

Die innern Stabkräfte eines belasteten Fachwerkringes, graphisch ermittelt

Autor(en): **Bohny, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **29/30 (1897)**

Heft 20

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-82472>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Die inneren Stabkräfte eines belasteten Fachwerkringes, graphisch ermittelt. — College de Boudry près Neuchâtel. — Bemerkungen zu dem Aufsätze von Prof. Fliegner über „Ein neues Momentenplanimeter“, Erwiderung von Prof. Fliegner. — Miscellanea: Die schweizerischen Eisenbahnen im Jahre 1896. Das Hütten-Gehheimnis vom Gerechten Steinmetzen-Grund. Internationales Komitee für Masse und Gewichte. Sammlung von Photographien englischer Baudenkmäler im Britischen Museum. Bau der Schwurplatzbrücke in Budapest. Die 38. Hauptversammlung des Vereins Deutscher Ingenieure. Die Nutzbarmachung der Wasser-

kräfte des Tessin in Italien. Ein Schiffahrtskanal zwischen dem Japanischen Meer und dem Stillen Ozean. Der internationale Kongress für technischen Unterricht. Gasmotorenbetrieb mit Gichtgasen. Elektr. Strassenbahnen in London. Elektr. Nutzbarmachung der Wasserkraft des Nils. Restauration der St. Peterskirche des Montmartre in Paris. Zürichbergbahn. — Konkurrenzen: Bahnhofanlagen in Christiania. Rathaus in Charlottenburg. Tribünenbauten auf der Rennbahn der Trabrenn-Gesellschaft in Moskau. Kornhäuser in Bern. — Vereinsnachrichten: G. e. P. Sektion Zürich: Frühjahrs-Exkursion. Stellenvermittlung. XXVIII. Adressverzeichnis.

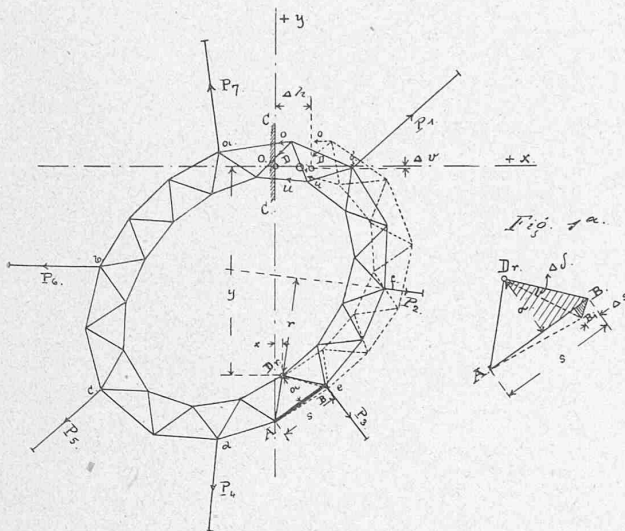
Die inneren Stabkräfte eines belasteten Fachwerkringes, graphisch ermittelt.

Von F. Bohny, Ingenieur.

Wird ein geschlossener Fachwerkring von äussern Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, beansprucht, so lässt sich im allgemeinen der Kräfteplan auf unendlich viele Arten durchkonstruieren, wenn man nur den, in einem durch den Ring gelegten Schnitte, getroffenen drei Stäben beliebige Kräfte zulegt. Es ist aber klar, dass für jeden Belastungsfall den vom Schnitte getroffenen Stäben nur ganz bestimmte Kräfte zukommen, bei deren Ermittlung wir von der Formänderung des ganzen Fachwerkes ausgehen müssen.

Der in Fig. 1 dargestellte Fachwerkring sei von den äussern Kräften P_1, P_2, \dots beansprucht, welche im Gleichgewicht stehen, d. h. ihr Kräftepolygon und ihr Seilpolygon

Fig. 1 und Fig. 1a.



schliessen sich. Wir denken uns nun den Ring an irgend einer Stelle, z. B. C—C, durchschnitten. Den linksseitigen Anschluss an C—C halten wir fest und sehen zu, wie sich der rechtsseitige Anschluss in Folge der äussern Kräfte P_1, P_2, \dots deformiert. Ist diese Deformation erfolgt, so müssen die durch den Schnitt getroffenen Stabkräfte O, D und U , bezw. deren Resultierende R , die Bewegung wieder rückgängig machen und die beiden Schnittenden wieder zur Deckung bringen. Dies ist die Bedingung, aus welcher sich die Ermittlung der richtigen Kräfte O, D und U , bezw. deren Resultierende R , samt der Lage der letzteren, durchführen lässt.

