

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 33/34 (1899)  
**Heft:** 18

**Artikel:** Berechnung eines auf excentrischen Druck beanspruchten Stabes  
**Autor:** Koechlin, René  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21333>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 05.02.2025

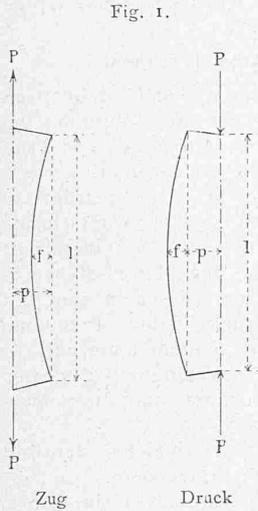
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### Berechnung eines auf excentrischen Druck beanspruchten Stabes.

Von René Koechlin in Paris.

I.

**Einleitung.** Meistens richtet man die auf Druck beanspruchten Konstruktionsteile so ein, dass die Kraftrichtung mit der Stabachse zusammenfällt. Nicht selten kommt aber auch der Fall vor, dass die Kraft parallel zur Stabachse, aber mit einem Excentricitätshebel wirkt. Diese Excentricität  $p$  (Fig. 1) bewirkt eine Verbiegung der Stabachse und infolgedessen eine Veränderung der ursprünglichen Excentricität.



Ist  $f$  die Pfeilhöhe der Verbiegung in der Mitte des Stabes, so nimmt bei Zug die Excentricität den Wert  $p-f$ , bei Druck den Wert  $p+f$  an. Für eine Zugkraft wird also in der äussersten Faser, wo die Maximalspannung eintritt, diese Maximalspannung verkleinert, für eine Druckkraft hingegen vergrössert.

Wenn also für Zugkräfte die Verbiegung ohne Schaden für die Sicherheit vernachlässigt werden kann, so ist dies für Druckkräfte nicht der Fall.

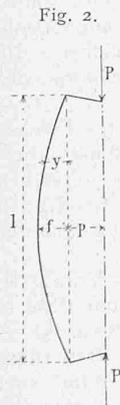
In folgender Ableitung soll der Einfluss der Excentricität für auf Druck beanspruchte Stäbe abgeleitet werden.

- Ableitung der Formeln.** — Es sei:  
 $P$  die wirkende Druckkraft,  
 $l$  die Stablänge,  
 $F$  die Querschnittsfläche des Stabes,  
 $I$  das Trägheitsmoment des Querschnittes für die senkrecht zur Biegungsebene liegende Schwerpunktschwerachse,  
 $i = \frac{I}{F}$  der Trägheitsradius,

$W$  das Widerstandsmoment =  $\frac{J}{e}$  ( $e$  Abstand der äussersten Faser),

- $k$  die Kernweite =  $\frac{W}{F}$ ,  
 $p$  der ursprüngliche Excentricitätshebel der Kraft,  
 $f$  die Pfeilhöhe der Verbiegungskurve,  
 $m = \frac{p}{k}$  das Excentricitätsmass,  
 $E$  der Elasticitätskoeffizient,

- $\sigma_1 = \frac{P}{F}$  die mittlere Spannung im Stab,  
 $\beta_d$  die Bruchspannung für Druck (Druckfestigkeit),  
 $\beta_z$  die Bruchspannung für Zug (Zugfestigkeit).



Da hier nur verhältnismässig kleine Durchbiegungen in Betracht kommen, kann die Länge  $l$ , die Stabachse während des Verbiegungsprozesses als konstant angenommen werden. Es ist ferner die Annahme gemacht worden, dass die Verbiegungskurve eine Parabel sei.

Die Pfeilhöhe  $f$  (Fig. 2) kann in zwei Teile zerlegt gedacht werden: ein Teil  $f_1$ , welcher unter Einfluss des konstanten Momentes  $Pp$ , und ein Teil  $f_2$ , welcher durch das variable Moment  $Py$  hervorgebracht wird.

