

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 61/62 (1913)  
**Heft:** 10

**Artikel:** Berechnung gewölbter Platter  
**Autor:** Keller, Huldreich  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-30688>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Berechnung gewölbter Platten. — Die Schweiz. Nationalbank in Bern. — Die Wasserkraftanlage Eglisau. — Zum Gotthardvertrag. — Miscellanea: Eine Wasserkraftanlage mit 1650 m Gefälle. Fördermaschinen-Antrieb mittels Doppelkommutatormotoren. Erhöhung des Staudamms bei Assuan. Bahntransportwagen für 100 Tonnen Kohle. Normalbahn Goppenstein-Siders. Eidg. Technische Hochschule. Dampfschiff-

fahrt auf dem Walensee. — Nekrologie: J. H. Reutlinger. E. Gascard. — Literatur. — Korrespondenz. — In eigener Sache. — Vereinsnachrichten: Technischer Verein Winterthur. Bernischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. G. e. P.: Stellenvermittlung. Tafel 29 bis 32: Die Schweiz. Nationalbank in Bern.

Band 61.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 10.

**Berechnung gewölbter Platten.**

Von Dipl. Ing. Dr. Huldreich Keller in Zürich.

(Fortsetzung von Seite 114.)

An Hand von Abbildung 4, d. i. der Seitenansicht des Plattenelementes, kann man für dieses Element folgende Gleichgewichtsbedingung für die an ihm wirkenden Kräfte aufstellen: Wir vergleichen die in Richtung der Normalkraft ( $S + dS$ ) fallenden Komponenten:

$$S + dS = S \cos d\varphi + Sch \sin d\varphi + P \sin \frac{d\varphi}{2} + 2 T' \cos(\varphi + d\varphi).$$

Berücksichtigt man wiederum, dass  $d\varphi$  sehr klein, so dass  $\cos d\varphi \approx 1$ ,  $\sin d\varphi \approx d\varphi$ ,  $\cos(\varphi + d\varphi) \approx \cos \varphi$ , so bleibt  $dS = Sch d\varphi + P \frac{d\varphi}{2} + 2 T' \cos \varphi$ .

Hierin ist  $T'$  die in Richtung des Halbmessers  $x$  fallende Komponente von  $T$

$$T' = T \sin \frac{d\alpha}{2} \approx T \frac{d\alpha}{2}; \text{ (vergl. Abb. 5)}$$

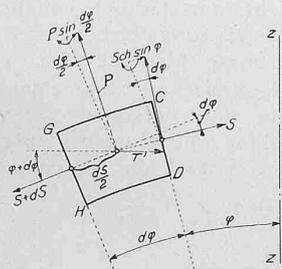


Abb. 4.

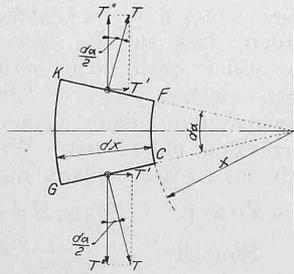


Abb. 5.

Nach Gl. (5) ist  $S = (xh) \sigma_{r0} d\alpha$ , folglich  $dS = [(xh) d\sigma_{r0} + \sigma_{r0} d(xh)] d\alpha$ .

Unter Verwendung der Gleichungen (6) bis (8) erhält man nach Kürzung des Faktors  $d\alpha$ :

$$(xh) d\sigma_{r0} + \sigma_{r0} d(xh) = \tau_m (xh) d\varphi + p \frac{dx}{\cos \varphi} \left(x + \frac{dx}{2}\right) \frac{d\varphi}{2} + h \frac{dx}{\cos \varphi} \sigma_{r0} \cos \varphi \dots (9)$$

Abbildung 6 zeigt die Möglichkeit, die mittlere Schubspannung  $\tau_m$  durch die Normalspannung  $\sigma_{r0}$  und die äussere Belastung  $p$  auszudrücken und sie hierdurch aus der Rechnung zu eliminieren.

