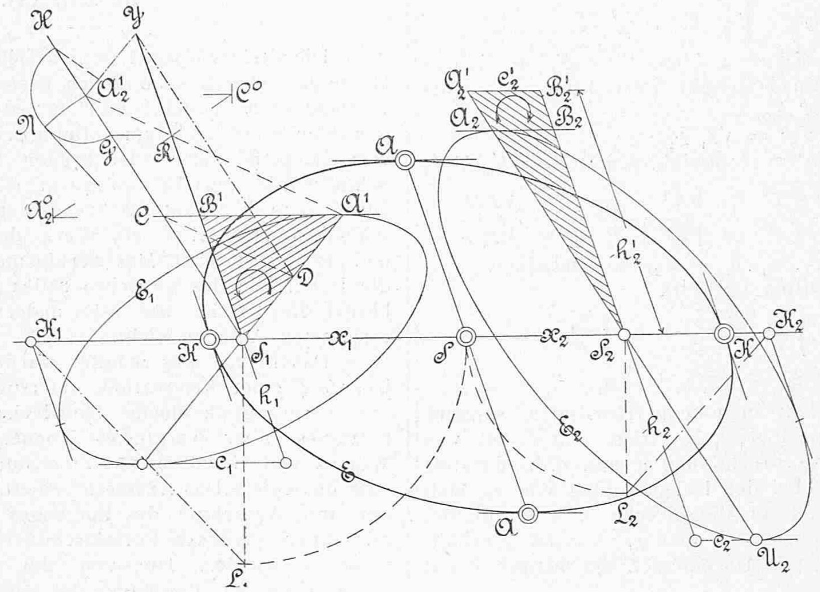
Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 31/32 (1898)
Heft: 14

Artikel: Centralellipse zweier Flächen
Autor: Hartmann
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20803

Centralellipse zweier Flächen.

1. In Nr. 23, Bd. I d. Z. hat Ingenieur Hilgard das Culmann'sche Verfahren zur Bestimmung der Centralellipse zweier Flächen beschrieben, wenn die Centralellipsen der Teilflächen gegeben sind. Liegen die Schwerpunkte S_1, S_2 der letztern nahe bei einander oder fallen sie zusammen, so ist das Verfahren nicht mehr ohne weiteres anwendbar; aus dessen Ableitung ergiebt sich aber sofort, dass wenn an Stelle von x_1, x_2 ihnen proportionale Grössen gesetzt werden, nur die Ermittelung des in $S_1\,S_2$ fallenden Halbmessers sich etwas ändert. Solche proportionale Grössen sind F_2, F_1; indem man sie in den Formeln belässt, wird die Konstruktion grundsätzlich nicht geändert, kann dagegen in allen Fällen unmittelbar angewendet werden. — Im weitern kommt es vor, dass von der Centralellipse der Gesamtfläche einzig die Richtung des zu $S_1\,S_2$ konjugierten Durchmessers benötigt wird; diese Richtung zu erhalten, bedarf es nach dem von Hilgard beschriebenen Verfahren der Ermittelung des einen Halbmessers der Centralellipse. Einfacher, oftmals auch genauer, dürfte die nachstehend beschriebene Konstruktion sein.

Fig. 1.



2. In Figur 1 seien S_1, S_2 die Schwerpunkte, E_1, E_2 die Centralellipsen der beiden Teilflächen F_1, F_2. Wäre die Centralellipse E der Gesamtfläche $F = F_1 + F_2$ bekannt, so würden die parallel zu $S_1\,S_2$ an die Ellipsen gezogenen Tangenten in ihren Berührungspunkten die zu $S_1\,S_2$ konjugierten Durchmesser SA, $S_1\,A_1$ und $S_2\,A_2$ geben. Auf $S_1\,S_2$ und SA als Axen bezogen, ist das Centrifugalmoment C der Fläche F gleich Null; Parallelen zu SA durch die Schwerpunkte der Teilflächen bestimmen der letztern Centrifugalmoment C_1, C_2 für dieselben Achsen zu

