Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 37/38 (1901)

Heft: 19

Inhaltsverzeichnis

Ueber den Beschleunigungszustand eines Kurbelvierecks.

Von Professor Dr. *A. Herzog* in Zürich.

Die Spannungen, welche in der Schubstange eines Kurbelvierecks auftreten, sind nicht nur von den äusseren Kräften, sondern auch von den Trägheitskräften abhängig. Nach dem Prinzip von d'Alembert sind die beiden Systeme von Kräften während der ganzen Dauer der Bewegung im Gleichgewicht. Die Trägheitskraft für ein Massenelement m, das die Beschleunigung p besitzt, ist $m \cdot p$, die Richtung der Kraft ist entgegengesetzt derjenigen der Beschleunigung.

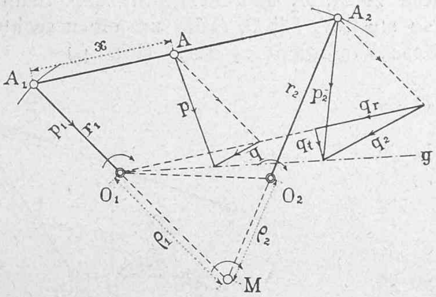

Fig. 1.

Die Beschleunigungen der sämtlichen Punkte der Schubstange können nach den von Burmester, Mohr, Rittershaus, Schadwill und Anderen angegebenen Verfahren bestimmt werden.

Im folgenden sollen zwei, meines Wissens neue Lösungen der gleichen Aufgabe abgeleitet werden und zwar unter der Voraussetzung, dass eine der beiden Kurbeln mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Die Massen der einzelnen Elemente der Schubstange kann man sich in der Achse konzentriert denken.

I.

Es seien (Fig. 1) O_1 und O_2 die Drehpunkte der beiden Kurbeln mit den Radien $r_1 = O_1 A_1$ und $r_2 = O_2 A_2$; mit ω_1 und ω_2 sollen ihre Winkelgeschwindigkeiten bezeichnet werden. Wenn ω_1 konstant ist, so ist die Beschleunigung p_1 des Punktes A_1 radial nach einwärts gerichtet und hat den Wert $\omega_1^2 r_1 = \frac{v_1^2}{r_1}$, worin v_1 die konstante Geschwindigkeit von A_1 ist. Werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im Masstabe $\frac{v_1}{r_1} = \omega_1 = 1$ abgetragen, so wird durch die Strecke r_1 nicht nur die um einen rechten Winkel gedrehte Geschwindigkeit, sondern auch die Beschleunigung p_1 des Punktes A_1 nach Grösse und Richtung dargestellt. Die Beschleunigung p eines beliebigen Punktes A der Schubstange im Abstande x von A_1 kann als Resultierende zweier Beschleunigungen aufgefasst werden: 1. Der Beschleunigung p_1 des Punktes A_1, 2. Der Beschleunigung q, welche von der Drehung der Schubstange um den Punkt A_1 herrührt. Die Komponenten q_r und q_t dieser zweiten Beschleunigung in der Richtung $A A_1$ und senkrecht dazu sind:

$$q_r = x\,\omega^2 \text{ und } q_t = x\,\frac{d\omega}{dt},$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Punkt A_1 und t die Zeit bezeichnen. Die Zerlegung von q ist für den Punkt A_2 in Fig. 1 angedeutet. Mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω rotiert die Schubstange um ihr Momentancentrum M, das im Schnittpunkt von r_1 und r_2 liegt. Aus den Ausdrücken von q_r und q_t ergiebt sich, dass q selbst mit x proportional ist und dass der Winkel γ, den die Richtung von q mit $A_1 A_2$ bildet, für alle Punkte der Schubstange den gleichen Wert hat. Es ist nämlich

$$tg\,\gamma = \frac{x\,\frac{d\omega}{dt}}{x\,\omega^2} = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}.$$

Man erkennt ferner, dass die Endpunkte der Beschleunigungen p der sämtlichen Punkte von $A_1 A_2$ auf einer Geraden g liegen, die durch O_1 geht und dass die Projektionen dieser Beschleunigungen auf eine Gerade senkrecht zur Richtungslinie von q einander gleich sind. — Diese Sätze gelten übrigens für jede Gerade eines starren, ebenen Systems.[1]) Durch den Winkel γ und die Gerade g sind die Beschleunigungen p bestimmt.

