

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 47/48 (1906)  
**Heft:** 18

**Artikel:** Ueber den horizontalen Balken  
**Autor:** Kiefer, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26097>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

allgemeinen willkommen sein, die den in Fachkreisen aufgeworfenen Tagesfragen ein Interesse entgegenbringen. Es sind überdies Fragen, deren Bedeutung weit über die Fachkreise hinausragt und die die lebendigsten Interessen des Volkes berühren.

J. A. Lux.

Ueber den horizontalen Balken.

Von A. Kiefer, Zürich.

Wenn auf einen horizontalen Balken, der in den beiden Endpunkten  $M, N$  unterstützt ist, vertikale, in der Ebene durch  $MN$  gelegene Kräfte wirken, so können die Auflagerreaktionen, die Momente und Biegunsmomente und deren Aenderungen für beliebige vertikale Schnitte auf folgende Weise ermittelt werden.

Abbildung 1.  $P_1$  sei eine solche Kraft und zwar liege ihr Anfangspunkt  $A_1$  auf  $MN$  und  $P_1$  bedeute zugleich

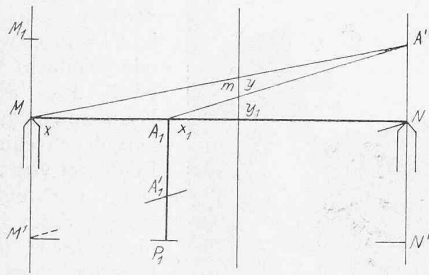


Abb. 1.

den Endpunkt der Kraft. Zieht man durch  $P_1$  die Parallele  $N'M'$  zu  $NM$  und verbindet den Punkt  $M'$ , in welchem sie die Vertikale durch  $M$  schneidet mit  $N$ , so teilt diese Linie die Kraft  $P_1$  in zwei Teile, von denen der obere  $A'_1A_1$  gleich der Auflagerreaktion in  $M$  und der andere gleich derjenigen in  $N$  ist; denn die Linie  $NM'$  teilt  $P_1$  im Verhältnis der Abstände von  $N$  und  $M$

$$A'_1A_1 : P_1A'_1 = NA_1 : M'P_1.$$

Zieht man durch  $A_1$  die Parallele zu  $M'N$ , so trifft sie die Vertikale durch  $N$  in  $A'$  so, dass  $NA' = MM_1$  d. h. gleich der Auflagerreaktion in  $M$  ist; verbindet man ferner  $M$  mit  $A'$ , so sind für einen beliebigen vertikalschnitt die in ihm gelegenen Strecken  $y, y_1, m = y - y_1$  beziehungsweise proportional dem Moment der Auflagerreaktion, dem Moment der Kraft  $P_1$  und dem Biegunsmoment. Es seien nämlich  $x$  und  $x_1$  die Abstände der Punkte  $M$  und  $A_1$  von dem Schnitt, so folgt aus der Figur vermöge ähnlicher Dreiecke

$$\frac{y}{x} = \frac{NA'}{l}, \text{ also } y = \frac{1}{l} (MM_1 \cdot x);$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{MM'}{l}, \text{ also } y_1 = \frac{1}{l} (P_1 \cdot x_1) \text{ und}$$

$$m = y - y_1 = \frac{1}{l} [MM_1 \cdot x - P_1 \cdot x_1], \text{ wie es sein muss.}$$

Für  $l = 1$  stellen also die Strecken  $y, y_1$  und  $m$  der Reihe nach das Moment der Auflagerreaktion, das Moment der Kraft  $P_1$  und das Biegunsmoment dar. Bei der Parallelverschiebung des Schnittes bleibt  $A'$  fest und man übersieht die Aenderung der einzelnen Momente; die Fläche des Dreiecks  $MA_1A'$  ist die Biegunsmomentenfläche. Die Auflagerreaktion in  $N$  ist nicht eingezeichnet.

Abbildung 2.  $P_2$  sei eine zweite Kraft und in ihrer Wirkungslinie verschoben bis der Anfangspunkt  $A_2$  auf  $A_1A'$  fällt; man ziehe durch den Endpunkt  $P_2$  die Parallele  $M''N''$  zu  $A_1A'$ , schneide mit der Vertikalen durch  $M$  und verbinde den Schnittpunkt  $M''$  mit  $A'$ ; diese Linie teilt  $P_2$  in zwei Teile, von denen der obere  $A'_2A_2 = M_1M_2$  die neuhinzukommende Auflagerreaktion in  $M$  und der andere Teil diejenige in  $N$  ist; denn

