T\,T' \ldots$ zu verfolgen.

Man gelangt am ehesten zu einer gewissen Uebersicht durch Zerlegung der allgemeinen Aufgabe in einfachere Specialfälle, indem man einzelne der Koefficienten $T\,T' \ldots = 0$ setzt. Es ist wichtig zu bemerken, dass dieser Grenzübergang ohne weiteres zulässig ist.

Die Vereinfachung soll damit beginnen, dass $T_2' = 0$ $\varepsilon' = 0$ gemacht werde. Man kann dann z' und y' eliminieren, und erhält

$$\left.\begin{aligned} T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_0 w' - x &= 0 \\ T_0 \frac{dw}{dt} + w - \delta_0 w' &= 0 \\ T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 w + x - \frac{3}{2} z &= \Pi \\ T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + z &= 0 \\ T_3 \frac{dz}{dt} - \alpha_0 w - y + \frac{1}{2} z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

12. Es ist angemessen, auf die mechanische Bedeutung der Koefficienten $T_1\ T_2\ T_3,\ \varepsilon$ nochmals zurückzukommen.

$T\,T'\,T_0$ sind schon vorhin definiert worden, wir wollen kurzweg T auch als Regulatormasse und T' als Katarakt bezeichnen, ferner T_0 neben Regulierungsdauer auch Verschleppung oder Verzögerung nennen.

Es sei

$$\frac{1}{\psi} = \frac{f_0}{f_1} \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

wo f_0 wie früher den Leitradquerschnitt im Anfangszustand f_1 denselben bei voller Oeffnung bezeichnet und es werde $\frac{1}{\psi}$ der „**Belastungsfaktor**" genannt, da die Belastung diesem Werte angenähert proportional ist. Da im Leerlauf immer noch mindestens 2—5 % des Leitradquerschnittes f_1 offen bleiben, wird ψ zwischen 1 und etwa 20—50 variieren. Die im ersten Teil α_0 benannte Grösse, dort als Mass der Astasie definiert, wird nach Formel (1) resp. (1^b)

$$\alpha_0 = \frac{f_1}{f_0}\frac{1}{\delta_0} = \frac{\psi}{\delta_0} \quad \ldots \ldots \quad (73)$$

Wir schreiben nun $T_1 = \frac{Mv_0}{P_0} = 2\left[\frac{1}{2} Mv_0^2\right] : P_0\, v_0$, und erkennen aus dieser Form:

$\frac{1}{2}\,T_1$ ist das Verhältnis der lebendigen Kraft der Schwungmassen zur effektiven Leistung pro Sekunde.

Sodann war

$$T_2 = L\,c_0 : h_0\, g = 2\left[\frac{1}{2} M_L\, c_0^2\right] : \left[\gamma\, V_0\, h_0\right];$$

hierin bedeutet M_L die Wassermasse der ganzen Zuleitung, V_0 das pro Sekunde abfliessende Wasservolumen, also $\gamma\, V_0\, h_0$ die vor der Mündung verfügbare Arbeitsfähigkeit desselben, die wir kurz „absolute Leistung" nennen wollen. Dies giebt die Definition

$\frac{1}{2}\,T_2$ ist das Verhältnis der „Leitungsenergie" zur absoluten Leistung pro Sekunde.

Es war $T_3 = l_0\, p_0 : c_0\,(p_0 + p_a)$, bei grossen Gefällen können wir p_a neben p_0 vernachlässigen, und schreiben $T_3 = [F\, l_0\, p_0] : [F\, c_0\, p_0] = W p_0 : \gamma\, V_0\, h_0$, hierin ist $W p_0$ die Arbeitsfähigkeit eines Accumulators von gleichem Volumen wie der Windkessel, und man kann sagen

T_3 ist das Verhältnis der Arbeitsfähigkeit eines dem Windkessel aequivalenten Accumulators zur absoluten Leistung pro Sekunde.

Schliesslich schreiben wir $\varepsilon = 2\left[\zeta_r \frac{L}{d} \frac{c_0^2}{2g}\right] : h_0$; der Klammerausdruck ist nach der Bezeichnungsweise der Hydraulik die „verlorene" Druckhöhe; h_0 die „nützliche" Druckhöhe, somit ist **$\frac{1}{2}\,\varepsilon$ das Verhältnis der „verlorenen" zur „nützlichen" Druckhöhe in der Zuleitung.**