Durch irgend einen Punkt des Schnittes C—C legen wir ein Achsensystem $x-y$, auf welches System wir die Deformation des rechtsseitigen Schnittendes beziehen.

Von den Stäben des Ringes sei nun zunächst bloss ein einziger, z. B. der Stab AB elastisch. Dann wird unter dem Einfluss der Kraft P_2 z. B. der rechts von D_r , dem Drehpunkte von AB , gelegene Teil des Fachwerkes eine kleine Drehung um D_r machen, während der links von D_r befindliche Fachwerksteil in Ruhe bleibt. Die Grösse der Drehung lässt sich ermitteln aus der Deformation des Stabes AB . Die Stabkraft selbst ist $\frac{P_2 \cdot r}{a}$

und somit:

$$\Delta s = \frac{P_2 \cdot r}{a} \cdot \frac{s}{F \cdot E}$$

(a = Hebelarm, s = Stablänge, F = Querschnitt des Stabes, E = Elasticitätsmodul.)

Bezeichnen wir den Drehungswinkel mit $\Delta \delta$, so wird gemäss Fig. 1 a, indem man den Weg BB_1 auf AB projiziert und so ähnliche Dreiecke herstellt:

$$BB_1 : \Delta s = D_r B : a$$

Wegen der Kleinheit der Deformation dürfen wir $BB_1 = D_r B \cdot \Delta \delta$ setzen, somit:

$$D_r B \cdot \Delta \delta : \Delta s = D_r B : a$$

oder

$$\Delta \delta = \frac{\Delta s}{a}$$

Hierin noch den obigen Wert von Δs eingesetzt, giebt dies:

$$\Delta \delta = \frac{P_2 \cdot r \cdot s}{F \cdot E \cdot a^2} \quad (1)$$

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man an Stelle eines äussern Gurtes einen inneren setzt, oder einen Diagonalstab.

Die Koordinaten von D_r in bezug auf unser Achsensystem seien y und x . Infolge der Drehung $\Delta \delta$ wird sich also die Verschiebung des Koordinatenanfanges ermitteln zu:

$$\Delta b = y \cdot \Delta \delta$$

$$\Delta v = x \cdot \Delta \delta$$

oder

$$\Delta b = P_2 \cdot r \cdot y \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} \quad (2)$$

$$\Delta v = P_2 \cdot r \cdot x \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} \quad (3)$$

Jetzt ist es leicht, auf die Formänderung der ganzen Konstruktion überzugehen, indem man die eben gemachte Untersuchung auf sämtliche von P_2 beeinflusste Ringstäbe ausdehnt. Es ist dies der vom fest gehaltenen Ringende an bis zur Kraft P_2 sich erstreckende Fachwerkteil (in Fig. 2 schraffiert.) Die Einzelverschiebungen und Einzeldrehungen infolge Deformation dieser Partie addieren sich einfach, und es wird:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\delta} &= \sum_o^f \Delta \delta = P_2 \sum_o^f r \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} \\ \underline{b} &= \sum_o^f \Delta b = P_2 \sum_o^f r \cdot y \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} \\ \underline{v} &= \sum_o^f \Delta v = P_2 \sum_o^f r \cdot x \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wir nennen den Ausdruck $\frac{s}{F \cdot E \cdot a^2}$ eines Stabes sein *elastisches Gewicht* und bezeichnen ihn mit Δg , ferner $\sum_o^f \Delta g = G_2$. Denkt man sich diese elastischen Gewichte Δg in den Drehpunkten der einzelnen Stäbe wirkend, so bedeutet:

$$\sum_o^f r \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} = \sum_o^f r \cdot \Delta g$$