$$A'_2A_2 : P_2A'_2 = A'A_2 : M''P_2.$$

Zieht man ferner  $A_2A''$  parallel  $M'A'$ , so ist  $A'A'' = M_1M_2$  und verbindet man noch  $M$  mit  $A''$ , so sind für einen beliebigen vertikalen Schnitt die Strecken  $y, y_1, y_2, m$  beziehungsweise proportional dem Moment der Auflagerreaktion

tion  $MM_2$ , dem Moment der Kraft  $P_1$ , dem Moment der Kraft  $P_2$  und dem Biegunsmoment; denn zufolge ähnlicher Dreiecke hat man:

$$\frac{y}{NA'} = \frac{x}{l}, \text{ also } y = \frac{1}{l} (MM_2 \cdot x);$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{MM'}{l}, \text{ also } y_1 = \frac{1}{l} (P_1 \cdot x_1);$$

ferner wenn  $x_2$  den Abstand des Punktes  $A_2$  vom Schnitt bedeutet  $\frac{y_2}{x_2} = \frac{N'A'}{l}$ , also  $y_2 = \frac{1}{l} (P_2 \cdot x_2)$  und

$$m = y - (y_1 + y_2) = \frac{1}{l} [MM_2 \cdot x - (P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2)],$$

wie es sein muss.

Für  $l = 1$  stellen somit die Strecken  $y$  und  $m$  das Moment der Auflagerreaktion und das Biegunsmoment dar. Bei der Parallelverschiebung des Schnittes bleibt  $A'$  fest und man überblickt die Aenderungen der einzelnen Momente und des Biegunsmomentes. Das letztere wird immer durch den Abschnitt  $m$  gemessen, den das Polygon  $MA_1A_2A'$  auf der vertikalen Schnittlinie erzeugt; das Polygon ist die Momentenfläche für das Biegunsmoment. Liegt der Schnitt zwischen  $A_1A_2$ , so fällt das Moment von  $P_2$  für die Ermittlung des Biegunsmomentes ausser Betracht; die Momente von  $P_1$  und  $P_2$  bekommen entgegengesetztes Vorzeichen und sie werden zudem einander gleich, wenn der Schnitt durch den Punkt  $S_1$  geht. Folglich geht die Resultierende der zwei Kräfte  $P_1, P_2$  durch den Schnittpunkt  $S_1$  der verlängerten Polygonseiten  $A_1M, A_2A''$ . Die Auflagerreaktion in  $N$  ist wieder weggelassen.

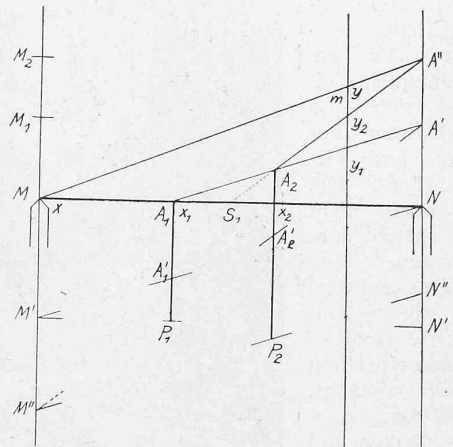


Abb. 2.

Wenn  $P_3$  eine dritte Kraft ist, deren Anfangspunkt  $A_3$  auf  $A_2A''$  liegt, so kann sie in gleicher Weise wie  $P_2$  behandelt werden. Es entsteht das Polygon  $MA_1A_2A_3A''$ , dessen Fläche auf einer vertikalen Schnittlinie das Biegunsmoment begrenzt und dessen Seiten und deren Verlängerungen auf der Schnittlinie die Momente der Kräfte abgrenzen. Folglich gehen durch die Schnittpunkte der verlängerten Polygonseiten die Zwischenresultierenden, nämlich durch den Schnittpunkt  $A_1M, A_2A_3$  die Resultierende von  $P_1, P_2$ , durch  $A_2A_1, A_3A''$  die Resultierende von  $P_2, P_3$  und durch  $A_1M, A_3A''$  diejenige von  $P_1, P_2, P_3$ . Analog ist die Behandlung, wenn noch eine vierte, oder fünfte, oder eine beliebige Zahl von Kräften vorhanden ist.

Ist ein ganzes System von Kräften auf diese Weise behandelt und kommt eine variable Kraft hinzu, so kann man für eine gewählte Lage derselben nach Abbildung 1 die Aenderungen besonders konstruieren, welche diese Kraft an der Auflagerreaktion und dem Biegunsmoment bewirkt und dann hinzufügen; ebenso eventuell für eine zweite Kraft.

Es ist oben stillschweigend angenommen worden, das Vereinigen der Kräfte erfolge von  $M$  ausgehend in der Reihenfolge wie sie neben einander liegen; das ist nicht notwendig, sondern die Reihenfolge ist beliebig und es brauchen die Kräfte auch nicht gleich gerichtet zu sein. Man kann daher beim Auftreten einer variablen Kraft die-

selbe für irgend eine Lage an die letzte Polygonseite anschliessen und erhält dann die korrigierten Grössen selber.

