Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 25/26 (1895)
Heft: 3

Artikel: Knickfragen
Autor: Mantel, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19218

Knickfragen.

Von *G. Mantel*, Ingenieur.

I.

Es giebt im Brückenbau der Gegenwart kaum eine Frage, die dringlicher weiterer Aufklärung bedarf, als die nach der Knickfestigkeit der auf Druck beanspruchten Stäbe. Die Behauptung wird niemanden überraschen, der sich viel und einlässlicher mit der Berechnung eiserner Brücken, somit auch mit der Beurteilung der Knickfestigkeit ihrer Teile zu befassen hat; denn wir besitzen nun zwar, Dank den sorgfältigen Versuchen der neuesten Zeit, zuverlässige Formeln zur Beantwortung der Frage nach der Tragfähigkeit von Druckstäben, die genau nach ihrer Schwerachse belastet sind und deren Enden sich frei drehen können. In der That haben diese Versuche, die in Amerika, Deutschland, Frankreich und bekanntlich auch bei uns, zum Teil in den staatlichen Festigkeitsanstalten vorgenommen worden sind, dargethan, dass entgegen früher erhobenen Zweifeln die bekannte Formel unsers grossen Landsmannes Euler in der That der richtige gesetzliche Ausdruck ist für die Natur des bei der Knickung der Stäbe beobachteten Vorganges, solange das Längenverhältnis derselben zum kleinsten Trägheitshalbmesser nicht unter eine gewisse Grenze sinkt und dass von dieser Grenze an das Eulersche Gesetz zwar seine Giltigkeit verliert, weil die Voraussetzungen, auf denen es ruht, nicht mehr erfüllt sind — Proportionalität von Kraft und Formänderung — dagegen durch ein anderes, empirisch ermitteltes ersetzt werden kann, das am einfachsten und mit genügender Genauigkeit unter der Form einer Geraden dargestellt wird.

Wenn wir nun aber auch wissen, wie wir die Tragkraft eines auf Knicken beanspruchten geraden Stabes zu berechnen haben, wenn uns das Längenverhältnis desselben zum kleinsten Trägheitsradius bekannt ist und wenn seine Enden sich frei drehen können, event. auch wenn eines oder beide derselben fest eingespannt sind, so stossen wir im Brückenbau auf die grosse Schwierigkeit, dass wir es selten mit diesen einfachen, klaren Verhältnissen zu thun haben. Nicht nur sind die Enden der Stäbe gewöhnlich weder ganz frei drehbar, noch ganz fest eingeklemmt, sondern der Stab ist oft auch noch zwischen seinen beiden Enden weitern Kraftwirkungen ausgesetzt, sei es senkrecht zu seiner Längsachse, sei es in der Richtung derselben oder beides zusammen, wozu dann noch etwa excentrische Befestigung kommt, welch letztere zur Folge hat, dass die Kraftrichtung nicht mit der Stabachse zusammenfällt u. s. w. Ist es in einfachern Fällen möglich, mit einiger Sicherheit die Verhältnisse, unter welchen der Stab als Teil des ganzen Organismus der Brücke an der Kräfteübertragung in derselben mitwirkt, abzuschätzen oder wenigstens eine obere Grenze für seine Beanspruchung anzugeben, ohne sich allzuweit von der Wahrheit zu entfernen, ohne allzugrosser Materialverschleuderung sich schuldig zu machen, so giebt es anderseits noch genug Fälle, wo die Schätzung eine sehr rohe bleiben muss, weil es sowohl an Theorien, wie auch an praktischen Versuchen fehlt, auf welche man sich stützen könnte.

Es ist daher begreiflich, wie willkommen dem Brücken-Ingenieur alle Arbeiten sind, welche ihm Erweiterung seiner bezüglichen Kenntnisse in Aussicht stellen und wird es manchenorts interessieren, mit den Ergebnissen einer solchen Arbeit bekannt gemacht zu werden, welche eine Anzahl von bis dahin wenigstens streng nicht behandelten Aufgaben aus dem Gebiet der Knickfragen erörtert und nach Ansicht des Schreibers dieser Zeilen höchst wertvollen Aufschluss in einigen der schwierigsten Fälle bietet.