das *statische Moment* aller Δg von $o-f$ bezüglich der Richtung der äussern Kraft P_2 ,

ferner: $\sum_o^f r \cdot y \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} = \sum_o^f r \cdot y \cdot \Delta g$

das *Centrifugalmoment* aller Δg von $o-f$ bezüglich der Richtung der äusseren Kraft und bezüglich der x -Achse,

und drittens: $\sum_o^f r \cdot x \cdot \frac{s}{F \cdot E \cdot a^2} = \sum_o^f r \cdot x \cdot \Delta g$

das *Centrifugalmoment* aller Δg von $o-f$ bezüglich der Kraftrichtung und der y -Achse.

Das statische Moment und die Centrifugalmomente der Gewichte der Ringpartie $o-f$ bezüglich beliebiger Achsen lassen sich sehr einfach darstellen, indem man mit Hülfe der Δg , in den einzelnen Drehpunkten wirkend, eine

Centralellipse zeichnet (Fig. 2), analog wie man für jede geschlossene ebene Figur eine Centralellipse zeichnen kann. Diese Ellipse lässt sich sowohl analytisch leicht berechnen, als auch graphisch mittelst fünf Seilpolygonen konstruieren. Für die Ringpartie $o-f$ sei dieselbe gegeben samt ihrem Mittelpunkt S_2 . Dann ist sofort:

$$\sum_0^f r \Delta g = G_2 \cdot r_2.$$

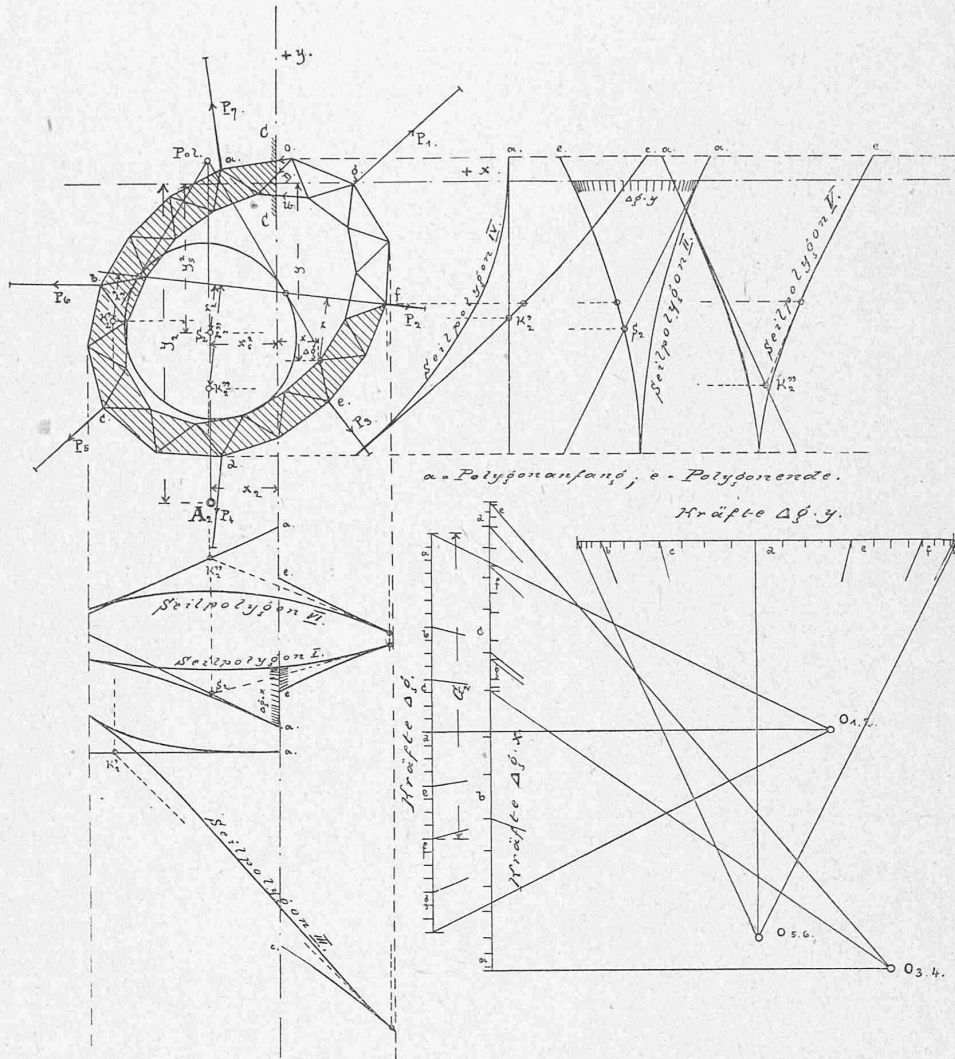
Ferner wenden wir den bekannten Culmann'schen Satz an: (vergl. Culman, Graphische Statik, II. Auflage, p. 404.)