Setzt man $M O_1 = \varrho_1$, $M O_2 = \varrho_2$, so ist

$$v_1 = r_1\,\omega_1 = (\varrho_1 + r_1)\,\omega.$$

Hieraus folgt:

$$0 = (\varrho_1 + r_1)\frac{d\omega}{dt} + \omega\,\frac{d\varrho_1}{dt} \text{ oder}$$

$$\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2} = -\frac{\frac{d\varrho_1}{dt}}{(\varrho_1 + r_1)\,\omega} = -\frac{\frac{d\varrho_1}{dt}}{v_1};$$

$$tg\,\gamma = -\frac{\frac{d\varrho_1}{dt}}{\varrho_1}\cdot\frac{\varrho_1}{v_1}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich eine einfache Konstruktion des Winkels γ. (Fig. 2.)

Die Verbindungslinie der Momentancentra für zwei unendlich benachbarte Lagen der Schubstange ist die gemeinsame Tangente MN der beiden Polbahnen des ebenen Systems, dem die Gerade $A_1 A_2$ und der Punkt M angehören. Nach dem Satze von Bobillier ist der Winkel τ zwischen $O_1 M$ und MN gleich dem Winkel $Q\,M\,O_2$, wenn Q der Schnittpunkt von $O_1 O_2$ und $A_1 A_2$ ist. Bezeichnet man noch mit φ_1 den Winkel $Q\,O_1 A_1$, dann erhält man:

$$tg\,\tau = \frac{\varrho_1\,d\varphi_1}{d\varrho_1} = \frac{\varrho_1\,\omega_1}{\frac{d\varrho_1}{dt}}.$$

Es ist somit

$$tg\,\gamma = -\frac{1}{tg\,\tau}\cdot\frac{\varrho_1\,\omega_1}{v_1} = -\frac{1}{tg\,\tau}\cdot\frac{\varrho_1}{r_1}.$$

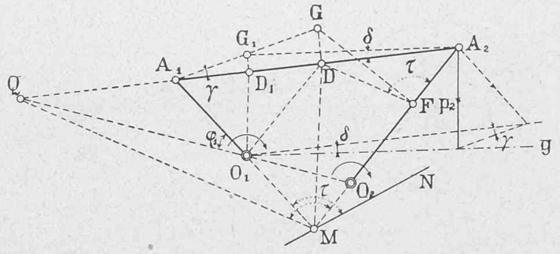

Fig. 2.

Zieht man nun $O_1 D \parallel M A_2$ und $D F \parallel Q M$ und errichtet in D und F die Senkrechten auf $A_1 A_2$, bezw. $M A_2$, so ist, wenn mit G der Schnittpunkt der beiden Perpendikel bezeichnet wird,

$$\sphericalangle\,D\,A_1\,G = \gamma.$$

Es ist nämlich

$$\sphericalangle\,D\,G\,A_2 = 180^0 - \tau,$$

folglich

$$tg\,\gamma = -\frac{1}{tg\,\tau}\cdot\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{D\,G}{D\,A_2}\cdot\frac{D\,A_2}{D\,A_1} = \frac{D\,G}{D\,A_1}.$$

Ebenso einfach gestaltet sich die Bestimmung der Geraden g; sie bilde mit $A_1 A_2$ den Winkel δ. Für den Punkt A_2 der

[1]) Burmester, Lehrbuch der Kinematik.