Um die Rechnung nach Möglichkeit zu verallgemeinern, wollen wir eine gewölbte Platte betrachten, welche in der Mitte eine gleichaxige Bohrung vom Halbmesser  $x_i$  hat. Aus dieser Platte schneiden wir ein Ringteil mit dem äusseren Halbmesser  $x$  und dem Zentrivinkel  $d\alpha$  heraus. Dieser Ringausschnitt ist in Abbildung 6 in der Seitenansicht dargestellt. Aus ihr lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

$$(x^2 - x_i^2) \pi \left(\frac{d\alpha}{2\pi}\right) p = x d\alpha h (\tau_m \cos \varphi + \sigma_{r0} \sin \varphi)$$

$$(xh) \tau_m = \frac{p}{2} \left(\frac{x^2 - x_i^2}{\cos \varphi}\right) - (xh) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sigma_{r0} \dots (10)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung werde in Gl. (9) eingesetzt:

$$(xh) d\sigma_{r0} + \sigma_{r0} d(xh) = \frac{p}{2} (x^2 - x_i^2) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} - (xh) \sigma_{r0} \sin \varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{p}{2} \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \left(x + \frac{dx}{2}\right) + h dx \sigma_{r0}$$

Hieraus finden wir:

$$d\sigma_{r0} = \left\{ \begin{array}{l} -\sigma_{r0} \left[ \frac{d(xh)}{xh} + \sin \varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \right] \\ + \sigma_{r0} \frac{dx}{x} \\ + \frac{p}{2} \frac{1}{(xh)} \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \left[ x^2 - x_i^2 + dx \left(x + \frac{dx}{2}\right) \right] \end{array} \right\} \text{ I. Hauptgleichung.}$$

Diese I. Hauptgleichung hat die Form:

$$d\sigma_{r0} = -\sigma_{r0} (15) + \sigma_{r0} (16) + (24) \dots (1a)$$

wo die Ziffern in () Zahlenwerte bedeuten, die abhängig sind von der Form und der äusseren Belastung der Platte und der Lage des augenblicklich zu untersuchenden Punktes  $A$  auf der Mittelfaser des Meridianschnittes.

Würde man für den Halbmesser  $x$  die mittlere Radialspannung  $\sigma_{r0x}$  kennen, so lieferte die Hauptgleichung (I) den Wert für die mittlere Radialspannung  $\sigma_{r0(x+dx)}$  im Halbmesser  $(x + dx)$

$$\sigma_{r0(x+dx)} = \sigma_{r0x} + d\sigma_{r0} \Big|_{x \rightarrow x+dx} \dots (II)$$

**5. Berechnung von  $\sigma_{t0}$ , hergeleitet aus der Dehnung der Platte.**

Der Parallelkreis mit dem Halbmesser  $x$ , der die gestreckte Länge  $(2\pi x)$  hat, dehnt sich um das Stück  $\Delta(2\pi x)$ , wenn in Richtung der Tangente die spezifische Spannung  $\sigma_t^0$ , senkrecht dazu die Spannung  $\sigma_{r0}$  wirkt, und zwar ist:

$$\Delta(2\pi x) = \frac{2\pi x}{E} \left(\sigma_{t0} - \frac{\sigma_{r0}}{m}\right);$$

darnach

$$\Delta x = \left(\frac{x}{E} \sigma_{t0} - \frac{d_{r0}}{m}\right).$$

Die Differenzierung dieser Gleichung liefert die Dehnung des Halbmesserelementes  $(dx)$

$$\Delta(dx) = \frac{dx}{E} \left(\sigma_{t0} - \frac{\sigma_{r0}}{m}\right) + \frac{x}{E} \left(d\sigma_{t0} - \frac{d\sigma_{r0}}{m}\right) \dots (12)$$

Für diese Dehnung können wir noch einen zweiten Ausdruck aufstellen:

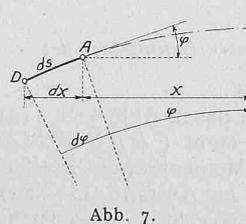


Abb. 7.

Wir denken uns gemäss Abbildung 7 aus der mittleren Meridianfaser im Abstand  $x$  von der Symmetrieaxe bei  $A$  ein Element von der Länge  $AD = ds$  herausgegriffen.

Weil  $dx = ds \cos \varphi$ , so ist auch die durch die Belastung erfolgte Aenderung von  $dx$ , das ist:

$$\Delta(dx) = \Delta(ds \cos \varphi) = \Delta(ds) \cdot \cos \varphi + ds \Delta(\cos \varphi).$$

Nun ist

$$\Delta(ds) = \frac{ds}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m}\right) \dots (13)$$

$$\Delta(\cos \varphi) = -\sin \varphi \Delta \varphi = -\sin \varphi \cdot \psi \dots (14)$$

demnach

$$\Delta(dx) = \frac{ds}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m}\right) \cos \varphi - ds \sin \varphi \cdot \psi$$

$$\Delta(dx) = \frac{dx}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m}\right) - dx \operatorname{tg} \varphi \cdot \psi \dots (15)$$