Es handelt sich um eine theoretische Arbeit des russischen Ingenieurs Felix Jasinski in Petersburg, welche im Septemberheft der „Annales des ponts et chaussées“ erschienen ist. Hier soll vorläufig einmal eine bestimmte Frage herausgegriffen werden, nämlich diejenige nach der Tragfähigkeit einer Druckstrebe in einer Brücke mit mehrfachem Strebenzug, die also in beliebig vielen Punkten von sie kreuzenden Zugstreben gehalten ist.

Es handle sich in erster Linie um ein mehrfaches Fachwerk ohne Pfosten und mit gleich stark geneigten Zug- und Druckstreben; ferner seien die Kräfte Z in allen Zugstreben, ebenso die Kräfte P in allen Druckstreben gleich gross. Es soll dann weiter vorausgesetzt werden:

1. Die Stäbe seien an allen Kreuzungsstellen miteinander befestigt, aber drehbar, ebenso seien die Strebenenden drehbar mit den Gurtungen verbunden.

2. Infolge der Befestigung bleiben Zug- und Druckstreben an den Kreuzungsstellen auch nach der Ausbiegung in gegenseitiger Berührung.

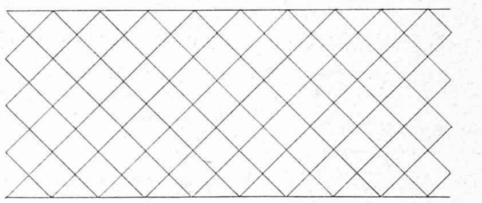
3. Die Enden der Streben sind gezwungen, in der ursprünglichen Strebenebene zu verbleiben.

Das Tragvermögen einer an n Zwischenpunkten gehaltenen Druckstrebe ist nun zu ermitteln. Der einfachste und am leichtesten sich einstellende Fall des Ausknickens ist offenbar der, dass sich die ganze Wand nach einer Seite hin auswölbt, wobei sich alle Stäbe nach der nämlichen parallelen Kurve ausbiegen, welche der einfachstmöglichen Knickkurve entspricht, die keine Inflexionspunkte besitzt.

Wenn die Knickstreben sich seitwärts ausbiegen, so müssen sie infolge der Verbindung die Zugstreben mit sich nehmen, die für sich keine Tendenz zu dieser Bewegung haben, derselben daher einen gewissen Widerstand entgegensetzen; d. h. diese werden mit einer gewissen Reaktion, die gleich und entgegengesetzt der von den Druckstreben auf sie ausgeübten Kraft ist, die letztern an der Ausbiegung zu hindern suchen. Diese Reaktion rührt her von der Spannung, die in den Zugstreben herrscht und von ihrer eigenen Steifigkeit gegenüber seitlichen Ausbiegungen.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Reaktionen, welche auf eine Druckstrebe an allen Kreuzungsstellen durch die kreuzenden Diagonalen ausgeübt werden, infolge der Symmetrie aller Verhältnisse ersetzt gedacht werden können durch die Reaktionen *einer* Zugdiagonale, welche man sich in die Druckstrebe hinüber gedreht denkt. (Siehe Fig. 1.) Und indem ferner eine geringe Maschenweite vorausgesetzt wird, kann man ohne erheblichen Fehler Berührung der Zug- und Druckstrebe auf der ganzen Länge statt nur an

Fig. 1. **Fachwerk mit gleich geneigten Streben.**



den Kreuzungsstellen und ferner gleichmässige Verteilung der Aktion und Reaktion zwischen Zug- und Druckstrebe annehmen.