Das Centrifugalmoment irgend einer ebenen Figur bezüglich zweier beliebiger Achsen ist gleich dem Flächeninhalte der Figur

Ringpartie $o-f$ mit der äussern Kraft P_2 die einzelnen fraglichen Strecken und Punkte ermittelt sind.

Nachdem die elastischen Gewichte Δg für den ganzen Ring berechnet (es genügt in den meisten praktischen Fällen, dieselben bloss für die Gurten zu bilden und die Diagonalen zu vernachlässigen), trägt man dieselben in irgend einem Masstabe in einem Kräftepolygon auf und konstruiert mit irgend einem beliebigen Pole $O_{1,2}$ die Seilpolygone I. und II. Im ersten wirken die Kräfte Δg vertikal, im zweiten horizontal; es stehen also die Seilpolygonseiten von II. normal zu den Strahlen aus $O_{1,2}$. Der Schwerpunkt der Ringpartie $o-f$ findet sich, indem

Fig. 2.



mal der Entfernung des Schwerpunktes von der einen Achse, mal der Entfernung des Antipoles dieser Achse von der zweiten.

In unserem Falle ist der Flächeninhalt der Figur identisch mit $\sum_0^f \Delta g = G_2$, somit, wenn A_2 der Antipol bezüglich der Krafrichtung P_2 , ist:

$$\sum_0^f \Delta g r \cdot y = G_2 \cdot r_2 \cdot y_2$$

und

$$\sum_0^f \Delta g r x = G_2 r_2 \cdot x_2.$$

So einfach nun diese Thatsache ist, so umständlich ist es doch, besonders bei vielen Kräften, für die verschiedenen Ringpartien $o-a$, $o-b$, $o-g$, und schliesslich für den ganzen Ring die einzelnen Centralellipsen zu konstruieren. Wir müssen daher suchen, die Antipolpunkte A_1, A_2 , bezw. deren Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 , . . . auf anderem Wege zu ermitteln.

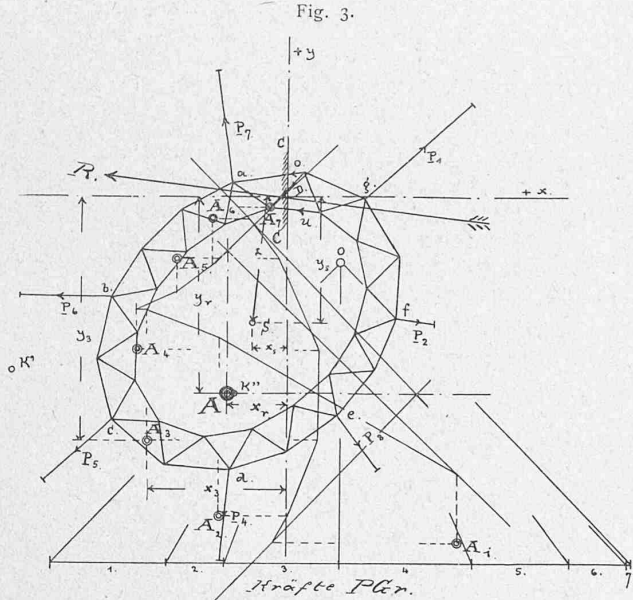
Dies ist in Fig. 2 geschehen, wobei speciell für die

man in beiden Polygonen die erste Tangente und diejenige in f zum Schnitte bringt und diese Schnitte in die Ringfigur überträgt. Mit S_2 ist auch die Grösse r_2 gefunden und:

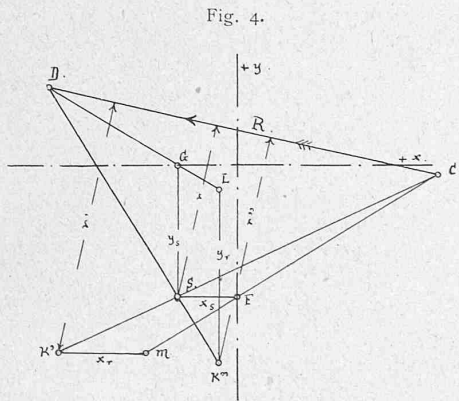
$$\delta = \frac{P_2 G_2 r_2}{.} \quad (5)$$

Zur Ermittlung der Centrifugalmomente bedürfen wir der Ausdrücke $\sum_0^f \Delta g \cdot r \cdot y$ und $\sum_0^f \Delta g \cdot r \cdot x$. Die Grössen $y \cdot \Delta g$ und $x \cdot \Delta g$ kommen dabei bei jeder äussern Kraft und jeder Ringpartie wieder vor, wir können dieselben also sofort von vornherein berechnen. In Fig. 2 sind dieselben auch graphisch konstruiert als Abschnitte der Seilpolygon-Seiten von Polygon I und II auf den Koordinatenachsen. Jedoch bilden sich auf diese Weise die Gewichtsmomente bezüglich der Achsen nur sehr klein und daher ungenau, so dass es sich empfiehlt, diese einfachen Produkte rechnerisch durchzuführen und dann separat in grösserem Masstabe aufzutragen, wie es Fig. 2 rechts unten

zeigt. Dem wechselnden Vorzeichen von x und y entsprechend werden die $x \cdot \Delta g$ und $y \cdot \Delta g$ zum Teil positiv, zum Teil negativ, was beim Auftragen zu beachten ist. Wir betrachten diese Produkte als weitere Kräfte und lassen sie wieder in den Drehpunkten der einzelnen Stäbe wirken und zwar auch wieder vertikal und horizontal. Die zur Konstruktion der dadurch entstehenden Seilpolygone nötigen Pole sind $O_{3,4}$ und $O_{5,6}$ und sind in beliebiger Poldistanz von der Kräftelinie gewählt.



Mit Hilfe von Seilpolygon III und IV ist es jetzt möglich, den Schwerpunkt der Produkte $\Delta g \cdot x$ für eine beliebige Ringpartie zu finden. Für die Ringpartie $o-f$ sei derselbe in K_2' gefunden, als Schnitt der Tangenten am Ende und in Punkt f der zwei genannten Seilpolygone.



In analoger Weise lässt sich für die Ringpartie $o-f$ der Schwerpunkt aller $\Delta g \cdot y$ finden, er sei K_2'' und seine Distanz von der Krafrichtung r_2'' . Dann ist:

$$\begin{aligned} \sum_o^f \Delta g y r &= r_2'' \cdot \sum_o^f \Delta g y \\ &= G_2 r_2'' \cdot y_s^2, \end{aligned}$$

und durch Gleichsetzung mit obigem Werte:

$$G_2 r_2 \cdot y_2 = G_2 r_2'' \cdot y_s^2.$$

$$\frac{y_2}{r_2} = \frac{r_2'' \cdot y_s^2}{r_2} \dots \dots \dots (7)$$

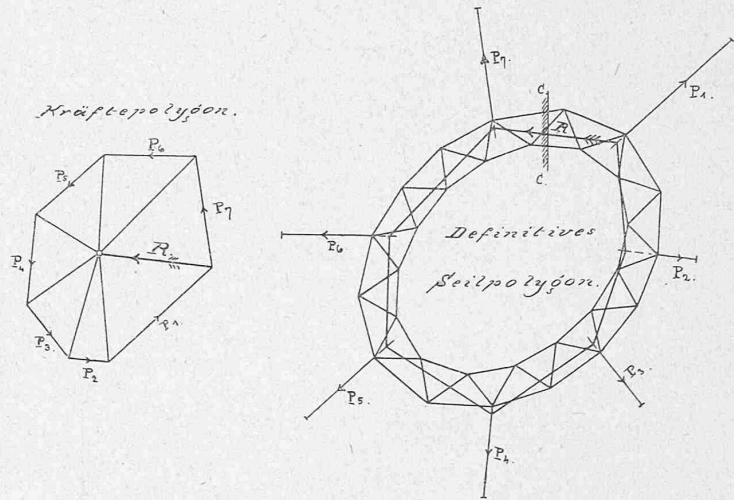
Damit ist auch die Ordinate von A_2 gefunden.

Man sieht, dass, wenn die sechs Seilpolygone für den ganzen Ring gezeichnet sind, es einfach der Verlängerung von Seiten derselben bedarf, um auf einfachste Weise für jede Ringpartie die Punkte S , K' und K'' zu ermitteln. Sind dieselben gefunden, so sind deren Abstände von der Krafrichtung und von den Koordinatenachsen die Werte r , r' , r'' und x_s und y_s . Nach Gleichung (6) und (7) lassen sich dann die Koordinaten x und y der Antipole bestimmen. Obacht ist dabei nur noch zu geben, in welchem Quadranten A liegt. Hierbei gilt zunächst, dass Antipol und Krafrichtung immer auf entgegengesetzten Seiten von S liegen. Da weiter x_s und y_s dem Vorzeichen nach bekannt sind, ist es nur noch fraglich bezüglich des Vorzeichens von r , r' und r'' . Hierbei gilt jeweilen die Krafrichtung als Achse; sind r und r' , oder r und r'' , auf derselben Seite der Krafrichtung, so sind sie mit demselben Zeichen einzuführen; liegen sie entgegengesetzt, so haben sie verschiedenes Vorzeichen. Dass sich die Ordinaten der Antipole gemäss den Gleichungen (6) und (7) aus den einzelnen Strecken r , r' , r'' auch graphisch, durch Konstruktion ähnlicher Dreiecke, ermitteln lassen, braucht wohl nur erwähnt zu werden.

In Fig. 3 seien nun auf die eben beschriebene Weise die Antipole für die verschiedenen Ringpartien gefunden, und zwar:

- A_1 zu P_1 für die Ringpartie $o-g$: x_1, y_1, r_1, G_1 .
- A_2 zu P_2 für die Ringpartie $o-f$: x_2, y_2, r_2, G_2 .
- A_3 zu P_3 für die Ringpartie $o-c$: x_3, y_3, r_3, G_3 u. s. w.

Fig. 5.



Dann ist:

$$\sum_o^f \Delta g x \cdot r = r_2' \cdot \sum_o^f \Delta g x.$$

$\sum_o^f \Delta g x$ ist aber gleich $G_2 x_s^2$, somit:

$$\sum_o^f \Delta g x r = G_2 r_2' \cdot x_s^2,$$

und durch Vergleich mit obigem Ausdrucke von $\sum_o^f \Delta g r x$ erhält man:

$$G_2 r_2 x_2 = G_2 r_2' \cdot x_s^2.$$

$$\frac{x_2}{r_2} = \frac{r_2' \cdot x_s^2}{r_2} \dots \dots \dots (6)$$

wodurch die Abscisse von A_2 gefunden ist.

Der Schwerpunkt aller Δg sei S , die Summe aller $\Delta g = G$. Ferner sei R die Resultierende der durchschnittenen Stäbe, r deren Entfernung von S , y_r und x_r die Ordinaten des Antipoles A von R bezüglich der Central-ellipse des ganzen Ringes.

Die Bewegungen, welche das freie Ringende infolge der Kräfte $P_1, P_2 \dots$ ausführt, sind:

$$\left. \begin{aligned} \sum \delta &= \sum P G r \\ \sum b &= \sum P G r y \\ \sum v &= \sum P G r x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