In Abbildung 3 liegt die Kraft  $P_3$  zwischen  $P_1, P_2$ . Die Momentenfläche  $MA_1A_2A_3A''$  wird ein überschlagenes Polygon und im übrigen bestehen die gleichen Verhältnisse.<sup>1)</sup>

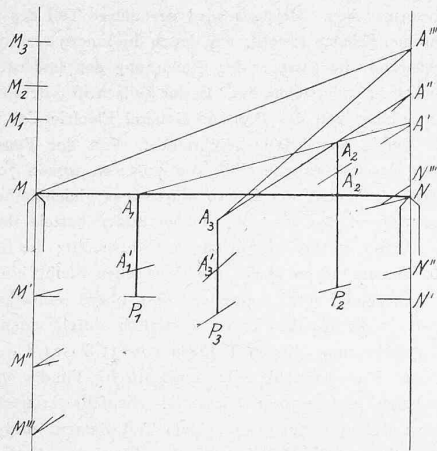


Abb. 3.

Die Konstruktionen sind ohne Kräfte- und Seilpolygon entstanden; es ist indessen klar, dass man sie auch im Sinne solcher Polygone deuten kann. Ist das übliche Kräftepolygon gezeichnet und wählt man den Pol auf der Horizontalen durch den Anfangspunkt in einem Abstand gleich und gleich gerichtet zu  $MN$ , so wird, wenn die erste Parallele durch  $M$  gelegt wird, das entstehende Seilpolygon zum Polygon der auseinander gesetzten Konstruktion. Es ist ferner klar, dass die letztere verallgemeinert werden kann, indem man anstatt  $A_1$  auf  $MN$  zu wählen, durch die Punkte  $A_1, P_1$  in beliebiger Richtung parallele Linien zieht und dann verfährt wie auseinandergesetzt; ferner braucht  $MN$  nicht horizontal zu sein und es kann alles auf beliebige parallele Kräfte ausgedehnt werden.<sup>2)</sup>

Aus den Abbildungen, die übrigens leichter zu betrachten als zu beschreiben sind, lassen sich einige Folgerungen ziehen:

Wenn  $P_1 = P_2$  ist, so fällt  $S_1$  in die Mitte zwischen  $P_1, P_2$ . Wenn alle Kräfte einander gleich sind, in gleichen Abständen aufeinander folgen und in dieser Reihenfolge genommen sind, so schneidet jede Polygonseite die Gerade  $MN$  in der Mitte zwischen der zuletzt genommenen Kraft und  $P_1$ . Ist der Balken  $MN$  gleichmässig und kontinuierlich belastet, so bekommt das Polygon unendlich viele Seiten, welche Tangenten einer Kurve sind. Jede Tangente schneidet  $MN$  in einem Punkt, der in der Mitte zwischen  $M$  und der Vertikalen durch den Berührungspunkt der Tangente liegt. Das ist aber bekanntlich die Eigenschaft einer Parabel, welche  $M$  als Scheitelpunkt und  $MN$  als Scheiteltangente besitzt. Bezeichnet man den Parameter der Parabel mit  $q$ , wählt  $M$  als Nullpunkt und  $MN$  als Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet die Gleichung der Parabel  $x^2 = 2qy$ .

Wenn  $P$  die totale Belastung bedeutet, so ist die Kurvenordinate in  $N$  gleich  $\frac{P}{2}$ , der Auflagerreaktion und man hat

$$l^2 = 2q \frac{P}{2},$$

somit  $q = \frac{l^2}{P}$  und die Gleichung der Parabel

$$x^2 = 2 \frac{l^2}{P} y.$$

Der Brennpunkt wird gefunden, indem man den Kurvenpunkt  $l, \frac{P}{2}$  mit der Mitte von  $MN$  verbindet, dort auf die

Verbindungsline das Lot errichtet und mit der Vertikalen durch  $M$  schneidet.

Wird die Belastung durch eine Fläche dargestellt, die auf  $MN$  liegt, so wird das Polygon ebenfalls zu einer Kurve und die Tangente in irgend einem Punkte trifft  $MN$  in dem Punkt, wo die Vertikale durch den Schwerpunkt des Flächenstückes hindurchgeht, das die Vertikale durch den Berührungspunkt abschneidet. Wächst demnach die Belastung proportional mit der Abszisse, so beträgt der Tangentenabschnitt auf  $MN$ , von  $M$  aus gemessen  $\frac{2}{3}$  und vom Fusspunkt der Ordinate aus gemessen  $\frac{1}{3}$  von der Abszisse des Berührungspunktes, was die Gleichung bedingt

$$x^3 = sy.$$

## Wettbewerb für ein Schulhaus mit Turnhalle in Reconvilier.

Das preisgerichtliche Urteil in diesem Wettbewerb, das uns zur Veröffentlichung zugeht, lautet wie folgt:

«Au Conseil communal de Reconvilier.