Die Aenderung von  $(dx)$  ist das Ergebnis zweier Formänderungen, nämlich der Längenänderung und der Richtungsänderung des Meridian-Elementes  $ds$ .



nämlich: 
$$M_{\sigma_r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} df (\sigma_r - \sigma_{r0}) \eta.$$

Hierin ist

$$df = (x + \eta \sin \varphi) da d\eta.$$

Für  $(\sigma_r - \sigma_{r0})$  wollen wir an Hand von Gl. (3) einsetzen

$$(\sigma_r - \sigma_{r0}) = c \eta \cos \varphi u,$$

wo 
$$u = \left[ m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right]. \dots (19),$$

$$M_{\sigma_r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} c \eta \cos \varphi u (x + \eta \sin \varphi) da \cdot d\eta \cdot \eta.$$

In diesem Integral ist nur  $\eta$  als Veränderliche, alle übrigen Grössen sind als Konstante zu betrachten.

$$M_{\sigma_r} = da \cdot c \cos \varphi \cdot u \left[ x \int \eta^2 d\eta + \sin \varphi \int \eta^3 d\eta \right];$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = \frac{h^3}{12}; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^3 d\eta = 0.$$

$$M_{\sigma_r} = da \cdot c \cos \varphi \cdot u x \frac{h^3}{12}.$$

Setzen wir den Wert für  $u$  wieder ein aus Gl. (19), so erhalten wir:

$$M_{\sigma_r} = da \cdot c \cdot x \frac{h^3}{12} \cos \varphi \left[ m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right]. \quad (20)$$

Wir werden später sehen, dass wir noch des Wertes  $dM_{\sigma_r}$  bedürfen, d. h. des Betrages, um den sich  $M_{\sigma_r}$  ändert, wenn wir von  $x$  um  $dx$  vorwärts gehen. Wir erhalten, indem wir die Gl. (20) nach  $x$  differenzieren:

$$dM_{\sigma_r} = da \frac{c}{12} \left\{ (m x h^3 \cos \varphi) \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx + d(m x h^3 \cos \varphi) \frac{d\psi}{dx} \right. \\ \left. + h^3 \cos \varphi d\psi + d(h^3 \cos \varphi) \psi \right\} \quad (21)$$

Zu b) 1.

$$\sum M_T = 2 T' \frac{ds}{2} \sin \varphi = 2 T \sin \frac{da}{2} \frac{ds}{2} \sin \varphi.$$

Statt  $\sum M_T$  wollen wir einfach setzen  $M_T$ .

$$M_T = da (ds h) \sigma_{t0} \frac{ds}{2} \sin \varphi,$$

$$M_T = da \left( \frac{h}{2} \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \right) \sigma_{t0} \dots (22)$$

Zu b) 2. Das Moment  $M_{\sigma_t}$  der Spannungen  $\sigma_t$ , oder was das Gleiche besagt, der Spannungsdifferenzen  $(\sigma_t - \sigma_{t0})$ , welches auf jede der beiden Seitenflächen  $GHD C$  und  $KIEF$  von Abbildung 3 wirkt, ist gleich der Summe aller Produkte, die aus der Multiplikation nachstehender drei Faktoren entstehen (vergl. Abbildung 9):

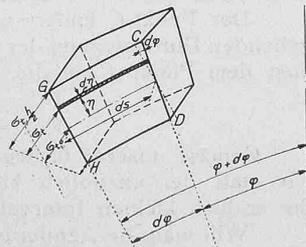


Abb. 9.

- dem Flächenelement  $df$  von der Höhe  $d\eta$ , welches im Abstand  $\eta$  von der Mittel-Meridianfaser zur Kante  $GC$  parallel verläuft,
- von dem Unterschiede der in diesem Flächenelement herrschenden Spannung  $\sigma_t$  gegenüber der Spannung  $\sigma_{t0}$  in der Mittelfaser die in die Richtung senkrecht zur Symmetrieachse entfallende Komponente, also

$$(\sigma_t - \sigma_{t0}) \sin \frac{da}{2} \propto (\sigma_t - \sigma_{t0}) \frac{da}{2},$$

- dem Abstand  $\eta$  des Flächenelementes von der Mittelfaser, multipliziert mit  $\cos \varphi$

$$M_{\sigma_t} = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} df (\sigma_t - \sigma_{t0}) \frac{da}{2} \eta \cos \varphi.$$