Die Koefficienten $T_1\ T_2\ T_3\ \varepsilon$ ändern ihren Wert mit der Belastung der Turbine. Es mögen T_{1m}, T_{2m}, T_{3m}, ε_m c_m, P_m die der Vollbelastung entsprechenden Werte von T_1, T_2, T_3, ε, c, P bedeuten. Man kann approximativ die Leistung der Turbine dem Leitradquerschnitt proportional setzen, und von der geringen Verschiedenheit der Umfangsgeschwindigkeit, wegen der Kleinheit von δ_0, absehen. Es ergiebt sich dann

$$P_0 = P_m \frac{f_0}{f_1} = P_m \frac{1}{\psi} \text{ und}$$

$$c_0 = c_m \frac{f_0}{f_1} = c_m \frac{1}{\psi}, \text{ somit}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{Mv_0}{P_m}\psi = \psi\, T_{1m}, & T_2 &= \frac{L}{h_0}\frac{c_m}{g}\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} T_{2m} \\ T_3 &= \frac{l_0}{c_m}\frac{p_0}{p_0 + p_a}\psi = \psi\, T_{3m}, & \varepsilon &= \frac{\zeta}{g}\frac{L}{h_0}\frac{c_m^2}{d_0}\frac{1}{\psi^2} = \frac{1}{\psi^2}\varepsilon_m \end{aligned}\right\} (74)$$

13. Die Substitution von $w' = \omega_0 + m' e^{\varphi t}$; $w = \omega_0 + m\, e^{\varphi t}$, $x = \xi_0 + a\, e^{\varphi t}$, u. s. w., und passende Bestimmung der Grössen $\omega_0'\ \omega_0\ \xi_0 \ldots$ in den Gleichungen (71) führt auf die folgende charakteristische Gleichung

$$a''\varphi^6 + a'\varphi^5 + a\varphi^4 + b\varphi^3 + c\varphi^2 + d\varphi + e = 0. \quad (75)$$

Hierin bedeuten

$$\left.\begin{aligned} a'' &= T^2\, T_0\, T_1\, T_2\, T_3 & a' &= j\,m + h\,p \\ a &= k\,m + j\,n + h\,p & b &= l\,m + k\,n + j\,p \\ c &= q\,m + l\,n + k\,p & d &= l\,p + \varepsilon\, q\, T_3 - q'\, T_2 \\ & & e &= \psi\,(1 - \varepsilon) + \delta_0\, p \\ h &= T^2\, T_0\, T_1, & j &= T^2 (T_0 + T_1) + T'\, T_0\, T_1, \\ k &= T^2 + T'(T_0 + T_1) + \delta_0\, T_0\, T_1, & l &= T' + \delta_0 (T_0 + T_1) \\ m &= T_2\, T_3 & n &= \frac{1}{2} T_2 + \varepsilon\, T_3 \\ p &= 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad q = \psi + \delta_0, & q' &= \psi - \frac{\delta_0}{2} \end{aligned}\right\} (76)$$

Diese Form lässt erkennen, dass zunächst die Koefficienten $a''\ a' \ldots e$ homogene Funktionen der Konstanten $T\,T'\,T_0' \ldots$ sind, und ihr Grad übereinstimmt mit dem Exponenten der zugehörigen Potenz von φ. Man kann demnach die charakteristische Gleichung auch in der Gestalt

$$\left(\frac{a''}{T_k^6}\right)(T_k\varphi)^6 + \left(\frac{a'}{T_k^5}\right)(T_k\varphi)^5 + \left(\frac{a}{T_k^4}\right)(T_k\varphi)^4 + \ldots + e = 0$$

schreiben, wo T_k irgend eine der Grössen $T\,T' \ldots$ bedeutet und $(T_k\,\varphi)$ als Wurzel erscheint. In den Koefficienten dieser Gleichung kommen nur die Verhältnisse $T : T_k$, $T' : T_k \ldots$ vor. Da sämtliche T positiv sind, wird das Vorzeichen von φ mit dem von $T_k\,\varphi$ übereinstimmen, und wir haben den Satz:

Die Regulierfähigkeit einer Turbine hängt nicht von den absoluten Grössen der Coefficienten $T\,T' \ldots$ ab, sondern bloss von den Verhältnissen derselben untereinander.

Angenommen diese Verhältnisse bleiben konstant, und die Wurzeln seien imaginär, dann wird eine davon

$$T_k\,\varphi_\lambda = R + i\,S, \text{ woraus}$$

$$\varphi_\lambda = \frac{R}{T_k} + i\,\frac{S}{T_k} = r + i\,s$$

wo R und S ebenfalls konstant bleiben. Der von dieser Wurzel stammende Anteil in dem Integral einer der Funktionen $w'\ w \ldots$ hat die Form

$$e^{rt}\,[A \cos st + B \sin st],$$

das ganze Integral besteht aus einer Summe ähnlicher Ausdrücke. Die Periode für die obige Teilschwingung ist

$$t_0 = \frac{2\pi}{s} = \frac{2\pi}{S}\, T_k,$$

Die Abnahme der Schwingungsamplitude hängt ab vom Faktor e^{rt_0}, und in diesem ist $rt_0 = 2\pi\, R : S$ also ebenfalls konstant. Wir haben somit den Satz:

Wenn bei konstantem Verhältnis der Koefficienten $T\,T' \ldots$ ihr absoluter Wert wächst, so nimmt

die Schwingungsdauer in geradem Verhältnis zu, die Konvergenz der Schwingungen aber bleibt ungeändert.