Betrachten wir die Hälfte einer Zug- und einer Druckstrebe, so steht erstere unter dem Einfluss der Zugkraft Z und von ausbiegenden Kräften senkrecht zu ihrer Achse, die nach irgend einem Gesetz über die Achse verteilt und auf ein Element $d\sigma$ im Abstand σ vom Stabmittelpunkt (Nullpunkt des Achsensystems) $f(y)\, d\sigma$ betragen möge. Der

Druckstab steht unter dem Einfluss der längs wirkenden Druckkraft P und der gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Querkräfte. Auf die Enden der Streben wirken

Fig. 2. **Druckstab.**

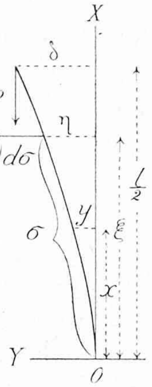
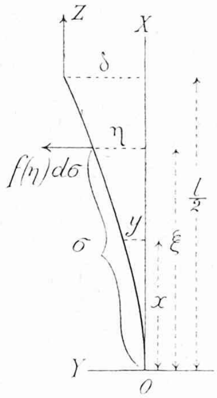


Fig. 3. **Zugstab.**



ferner Gegendrücke von den Gurtungen her, gleich und entgegengesetzt der Summe der auf eine Stabhälfte wirkenden Querkräfte, d. h. $= \int_0^{\frac{l}{2}} f(y)\, d\sigma$. Stellen wir die Gleichung der elastischen Linie auf für den gleich gelegenen Punkt xy beider Stäbe, so erhalten wir

$$\frac{EJ_1}{\varrho} = M = P(\delta - y) - \left(\frac{l}{2} - x\right)\int_0^{\frac{l}{2}} f(y)\, d\sigma + \int_x^{\frac{l}{2}} (\xi - x) f(\eta)\, d\sigma$$

$$\frac{EJ_2}{\varrho} = -Z(\delta - y) + \left(\frac{l}{2} - x\right)\int_0^{\frac{l}{2}} (fy)\, d\sigma - \int_x^{\frac{l}{2}} (\xi - x) f(\eta)\, d\sigma.$$

Die Addition beider Gleichungen giebt

$$E(J_1 + J_2)\cdot\frac{1}{\varrho} = (P - Z)(\delta - y) = E(J_1 + J_2)\frac{d^2y}{dx^2},$$

d. h. wir erhalten eine Differentialgleichung analog derjenigen, die auf die Euler'sche Knickformel führt und deren Integral daher lautet:

$$P - Q = \frac{\pi^2 E(J_1 + J_2)}{l^2}$$

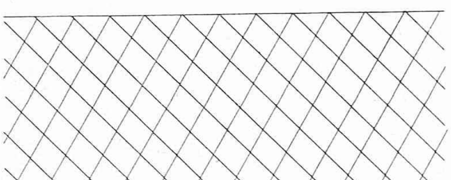
oder es ist die Knickkraft

$$P = \frac{\pi^2 E J_1}{l^2}\left(1 + \frac{J_2}{J_1} + \frac{Z l^2}{E J_1 \pi^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Indem man dieser Knickkraft diejenige eines andern Stabes mit dem Trägheitsmoment J_1 allein, aber einer reducierten Knicklänge $\mu\, l$ gleichsetzt, erhält man als Wert des Reduktionsfaktors μ für die einzuführende Knicklänge

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{J_2}{J_1} + \frac{Q l^2}{E J_1 \pi^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

Fig. 4. **Fachwerk mit ungleich geneigten Streben.**



Nach Bestimmung des Faktors μ berechnet sich hierauf die Knickkraft einfach nach der gebräuchlichen Formel

$$P = \frac{\pi^2 E J_1}{(\mu\, l)^2}.$$

Der Wichtigkeit des Falles wegen habe ich hier die Ableitung kurz wiedergegeben, muss mich im fernern aber auf Angabe der Resultate beschränken. Eine wichtige Erweiterung betrifft Gitterwerk mit ungleich geneigten und ungleich langen Strebenscharen. Es sei die Länge der gedrückten Streben l, diejenige der gezogenen $m\, l$, dann wird die Knickkraft einer Druckstrebe nach Jasinski

$$P = \frac{\pi^2 E J_1}{l^2}\left(1 + \frac{J_2}{m^3 J_1} + \frac{Z l^2}{\pi^2 E J_1 m}\right) \quad . \quad . \quad (2)$$

und der Reduktionsfaktor für die Knicklänge

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{J_2}{m^3 J_1} + \frac{Z l^2}{\pi^2 E J_1 m}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