Hierin ist nach Abbildung 9

$$df = (ds + \eta d\varphi) d\eta.$$

Gl. (4) besagt:

$$(\sigma_t - \sigma_{t0}) = c \eta \cos \varphi \left[ \frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right].$$

Setzen wir vorübergehend als Abkürzung

$$v \equiv \left[ \frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right]. \dots (23),$$

so ist

$$M_{\sigma_t} = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (ds + \eta d\varphi) d\eta c \eta \cos^2 \varphi \cdot v \frac{da}{2} \eta.$$

Auch hier, wie bei der Ausrechnung von  $M_{\sigma_r}$ , sind bei der Integration alle Grössen ausser  $\eta$  als Konstante zu betrachten.

$$M_{\sigma_t} = da c v \cos^2 \varphi \left[ ds \int \eta^2 d\eta + d\varphi \int \eta^3 d\eta \right].$$

Durch analogen Rechnungsgang wie für  $M_{\sigma_r}$ , finden wir:

$$M_{\sigma_t} = da c dx \frac{h^3}{12} \left[ \frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right] \cos \varphi. \quad (24)$$

Zu c)

$$M_P = P \frac{ds}{2} = ds \left( x + \frac{dx}{2} \right) da p \frac{ds}{2}.$$

$$M_P = da \frac{p}{2} \left( x + \frac{dx}{2} \right) \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \dots (25)$$

Nunmehr sind von diesen Momenten noch die Vorzeichen zu bestimmen. Sie erhalten bei der Summierung das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem sie verstärkend oder schwächend auf die Plattenkrümmung in dem Querschnitt hinwirken, der die Drehaxe  $O-O$ , Abbildung 3, enthält. Es wirken auf diese Krümmung:

- $M_S$  verstärkend, also Vorzeichen +,
- $M_{Sch}$  schwächend, also Vorzeichen -,
- $M_{\sigma_r}$  verstärkend, wenn die Spannungsunterschiede  $(\sigma_r - \sigma_{r0})$  über der Mitte des Querschnittes positiv sind, somit dann  $M_{\sigma_r}$  +,
- $M_T$  verstärkend, also +,
- $M_{\sigma_t}$  analog  $M_{\sigma_r}$ , also +,
- $M_P$  schwächend, also -.

$$M_{(\sigma_r + d\sigma_r)} = M_{\sigma_r} + M_S - M_{Sch} + M_T + M_{\sigma_t} - M_P.$$

Nun kann auch geschrieben werden:

$$M_{(\sigma_r + d\sigma_r)} = M_{\sigma_r} + dM_{\sigma_r},$$

und daraus ergibt sich

$$dM_{\sigma_r} = M_S - M_{Sch} + M_T + M_{\sigma_t} - M_P \dots (26)$$

Hierin setzen wir die Werte ein aus den Gl. (21), (17), (18), (22), (24), (25).

Alle diese Werte enthalten  $da$ , welchen Wert wir besonders vorangestellt haben als Hinweis darauf, dass man damit kürzen kann. Es bleibt:

$$\frac{c}{12} \left[ (m x h^3 \cos \varphi) \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx + d(m x h^3 \cos \varphi) \frac{d\psi}{dx} + h^3 \cos \varphi d\psi + d(h^3 \cos \varphi) \psi \right] \text{ aus (21)}$$

$$= \begin{cases} \sigma_{r0} (x h) \frac{dx^2}{\rho \cos^2 \varphi} \dots \text{ aus (17)} \\ - \frac{p}{2} (x^2 - x_1^2) \frac{dx}{\cos^2 \varphi} + \sigma_{r0} (x h) \sin \varphi \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \text{ aus (18)} \\ + \sigma_{t0} \frac{h}{2} \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \dots \text{ aus (22)} \\ + c \frac{h^3}{12} d\psi \cos \varphi + c \frac{h^3}{12} dx m \frac{\psi}{x} \cos \varphi \text{ aus (24)} \\ - \frac{p}{2} \left( x + \frac{dx}{2} \right) \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \dots \text{ aus (25)}. \end{cases}$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit  $\frac{12}{c dx}$  gibt

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{d\psi}{dx} \frac{d(m x h^3 \cos \varphi)}{dx} \\ & + \psi \left[ - \frac{d(h^3 \cos \varphi)}{dx} + \frac{m h^3}{x} \cos \varphi \right] \\ & + \sigma_{r0} \frac{12}{c} \frac{x h}{\cos^2 \varphi} \left[ \frac{dx}{\varrho} + \sin \varphi \right] \\ & + \sigma_{r0} \frac{12}{c} \frac{h}{2} \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \\ & - \frac{p}{2} \frac{12}{c} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[ x^2 - x_1^2 + \left( x + \frac{dx}{2} \right) dx \right] \end{aligned} \right\} \text{III. Hauptgleichung.}$$