Wählen wir schliesslich an Stelle der Zeit die Grösse $\tau = t : T_k$ zur unabhängigen Variablen, so wird das oben angeschriebene Teilintegral =

$$e^R\,[A \cos S\tau + B \sin S\tau].$$

Die Bestimmung der willkürlichen Konstanten erfolgt aus den Anfangsbedingungen, nach welchen für $t = o$, $w' = w = x = y = z = o$ und $\frac{dw'}{dt} = o$ ist. In A und B sind neben den willkürlichen Konstanten nur Produkte der Form $T_u\,\varphi$ enthalten, und da diese konstant bleiben, müssen auch die willkürlichen Konstanten, so lange die Verhältnisse $T : T' \ldots$ sich nicht ändern, stets denselben Wert annehmen. Die Variablen $w'\,w\,x \ldots$ als Funktionen von τ aufgefasst, werden demnach nicht alteriert, wenn man $T\,T' \ldots$ proportional vergrössert oder verkleinert. Da ferner, wie aus den Gleichungen (41^b) als Beispiel erhellt, die willkürlichen Konstanten der Belastungsänderung Π proportional sind, kann man jede der Variablen $w'\,w\,x \ldots$ darstellen als Produkt aus Π und einer nur von den Verhältnissen $T : T' : \ldots$ (und den Koefficienten $\varepsilon\,\psi\,\delta_0$) abhängigen Funktion von τ. Bestimmen wir das Maximum z. B. der Geschwindigkeit, so muss dies die gleiche Form haben, und wir haben den Satz:

Durch proportionale Vergrösserung oder Verkleinerung der Koefficienten $T\,T' \ldots$ wird das Verhältnis der mathematischen Druck- und Geschwindigkeitsschwankung zur prozentischen Belastungsänderung nicht geändert.

Diese Sätze waren notwendig, um von den Versuchsergebnissen im kleinen auf grosse Ausführungen, und umgekehrt, schliessen zu können. (Schluss folgt.)

Die Bruchprobe der Eisenbahnbrücke in Wohlhusen.

In den vergangenen Tagen spielte sich auf der Bahn Bern-Luzern, bei der Station Wohlhusen, ein Ereignis ab, das seiner Eigenartigkeit wegen das Interesse aller Brückentechniker verdient.

Die im Jahre 1874 erbaute Eisenbahnbrücke über die Emme wurde, da sie den heutigen Anforderungen nicht mehr genügte, im vorigen Jahre beseitigt und durch eine neue ersetzt. Auf Anregung des Eisenbahndepartements wurde diese Gelegenheit benützt, um einmal eine ganze Brücke auf ihre Tragfähigkeit und Festigkeit zu prüfen und die Erscheinungen zu studieren, die dem Zusammensturz einer eisernen Brücke vorangehen. Die betreffende Brücke konnte in dieser Hinsicht um so lehrreicher angesehen werden, als sie in Bezug auf Spannweite, Höhe und Anordnung der Tragwände mit der im Juni 1891 eingestürzten Mönchensteinerbrücke manche Aehnlichkeit besitzt. Die Jura-Simplon-Bahn, als Eigentümerin der Brücke, zeigte sich bereit, auf diesen Plan einzugehen, und sämtliche Hauptbahnen der Schweiz vereinigten sich mit dem Eisenbahndepartement dahin, die aus der Probe erwachsenden Kosten gemeinschaftlich zu tragen.

Das Programm, das der Probe zu Grunde gelegt und bereits früher (Seite 35) an dieser Stelle in seinen Hauptzügen mitgeteilt worden ist, lautet wie folgt:

Programm für die Belastungsproben bis zum Bruch der Brücke.

9. April 1894.

Die auf ihren Unterstützungen gelagerte Eisenkonstruktion der Brücke wird an jedem untern und obern Knotenpunkt einnivelliert. Die Geradheitsfehler der Streben, die lokalen Mängel der Konstruktion, die senkrechte Lage der Wände werden sorgfältig aufgenommen bezw. kontrolliert.

9.—15. April.

Nach Massgabe der Anlieferung der Schienen, welche mit das Belastungsmaterial bilden, wird die Eisenkonstruktion von Feld zu Feld belastet, bis eine Last von 5,86 t per laufenden Meter sich auf die ganze Länge derselben erstreckt. Das Nivellement aller Knotenpunkte, die Beobachtung der Geradheit der Streben und der Lage der Wände werden bei Belastung der halben und der ganzen Brücke wiederholt.