$$C_1 = h_1\,c_1\,F_1$$
$$C_2 = h_2\,c_2\,F_2;$$

da $C_1 + C_2 = C = o$, so kann man schreiben:

$$h_1\,c_1\frac{F_1}{F_2} + h_2\,c_2 = o$$

oder auch $h_1\,c_1 + h_2\,c_2\,\dfrac{F_2}{F_1} = o$

Die Produkte $h_1\,c_1$, $h_2\,c_2$ können durch die ihnen proportionalen Flächen der Dreiecke $S_1\,A_1\,B_1$, $S_2\,A_2\,B_2$ ersetzt werden. Reduziert man eine der Längenabmessungen dieser Dreiecke im Verhältnis $\sqrt{F_1 : F_2}$ bezw. $\sqrt{F_2 : F_1}$ und verzeichnet damit ein dem ursprünglichen ähnliches Dreieck, so wird dadurch des letztern Inhalt im Verhältnis $F_1 : F_2$ bezw. $F_2 : F_1$ reduziert. Als bekannt sind von den in Frage stehenden Dreiecken die Seiten $\overline{S_1\,A_1}$, $\overline{S_2\,A_2}$ anzusehen; diese wird man also reduzieren. In Figur 1 wurde

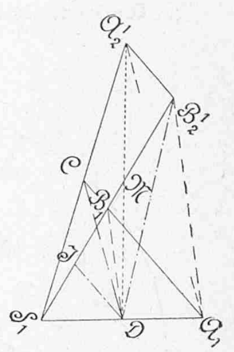
$$\overline{S_2\,A_2'} = \overline{S_2\,A_2}\,\sqrt{F_2 : F_1}$$

gemacht[1]) und damit das zu $S_2\,A_2\,B_2$ ähnliche Dreieck $S_2\,A_2'\,B_2'$ gezeichnet; es muss demnach

$$\text{Dreieck } S_1\,A_1\,B_1 + \text{Dreieck } S_2\,A_2'\,B_2' = o$$

sein. Der Umfahrungssinn beider Dreiecke ist entgegengesetzt, dem absoluten Werte nach müssen sie also inhaltsgleich sein. Darnach wird die Richtung SA in einfacher Weise wie folgt erhalten: verschiebe $\overline{S_2\,A_2^1}$ parallel zu sich selbst nach $\overline{S_1\,A_2^1}$, schneide diese Gerade mit $A_1\,B_1$ in C und ziehe $CD \parallel A_2^1\,A_1$, so giebt die Diagonale $S_1\,Y$ des zum Parallelogramm ergänzten Dreiecks $S_1\,A_2^1\,D$ die Richtung des zu $S_1\,S_2$ konjugierten Durchmessers der Centralellipse E der Gesamtfläche. Statt das Parallelogramm zu zeichnen, kann man natürlich auch die Strecke $\overline{A_2^1\,D}$ halbieren; der Halbierungspunkt bestimmt dann ebenfalls die Richtung SY.

Fig. 2.



Die Richtigkeit des Gesagten einzusehen, ziehe durch A_2^1 die Parallele zu $A_1\,B_1$, so ergiebt sich Figur 2. In dieser $B_1\,D'' \parallel B'_2\,A_1$ gezogen, verwandelt das Dreieck $S_1\,A_1\,B_1$ in das inhaltsgleiche Dreieck $S_1\,D\,B_2'$; dieses ist demnach auch inhaltsgleich dem Dreieck $S_1\,A_2'\,B_2'$, und da $\overline{S_1\,B_2'}$ die gemeinsame Grundlinie der zwei zuletzt genannten Dreiecke ist, so müssen deren Höhen, mithin auch diesen proportionale Längen, gleich sein. Zieht man daher durch D eine Parallele zu $A_2'\,B_2'$, so muss $\overline{D\,J} = \overline{A_2'\,B_2'}$ sein, d. h. $S_1\,B_2'$ halbiert die Strecke $\overline{A_2'\,D}$, womit die Richtigkeit der oben gegebenen Konstruktion bewiesen ist.