Diese Hauptgleichung hat die schematische Form:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{(40)} \left\{ (32) \sigma_{r0} + (36) \sigma_{r0} - (42) \frac{d\psi}{dx} + (49) \psi - (51) \right\} \text{ (IIIa)}$$

wo die in den runden Klammern ( ) stehenden Ziffern Faktoren bedeuten, welche lediglich abhängig sind von der Form und der äusseren Belastung  $p$  der Platte, nicht aber z. B. von der Randbedingung, d. h. davon, ob die Platte am Rand eingespannt sei oder frei aufliege. Ob die Platte in der Mitte eine Bohrung hat oder nicht, kommt lediglich im Summand (51) zum Ausdruck, indem dort der Summand  $x_1^2$  einen von null verschiedenen Wert erhält oder nicht. Da ferner die Platte nicht eben zu sein braucht, sondern in jedem Punkt der Meridianmittelfaser eine andere Krümmung mit dem veränderlichen Halbmesser  $\varrho$  und ausserdem eine von Punkt zu Punkt etwas veränderliche Dicke  $h$  haben kann, so ist dieses Rechnungsverfahren anwendbar auf gewölbte wie ebene ( $\varrho = \infty, \varphi = 0$ ) Platten, volle und in der Mitte gelochte, am Aussenrand frei aufliegende oder eingespannte Platten von veränderlicher Dicke.

Nach Ausrechnung der Gl. III erhalten wir:

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{x+dx} = \frac{d\psi}{dx} \Big|_x + \frac{d^2\psi}{dx^2} dx \dots (27)$$

$$\psi_{x+dx} = \psi_x + \frac{d\psi}{dx} \Big|_x dx \dots (28)$$

Hierbei erinnern wir uns stets, dass wir bei der Ausrechnung statt des unendlich kleinen Differentialen eine zwar kleine, aber endliche Differenz  $dx = x_2 - x_1$  einzusetzen haben.

*Gang der Rechnung.*

Für irgend einen Halbmesser  $x_2$  der Meridian-Mittelfaser können mit Hilfe der drei Hauptgleichungen (I), (II) und (III) und der Nebengleichungen (11), (16) und (27), (28) die Werte  $\sigma_{r0}, \sigma_{t0}$  und  $\psi$  berechnet werden, wenn die korrespondierenden Werte für den um das endliche, aber kleine Stück ( $dx$ ) verschiedenen Halbmesser  $x_1$  bekannt sind.

Um die Werte der Normalspannungen und der Winkeländerungen für alle Punkte der Mittelfaser zu erhalten, nehmen wir für irgend einen Punkt dieser Faser Werte an und rechnen für alle aufeinanderfolgenden Werte von ( $dx$ ) nach den Gl. (I), (II), (III) die Aenderungen der Normalspannungen und der Winkeländerung und sodann die Spannungen und Winkeländerung selbst aus. Am besten beginnt man innen an der Platte.

Stimmt nach der erstmaligen Durchrechnung das Endergebnis nicht mit den Randbedingungen, so ist die Rechnung von innen nach aussen zu wiederholen. Während man aber bei der oben erwähnten Berechnung der umlaufenden Scheibe beim Beginn einer Durchrechnung nur mit einer Unbekannten ( $\sigma_r$ ) zu variieren brauchte, sind es hier deren zwei, wie wir noch sehen werden.

Bezüglich der Regeln für den *Beginn der Ausrechnung* und der Berücksichtigung der *Randbedingungen* muss auf die ausführliche Arbeit im „Forschungsheft“ Nr. 124 des V. D. I. verwiesen werden. Dasselbst ist auch gezeigt, wie eine solche Rechnung vorbereitet und praktisch durchgeführt wird.

*Durchbiegung der gewölbten Platte.*

Haben wir im Vorstehenden für jeden Punkt des Plattenquerschnittes die Radial-, die Tangentialspannung

und die Winkeländerung berechnet, so sind wir damit in der Lage, die Durchbiegung ermitteln zu können. Es genügt, wenn wir hierbei nur die Mittelfaser in Betracht ziehen, welche der Radialspannung  $\sigma_{r0}$  und der Tangentialspannung  $\sigma_{t0}$  ausgesetzt ist.