Nach den Formeln der Elasticitätstheorie ist:

$$f_1 = \frac{1}{8} \frac{P p l^2}{J E} \text{ (Moment konstant),}$$

$$f_2 = \frac{5}{48} \frac{P f l^2}{J E} \text{ (Momentenkurve parabelförmig),}$$

$$f = f_1 + f_2 = \frac{1}{8} \frac{P p l^2}{J E} + \frac{5}{48} \frac{P f l^2}{J E}$$

Hieraus

$$f = \frac{1}{8} \frac{P p l^2}{J E} \frac{1}{1 - \frac{5}{48} \frac{P l^2}{J E}} \tag{1}$$

Wenn  $\frac{5}{48} \frac{P l^2}{J E} = 1$  ist, oder  $P = 9,6 \frac{J E}{l^2}$  so wird  $f = \infty$ ,

so klein auch die ursprüngliche Excentricität war, d. h. der Stab knickt. Diese Kraft, unter welcher der Stab knickt, sei in folgendem mit  $P_E$  (Knickkraft) bezeichnet und die entsprechende Spannung  $\frac{P_E}{F} = \sigma_E$  mit Knickspannung.

Die Formel (1) wird dann

$$f = \frac{1}{8} \frac{P p l^2}{J E} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} \tag{1a}$$

Der Wert der Knickkraft  $P_E$  ist genauer

$$P_E = \frac{\pi^2 J E}{l^2} = \frac{9,9 J E}{l^2}$$

(Euler'sche Formel). Die Differenz der Koeffizienten (9,9 statt 9,6 wie oben gefunden) rührt von unserer nicht ganz zutreffenden Annahme her, dass die Verbiegungskurve eine Parabel sei statt einer Sinusoide.

In folgendem wollen wir den Wert annehmen:

$$P_E = \frac{\pi J E}{l^2} \text{ oder da } \sigma_E = \frac{P_E}{F}, J = i^2 F \tag{2a}$$

$$\sigma_E = \frac{P_E}{F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \tag{2b}$$

Da ferner  $\sigma_1 = \frac{P}{F}$ , so kann die Formel (1a) umgewandelt werden in

$$f = \frac{1}{8} \frac{P p l^2}{J E} \frac{1}{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_E}} \tag{1b}$$

Mittels der Pfeilhöhe  $f$  lässt sich nun die maximale Druckspannung  $\sigma_D$  in der äussersten Faser der Stabmitte berechnen.

Diese Spannung kann in zwei Teile zerlegt gedacht werden:  $\sigma'$  herrührend von der centrischen Belastung  $P_1$  und  $\sigma''$  herrührend vom Momente  $P(p+f)$

$$\sigma_D = \sigma' + \sigma'' = \frac{P}{F} + \frac{P(p+f)}{W} \tag{3}$$

da  $W = k F$ ;  $\sigma_1 = \frac{P}{F}$

$$\sigma_D = \sigma_1 \left(1 + \frac{p+f}{k}\right) \tag{3a}$$

Setzt man  $\frac{p}{k} = m$ . (Excentricitätsmass.)

$$\sigma_D = \sigma_1 \left[1 + m \left(1 + \frac{f}{p}\right)\right] \tag{3b}$$

Aus den Gleichungen 1b, 2b und 3b lässt sich nun die gesuchte mittlere Spannung  $\frac{P}{F} = \sigma_1$  in Funktion des Excentricitätsmasses  $m = \frac{p}{k}$ , des Verhältnisses  $\frac{l}{i}$  und der maximalen Spannung  $\sigma_D$  ableiten.

Setzt man  $\sigma_D$  gleich der Spannung an der Elasticitätsgrenze (Grenzmodul), so erhält man die Spannung  $\sigma_1 = \frac{P}{F}$ , somit die Kraft  $P$ , unter welcher die Elasticitätsgrenze erreicht wird.