Man kann die Gleichung

$$h_1\,c_1 + h_2\,c_2\,\frac{F_2}{F_1} = h_1\,c_1 + \left(h_2\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}\right)\left(c_1\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}\right) = h_1\,c_1 + h_2'\,c_2' = o$$

auch statisch deuten. Statt die h in der Richtung SA, die C in der Richtung $S_1\,S_2$ kann man sie auch in beliebigen andern Richtungen messen; also z. B. die h in der Richtung $S_1\,A_2^1$, die c in der Richtung $A_2^1\,A_1$. Dann lautet vorstehende Gleichung:

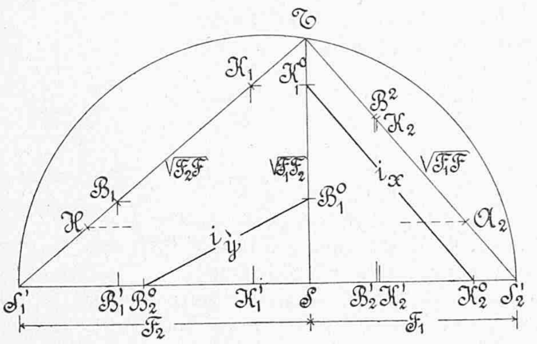
$$\overline{S_1\,C}\,.\,\overline{A_1\,R} + \overline{S_1\,A_2^1}\,.\,\overline{A_2^1\,R} = o$$

[1]) In vielen Fällen wird die reduzierte Länge am einfachsten mit dem Rechenschieber bestimmt. Sie zeichnerisch zu ermitteln, verschiebe $\overline{S_2\,A_2}$ parallel zu sich selbst nach $\overline{S_1\,G}$, schneide diese Gerade in H mit $U_2\,S$, so erhalte $\overline{S_1\,H} = \overline{S_2\,A_2}\,.\,F_2 : F_1$, da $x_1 : x_2 = F_2 : F_1$. Die von S_1 an den über $\overline{G\,H}$ beschriebenen Halbkreis gezogene Tangente hat somit die Länge $\overline{S_1\,N} = \sqrt{\overline{S_1\,G}\,.\,\overline{S_1\,H}} = \overline{S_2\,A_2}\,\sqrt{F_2 : F_1} = \overline{S_2\,A_2'}$. Liegen S_1 und S_2 nahe bei einander, so muss man $\overline{S_1\,H}$ in einer besondern Figur ermitteln. — Werden von der Centralellipse E auch die Halbmesser bestimmt, so entnimmt man $\overline{S_2\,A_2'}$ bezw. $\overline{S_1\,A_1'}$ der hiezu benötigten Hilfsfigur (s. weiter unten, Figur 3).

d. h. R ist der Angriffspunkt der Resultierenden der parallelen Kräfte $\pm \overline{S_1\,C}$ und $\pm \overline{S_1\,A_2^1}$; denn die Verschiedenheit des Vorzeichens kommt in $\overline{A_1\,R}$ und $\overline{A_2^1\,R}$ zum Ausdruck. Indem man von A_1 und A_2^1 aus auf zwei durch diese Punkte gezogene Parallelen, z. B. auf $A_1\,A_2^0$ und $A_2^1\,C^0$, die Längen $\overline{S_1\,C}$ und $\overline{S_1\,A_2^1}$ wechselweise abträgt, bestimmt die Verbindungsgerade $A_2^0\,C^0$ ihrer Endpunkte auf $A_1\,A_2^1$ den Punkt R, welcher in $S_1\,R$ ebenfalls die Richtung SA ergiebt.

3. Die Centralellipse E ist nun rasch bestimmt.

Fig. 3.