Diese Gleichungen erfordern nach zwei Seiten hin noch eine Kritik, bevor sie praktisch verwendet werden können. Erstens ist angenommen worden, dass der gegenseitige Einfluss der Strebenscharen auf einander sich stetig über die Länge der Streben verteile, während dieselben sich doch nur an bestimmten Punkten, den Kreuzungsstellen, berühren und nur an diesen Kräfte übertragen werden können. Auch ist es offenbar nicht gleichgültig, an wie vielen Stellen diese Kräfte sich übertragen, ob die Wechselwirkung zwischen Zug- und Druckstrebe sich auf einen einzigen Punkt koncentriere — z. B. den Mittelpunkt bei zweifachem System — oder aber auf mehrere oder gar viele Punkte sich verteile.

Durch genaue Untersuchungen, die Herr Jasinski anstellt, wird dargethan, dass der Fehler gering ist, wenn man *immer* Verteilung des Einflusses auf die ganze Strebenlänge voraussetzt. Selbst beim zweifachen System, bei welchem eine einzige Kreuzung vorkommt, ist der Fehler nur

für $Z = \frac{1}{4} P$ Fehler $= 2{,}5\,\%$.
„ $Z = \frac{1}{3} P$ „ $= 3{,}4\,\%$.
„ $Z = \frac{1}{2} P$ „ $= 5{,}4\,\%$.

Beim dreifachen System, d. h. zwei Kreuzungen für jede Strebe, ist der Fehler noch $1-2\,\%$; er kann also wirklich praktisch immer vernachlässigt werden, wenn man daneben noch die Vorsicht beobachtet, die Formel nur für Fälle anzuwenden, in denen $J_2 < \frac{3}{2} J_1$ und $Z < \frac{1}{2} P$. Beide Bedingungen werden fast immer erfüllt sein, indem in ausgeführten Brücken das Trägheitsmoment der Zugstreben kaum je grösser als dasjenige der Druckstreben ist, ferner die Zugkraft Z in den Zugstreben die Druckkraft D in den Druckstreben nie stark überschreitet, während die Knickkraft P aus Sicherheitsgründen normaler Weise die Druckkraft D viermal, also auch die Zugkraft Z mehrfach überschreitet. Unter diesen Voraussetzungen sind die angegebenen Fehler die grössten überhaupt möglichen.

Der zweite Punkt betrifft den Umstand, dass in Brückenträgern die Spannungen Z in den eine Druckstrebe kreuzenden Zugstreben nicht die nämlichen sind, sondern und zwar meist gegen das Auflager hin wachsen. Diesem Umstand kann man dadurch Rechnung tragen, dass man entweder in die Formel den kleinsten der in Frage kommenden Werte Z einführt, wobei man die Knickfestigkeit etwas zu klein erhält; oder aber indem man überdies auch noch für Z den grössten vorkommenden Wert einführt und für P einen Mittelwert aus diesen beiden möglichen Grenzwerten wählt.

Endlich sei noch erwähnt, dass, wenn $\mu\, l$ kleiner als die Entfernung zweier Kreuzungsstellen ausfällt, dies natürlich nichts anderes heisst, als dass die Strebe als Ganzes nicht auf Knicken, sondern nur auf Druck zu rechnen sei, dagegen aber zwischen den Kreuzungsstellen die Knicksicherheit gewahrt sein muss. Anders ausgedrückt, die Formel verliert ihre Gültigkeit, sobald sich die Knickkraft P der ganzen Strebe grösser herausstellt als die Tragkraft P' eines zwischen zwei Kreuzungspunkten enthaltenen Stückes derselben, was ganz naturgemäss, denn die Ableitung geschah unter Voraussetzung einer einfachen Knickungskurve, während wenn $P' < P$, der Stab sich wellenförmig ausbiegen wird mit den Kreuzungsstellen als festen Punkten.

(Schluss folgt.)