Setzt man  $\sigma_D$  gleich der Bruchspannung, so würde man die mittlere Spannung  $\sigma_1 = \frac{P}{F}$ , bei welcher der Stab bricht, erreichen, vorausgesetzt, dass der Elasticitätskoeffizient

cient auch nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze konstant bliebe.

Zu bemerken ist, dass für kleine Excentricitätshebel und grössere Werte von  $l:i$  Elasticitätsgrenze und Bruch unter gleicher Kraft erreicht werden. Bei grösserer Excentricität dagegen tritt ein solches eigentliches Knicken nicht ein: bei steigender Belastung wächst nach und nach die Maximalspannung im Stabe bis zur Elasticitätsgrenze und hiernach bis zum Bruch.

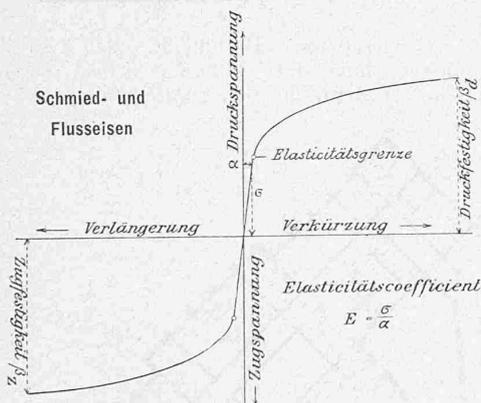
Wenn also bei reiner Druck-, Zug- oder Biegungsbeanspruchung die Maximalspannung in einem Stabe proportional zur wirkenden Kraft wächst, so ist dies bei Knickung nicht der Fall.

Da aber die zulässige Spannung als  $\frac{1}{n}$  ( $n$  Sicherheit) der Bruchgrenze gewählt wird, so muss für die Berechnung die mittlere Spannung  $\sigma_1 = \frac{P}{F}$  gesucht werden, bei welcher die Maximalspannung  $\sigma_D =$  der Bruchspannung ist. Bei Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze können aber diese Formeln nicht ohne weiteres angewandt werden, weil der Elasticitätskoefficient variiert, d. h. das Verhältnis zwischen Spannung und Längenänderung nicht mehr konstant bleibt.

Um den Einfluss dieser Variation für die verschiedenen Materialgattungen zu untersuchen, ist es nötig, das Spannungsdiagramm derselben, d. h. die Kurve welche die Verlängerungen (bezw. Verkürzungen) in Funktion der Spannungen angiebt, zu betrachten.

Die Figuren 3, 4 und 5 geben das Schema der Diagramme von Schmied- und Flusseisen, Gusseisen und Holz.

Fig. 3.



Aus dem Verlauf dieser Diagramme lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze (welche bei Holz nur wenig, bei Gusseisen sozusagen gar nicht ausgesprochen ist) werden die Verlängerungen (bezw. Verkürzungen) grösser als diejenigen  $\alpha = \frac{\sigma}{E}$ , welche man unter Annahme des konstanten Elasticitätskoefficienten  $E$  berechnet. Infolgedessen wird die Pfeilhöhe  $f$  grösser sein als die nach Formel (1<sub>b</sub>) berechnete. Die für  $\sigma_1 = \frac{P}{F}$  gefundenen Werte sind daher zu gross, und zwar um so mehr, als die Pfeilhöhe  $f$  gegenüber der Excentricität  $m = \frac{p}{K}$  (Formel 3<sub>a</sub>) in Betracht kommt, d. h. um so mehr  $\frac{f}{m}$  und  $l:i$  wachsen.

Bei Gusseisen und Holz ist die Variation des Elasticitätskoefficienten  $E$  eine stetige und viel geringere als für Eisen und man kann daher für  $E$  einen Mittelwert annehmen.