Der Halbmesser in dem zu $S_1\,S_2$ konjugierten Durchmesser hat die Länge:

$$\overline{S\,A} = i_y = \sqrt{\frac{F_1}{F}\,b_1^2 + \frac{F_2}{F}\,b_2^2}$$

Beschreibt man nach Figur 3 über $F = F_2 + F_1$ den Halbkreis, so hat die im Teilpunkt S errichtete Senkrechte die Länge

$$\overline{S\,T} = \sqrt{F_1\,F_2};$$

mithin sind die Katheten im rechtwinkligen Dreieck $S'_1\;T\,S'_2$

$$\overline{S_1'\,T} = \sqrt{\overline{S\,S_1'}^2 + \overline{S\,T}^2} = \sqrt{F_2^2 + F_1\,F_2} = \sqrt{F_2\,F}$$

$$\overline{S_2'\,T} = \sqrt{\overline{S\,S_2'}^2 + \overline{S\,T}^2} = \sqrt{F_1^2 + F_1\,F_2} = \sqrt{F_1\,F}$$

Macht man $\overline{S_1'\,B_1} = b_1$, $\overline{S_1'\,B_2} = b_2$, so sind die von B_1 und B_2 auf $S_1'\;S_2'$ gefällten Lothe[1])

$$\overline{B_1\,B'_1} = b_1\sqrt{\frac{F_1}{F}},\; \overline{B_2\,B'_2} = b_2\sqrt{\frac{F_2}{F}},$$

somit ist $i_y = \sqrt{\overline{B_1\,B_1'}^2 + \overline{B_2\,B_2'}^2}$.

In Wirklichkeit zieht man keine Hilfslinien, sondern spannt, wenn man b_1 nach $\overline{S'_1\,B_1}$ überträgt, den Zirkel von B_1 nach B'_1 und trägt die Strecke in $\overline{S\,B_1^0}$ auf, d. h. markiert B_1^0; ebenso spannt man bei der Uebertragung von b_2 nach $\overline{S_2'\,B_2}$ von B_2 nach B_2', trägt die Strecke in $\overline{S\,B_2^0}$ auf und spannt von B_2^0 nach B_1^0. wodurch man $i_y = \pm\,\overline{S\,A}$ erhält.

Der in $S_1\;S_2$ liegende Halbmesser der Ellipse E hat die Länge

$$\overline{S\,K} = i_x = \sqrt{\frac{F_1}{F}\,(k_1^2 + x_1^2) + \frac{F_2}{F}\,(k_2^2 + x_2^2)}$$

wenn $k_1 = \overline{S_1\,K_1}$ und $k_2 = \overline{S_2\,K_2}$ die Abschnitte sind, welche auf $S_1\;S_2$ durch die zu $SA\,(S_1\;Y)$ parallelen Tangenten an die Teilellipsen bestimmt werden. Die Klammerinhalte erhält man zu $\overline{K_1\,L_1}^2$ bezw. $\overline{K_2\,L_2}^2$; die Längen $\overline{K_1\,L_1}$ und $\overline{K_2\,L_2}$ sind also in Figur 3 wie b_1 und b_2 zu behandeln und ergeben so

$$i_x = \sqrt{\overline{K_1K_1'}^2 + \overline{K_2\;K_2'}^2}$$

Von der Ellipse E hat man jetzt den Mittelpunkt S und die vier Punkte A und K nebst ihren Tangenten, kann somit alle auf E bezüglichen Aufgaben in einfachster Weise lösen.

Der Figur 3 können auch die reduzierten Halbmesser $\overline{S_2\,A_2}'$ bezw. $\overline{S_1\,A_1}'$ leicht entnommen werden: mache $\overline{T\,A_2} = \overline{S_2\,A_2}$ und ziehe durch A_2 die Parallele zu $S_2'\;S_1'$, so erhalte

$$\overline{T\,H} = \overline{T\,A_2}\,\sqrt{F_2 : F_1} = \overline{S_2\,A_2}'\,^{1)}$$

[1]) Man beachte, dass die Längen der Teilflächen F_1 bezw. F_2 auf die in Figur 3 an F_2 bezw. F_1 anliegende Kathete des Dreiecks $S_1'\;T\,S_2'$ zu übertragen sind.