16.—21. April.

Die Hälfte der Brücke Seite Bern wird entlastet, um die zweite Phase der Belastungsprobe vorzubereiten. Die Beobachtungen über die Geradheit der Streben und die Nivellemente werden nach dieser Entlastung wiederholt.

23.—25. April.

Die Belastung der Brückenhälfte Seite Luzern wird nun verdoppelt und die oben erwähnten Nivellemente und Beobachtungen erneuert.

Die Belastung wird alsdann auf der nämlichen Brückenhälfte fortgesetzt, indem jeweilen eine weitere Last von 1 t pro laufenden Meter hinzugefügt wird, bis ein Bruch oder grössere Deformationen erfolgen.

Während dieser Manipulation werden die mehrgenannten Beobachtungen soweit thunlich wiederholt.

Die auf diese Weise der absichtlichen Zerstörung geweihte Brücke besitzt eine Spannweite von 47,9 m und eine Höhe von 5,8 m. Die Streben der Tragwände sind sämtlich schief und bilden mit den Gurtungen eine Reihe von gleichschenkligen Dreiecken (Warren-Träger). Die wagrechte Entfernung der Knotenpunkte beträgt 4,3 m. Die Fahrbahn liegt unten und besteht in üblicher Weise aus Quer- und Längsträgern. Die oberen Gurtungen sind durch Riegel und Windkreuze quer verbunden. Die Brücke kreuzte den Fluss in schiefer Richtung; im Grundriss ist daher die eine Tragwand gegenüber der andern um eine Fachweite verschoben.

Die Gurtungen sind kastenförmig gebaut, die Streben haben Blechbalkenquerschnitt.

Die südliche Tragwand ist, da die Bahn auf der Brücke in einer Krümmung liegt, etwas schwächer als die nördliche.

Wie bei der Mönchensteinerbrücke sind die Streben excentrisch an den Gurtungen befestigt. Die Excentricität beträgt, horizontal gemessen, 10 cm nach jeder Seite.

Um die Probe vornehmen zu können, wurde die Brücke am Ufer des Flusses auf vier Betonsockel gelagert, und zwar so, dass die untere Gurtung etwa einen halben Meter über dem Erdboden schwebte.

Als Belastungsmaterial wurde eine Lage Eisenbahnschienen und darüber aufgeschütteter Kies verwendet. Das specifische Gewicht des letzteren wurde zu 1,8 ermittelt.

Nachdem schon vor Beginn der Probe sämtliche Bahngesellschaften und Brückenwerkstätten der Schweiz, sowie eine grössere Zahl von einzelnen Personen vom Eisenbahndepartement in verdankenswerter Weise von dem Bevorstehenden in Kenntnis gesetzt und zur Besichtigung eingeladen worden waren, wurde denselben am Montag den 23. April telegraphisch mitgeteilt, dass von Dienstag vormittags 10 Uhr an diejenigen Belastungen aufgetragen werden würden, von denen man grössere Deformationen und schliesslichen Bruch erwarten könne.

An diesem Vormittage fand sich an der Brückenstelle eine auserlesene Gesellschaft zusammen. Das Eisenbahndepartement war durch dessen Vorsteher, Herrn Bundesrat Zemp, durch den technischen Inspektor, Hrn. Oberst Tschiemer und durch mehrere Kontrolingenieure vertreten. Die grösseren Bahngesellschaften der Schweiz hatten alle mehrere ihrer Ingenieure zum Studium des seltenen Vorganges abgesandt. Von Paris war der Brückeningenieur des Chemin de fer de l'Est erschienen. Kaum konnte der Gasthof zum Rössli die zahlreichen Gäste fassen, die sich dort zum Mittagessen vereinigten.

Die Belastung, die am Morgen dieses Tages 11,7 t auf den Meter betrug und sich über die Hälfte der Spannweite erstreckte, wurde nach und nach durch weiteres Aufschütten von Kies bis auf 13,2 t erhöht. Währenddem wurden wiederholt die Einsenkungen der Knotenpunkte und die Verbiegungen der Stäbe gemessen, erstere durch Nivellieren, letztere durch gespannte Schnüre.

Diese Messungen ergaben überall fortwährend sich steigernde Formänderungen. Die Senkung der Tragwände stieg in der Mitte auf mehrere Centimeter. Die Streben verbogen sich in der Tragwandebene teils einfach, teils S-förmig um mehrere Millimeter. Da und dort wurden auch, bald im Anstrich, bald an Verkittungsstellen kleinere Risschen sichtbar. Doch keine dieser Veränderungen nahm eine auffallende Grösse an und es war unmöglich zu sagen, wo die Gefahr eines