2. Ist im mittleren Stabquerschnitt in der äussersten Faser die Bruchspannung  $\beta_d$  erreicht, so verlaufen die

Spannungen im Querschnitt gegen die neutrale Achse nicht mehr geradlinig (Fig. 6,  $A O B$ ), sondern nach einer Kurve  $A' O' B$ , welche, unter Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben, nichts anderes als das

Spannungsdiagramm des Materials darstellt (vergl. Ritter, Anwendungen der graph. Statik 1888, § 29). Hierdurch wird das Tragvermögen eines Stabes ( $\Sigma \sigma' \Delta F$ ) erhöht und zwar um so mehr, als mehr Material zwischen äusserster Faser und neutrale Achse konzentriert ist. Es wird aus dem Grunde bei sonst gleichen  $l:i$  und gleicher Belastung ein runder voller Querschnitt mehr tragen als ein Kreisring, ein Kreisring mehr als ein **I**. Die Form des Querschnittes spielt also bei Knicken noch mehr als bei reiner Biegung eine gewisse Rolle. Diese Erhöhung des Tragvermögens wirkt der unter 1. betrachteten Erniedrigung etwas entgegen.

3. Bei Gusseisen kann infolge der im Verhältnis zur Druckfestigkeit kleinen Zugfestigkeit der Bruch entweder durch Erreichung der Bruchspannung für Druck in der gepressten Faser oder durch Erreichung der Bruchspannung für Zug in der gezogenen Faser eintreten. Für letzteren Fall muss, ähnlich wie bei der Berechnung auf Biegung, die in den Formeln einzuführende Festigkeit auf Zug (Biegungsfestigkeit) etwas grösser als die reine Zugfestigkeit gewählt werden (dementsprechend ist hier  $\beta_z = 2000 \text{ kg}$

Fig. 6.

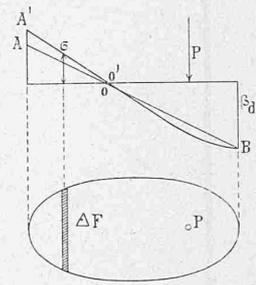


Fig. 4.

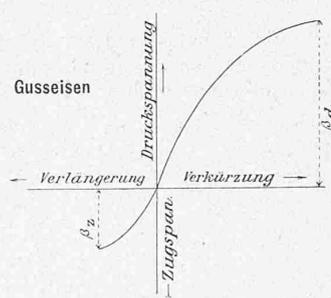
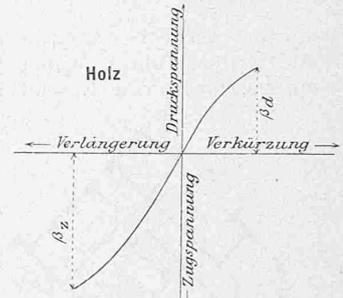


Fig. 5.



per  $\text{cm}^2$  statt  $1400 \text{ kg}$  angenommen worden).

Auch bei Holz wäre, wegen der Unsymmetrie des Spannungsdiagrammes, die einzuführende Festigkeit etwas grösser als die reine Druckfestigkeit anzunehmen. Die nachfolgende graphische Tabelle ist aber mit der reinen Druckfestigkeit berechnet worden, so dass die für  $\sigma_1 = \frac{P}{F}$  gefundenen Werte eher etwas niedriger sind, als sie sich nach Versuchen ergeben. (Schluss folgt.)

### Theorie der Dampf-Turbinen.

Von Professor A. Fliegner.

V. (Schluss.)

#### § 10. Innenschlächtige mehrstufige Reaktions-Turbinen.

Wenn man bei den innenschlächtigen Turbinen auch die Bedingung stellen wollte, dass sich die ganze Arbeit zu gleichen Teilen auf alle Laufradkränze verteilt, so würde man zu durchaus unförmlichen Verhältnissen gelangen.

Bei der Berechnung einer solchen Turbine geht man daher am besten von den Winkeln aus, die man auch ähnlich wählen wird, wie bei Wasser. Dabei erscheint es am richtigsten, auch allen Kränzen die gleichen Winkel zu geben.

Aus der verlangten Leistung der Turbine und dem durch die Erfahrung festgestellten verhältnismässigen