4. Da $F_1\;x_1 = F_2\;x_2$ und $F_1\;(x_1 + x_2) = F\,x_2$, so kann man schreiben:

$$\frac{F_1}{F}\,x_1^2 + \frac{F_2}{F}\,x_2^2 = \frac{F_1\,x_1}{F}\,(x_1 + x_2) = x_1\,x_2$$

und damit

$$i_x = \sqrt{x_1\,x_2 + \frac{x_2}{x_1 + x_2}\,k_1^2 + \frac{x_1}{x_1 + x_2}\,k_2^2}$$

Vereinigt man Figur 3 mit Figur 1, lässt also S_1' mit S_1, S_2' mit S_2 zusammenfallen, so wird $\overline{S\;T} = \sqrt{x_1\,x_2}$, und man hat die Formel und Konstruktion, wie Hilgard sie giebt.

Konstantinopel, Juni 1898. *Hartmann.*

Wettbewerb für ein Post- und Telegraphen-Gebäude in Schaffhausen.

II.

In gleichem Range mit dem in voriger Nummer veröffentlichten Entwurf „Der Munothstadt" ist der von Herrn Architekt *Mund-Wehrli* in Basel eingereichte Entwurf „Im Charakter der alten Stadt" prämiiert worden (II. Preis). Darstellungen dieses Projektes sind auf Seite 104 und 105 zu finden.

Turmbau und Renovation der Predigerkirche in Zürich.

Die altehrwürdige Kirche des ehemaligen Prediger- oder Dominikanerklosters in Zürich besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Teilen, dem für die Volkspredigten bestimmten Schiff und dem daran anschliessenden, den Kultusverrichtungen der Ordensbrüder dienenden Chor. Das Schiff wurde ums Jahr 1240 in den einfachsten Formen der Frühgotik erbaut, während der hohe Chor mit dem schlanken Dachreiter ein Werk des 14. Jahrhunderts ist und in den reichen Masswerkformen der Fenster bereits die Ueberreife des gotischen Stiles andeutet. Einen Turm besitzt die Kirche wie alle andern von den Bettelorden errichteten Anlagen nicht.

Das Innere des Schiffes wurde in den Jahren 1611 bis 1614 einer Renovation unterzogen, bei welcher man die ursprünglich flache Holzdecke durch ein ebenfalls hölzernes aber vergipstes Tonnengewölbe ersetzte und Wände und Gewölbe mit Stuccaturen im Stil jener Zeit ausschmückte. Das Aeussere behielt seine gotischen Formen bei, mit Ausnahme des Einganges auf der Südseite, der mit einer barocken Portalarchitektur und einer Vorhalle versehen wurde. Die von der südlichen Seitenschiffmauer nach der Obermauer des Mittelschiffes hinaufreichenden Strebebögen sind, trotz ihrer gotischen Form, nachweisbar erst bei Anlass dieser Renovation, vielleicht auch noch etwas später, aufgeführt worden.

Nach der Reformation wurde der Chor vom Schiff durch Ausmauerung des Chorbogens abgetrennt, durch Zwischenböden in Stockwerke eingeteilt, und fand dann für allerlei profane Zwecke Verwendung; seit mehreren Jahrzehnten ist die Kantonsbibliothek darin untergebracht.

Bis vor kurzem gehörte die Predigerkirche dem Staat; durch eine zwischen Staat und Predigergemeinde getroffene Vereinbarung jedoch ging das Schiff in den Besitz der Kirchgemeinde über, während der Chor dem Staate verbleibt. Durch dieses Uebereinkommen verlor aber die Kirchgemeinde das Benutzungsrecht eines als Unterweisungszimmer dienenden Raumes im Chor, der zugleich den Zugang zur Kanzel bildete; ebenso verlor sie das Recht, die im Dachreiter des Chores befindliche kleine Glocke für kirchliche Zwecke läuten zu lassen, und es ergab sich somit die Notwendigkeit, für ein neues Geläute und ein anderes Unterweisungszimmer Raum zu schaffen.

Der projektierte Turmbau erfüllt nun diese Zwecke; er ist bestimmt, ein der Kirchgemeinde und der ganzen