Monsieur le Président,  
Messieurs,

Le Jury que vous avez nommé pour juger le concours d'un bâtiment scolaire à Reconvilier s'est réuni suivant votre ordre les 11 et 12 crt. Monsieur Béguin ayant du s'excuser au dernier moment pour cause de maladie a été remplacé par Monsieur Prince, architecte à Neuchâtel.

Quarante-deux projets sont en présence, tous arrivés dans le délai fixé par le programme. Ils sont numérotés de 1 à 42 et portent comme devise les signes distinctifs suivants: N° 1. «Crayonneur», 2. «Rauracien», 3. «Perce-neige», 4. Monogramme (dessiné), 5. «Chi sai!», 6. «Pour notre jeunesse», 7. «Bonne lumière», 8. Deux cercles concentriques, intérieur noir (dessiné), 9. «Myosotis», 10. Croquis orienté (dessiné), 11. «En haut», 12. «Chacun à son goût», 13. «Jura», 14. «Ouvrons les yeux», 15. «Une idée», 16. «Heimatschutz», 17. «Vadrouille», 18. «Fritz», 19. «Air et Lumière», 20. «Jura», 21. Emblème (dessiné), 22. «Rousseau», 23. «Simple», 24. «Montagnard», 25. «Aux petits fondeurs», 26. «Les Montagnards», 27. «Avril», 28. Tête dans un cercle (dessiné), 29. «Chandon», 30. «Printemps», 31. «Sans suite», 32. «Simple idée», 33. Timbre suisse de 0,02, 34. «Mont», 35. «Jeunesse», 36. «Ty-Fou», 37. «Pour la jeunesse», 38. «Jura», 39. «Encore une idée», 40. «Jura», 41. «Jura Mons», 42. Sud.

Après s'être rendu sur place pour prendre connaissance du terrain affecté au bâtiment, le jury entre en séance et décide de procéder par élimination.

Au premier tour 22 projets sont écartés pour insuffisance de présentation et de conception; ce sont les projets 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 30, 31, 32, 37, 39 et 41.

Au deuxième tour 12 projets subissent le même sort, bien que pour la plupart ils présentent un réel intérêt, mais ne répondent pas d'une manière suffisamment précise au programme; ce sont les N° 3, 4, 5, 14, 15, 24, 27, 28, 33, 34, 35 et 40.

Huit projets restent en présence. Ils font de la part du jury l'objet d'une étude plus approfondie qui peut être résumée comme suit:

N° 13. Plan trop ramassé. Classes en partie mal orientées. Les portes de ces classes sont peu pratiques, étant trop rapprochées les unes des autres. L'éclairage de la salle de dessin laisse beaucoup à désirer. Bonnes façades; projet très bien présenté. La halle de gymnastique est insuffisamment éclairée et a plutôt le caractère d'une chapelle.

N° 17. Bon projet, simple et pratique. Classes bien éclairées et bien orientées. Les W.-C. gagneraient à être agrandis du local des vestiaires qui n'étaient pas demandés. L'escalier suffirait s'il était à simple rampe. Les façades sont très bonnes, le plan de la halle de gymnastique gagnerait à être retourné et son emplacement serait plutôt indiqué le long du chemin pour le détacher complètement du bâtiment scolaire.

N° 18. Beaucoup d'analogie avec le N° 17, mêmes qualités et mêmes défauts. L'arrangement de la halle de gymnastique est préférable.

N° 20. Les deux entrées au nord et à l'est ne sont pas recommandables. Les deux escaliers ne sont pas utiles, un seul aurait suffi. Bonne orientation; les façades sont assez intéressantes. Le toit mansardé de la halle de gymnastique est trop important.

N° 29. Bonne conception générale du plan, escaliers bien compris. L'idée de la communication entre la halle de gymnastique et le bâtiment d'école est heureuse. Il est malheureux que les W.-C. soient si resserrés, ils gagneraient à être élargis ainsi que les services de la halle de gymnastique. L'extérieur est lourd, particulièrement le motif central couronné d'un

<sup>1)</sup> Es braucht wohl nicht gesagt zu werden, dass beim praktischen Zeichnen die Punkte  $N''$ ,  $A_1''$ ,  $M_1''$ ... nicht bestimmt zu werden brauchen.

<sup>2)</sup> Siehe Schweizerische Bauzeitung, Bd. XLIII, S. 247, «Ueber Kräftezerlegung», Abschnitt 8.