Wir schlagen denselben Weg ein, den v. Bach für die Ermittlung der Durchbiegung eines gekrümmten Balkens gezeigt hat<sup>1)</sup>.

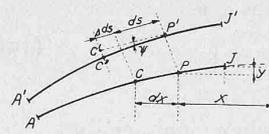


Abb. 10.

In Abbildung 10 sei durch den Linienzug  $J-A$  lediglich die Mittelfaser einer gewölbten Platte dargestellt. Aus ihr greifen wir ein beim Punkt  $P$  gelegenes Element von der Länge  $ds$  heraus.

Wir berechnen vorerst die Verschiebung des zweiten Endpunktes  $C$  dieses Elementes gegenüber dem Punkt  $P$ . Während der Belastung der Platte durch die äussere spezifische Spannung  $p$  gelangt das Faserelement aus der Lage  $P-C$  vom unbelasteten Zustand in die Lage  $P'-C'$  des endgültig belasteten Zustandes. Diese Veränderung kann als in zwei Phasen ausgeführt gedacht werden:

1. Verschiebt sich das Element aus der Lage  $P-C$  zu sich selbst parallel und dehnt sich unter dem Einfluss der Längsspannung  $\sigma_{r0}$  und der Querspannung  $\sigma_{t0}$  um den Betrag

$$\Delta(ds) = \frac{ds}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right).$$

Hierbei gelangt es in die Lage  $P'-C'$ .

2. Dreht es sich aus dieser Lage um den Winkel  $\psi$  in die Lage  $P'-C''$ . Wie wir schon bei Berechnung der Spannung  $\sigma_{r0}$  sahen, ändert sich hierbei die  $x$ -Koordinate des Punktes  $C$  gegenüber dem Punkt  $P$  um den Betrag

$$\begin{aligned} \Delta(dx) &= \Delta(ds) \cos \varphi - C'C'' \sin \varphi \\ &= \frac{ds}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \cos \varphi - ds \cdot \psi \cdot \sin \varphi \\ \Delta(dx) &= \frac{dx}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) - dy \cdot \psi \dots (29) \end{aligned}$$

Die  $y$ -Koordinate des Punktes  $C$  ändert sich gegenüber dem Punkt  $P$  um den Betrag

$$\begin{aligned} \Delta(dy) &= \Delta(ds) \sin \varphi + C'C'' \cos \varphi \\ &= \frac{ds}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \sin \varphi + ds \cdot \psi \cos \varphi \\ \Delta(dy) &= \frac{dy}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) + dx \cdot \psi \dots (30) \end{aligned}$$

(Hierbei setzen wir als Regel, die  $y$ -Koordinate in Abbildung 10 von der Höhe des Punktes  $J$  aus von oben nach unten positiv zu zählen.)

Der Punkt  $C$  ändert während der allmählich vor sich gehenden Durchbiegung der Platte seine Koordinaten gegenüber dem Punkt  $J$  um die Werte

$$\begin{aligned} \Delta x_J^c &= \sum_J^c \Delta(dx) \dots (31) \\ \Delta y_J^c &= \sum_J^c \Delta(dy) \dots (32) \end{aligned}$$

Gemäss unserer bisher geübten Rechnungsweise setzen wir statt der unendlich kleinen Differentiale  $dx$  und  $dy$  die endlich kleinen Intervalle  $dx$  und  $dy$  ein.

Will man die Aenderung der  $x$ -Ordinate des Punktes  $C$  in bezug auf die Symmetrieaxe  $z-z$ , Abbildung 10, berechnen, so ist zu berücksichtigen, dass die Ordinate des Punktes  $J$  sich bereits ändert um den Betrag

$$\Delta x_J = \frac{x_J}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \dots (33)$$

Dieser Wert ist zu dem in Gl. (31) aufgestellten Wert zu addieren, um die Gesamtzunahme der  $x$ -Ordinate des Punktes  $C$  gegenüber der Symmetrieaxe zu erhalten.

Wir finden also für diesen Punkt

$$\Delta x_c = \left\{ \begin{aligned} & \sum_J^c \left[ \frac{dx}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \right] \\ & - \sum_J^c [\psi dy] \\ & + \frac{x_J}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right)_{x=x_J} \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

<sup>1)</sup> Siehe Bach, «Elastizitäts- und Festigkeitslehre», 1902, Seite 485.

Hat die Platte in der Mitte kein Loch, so fällt der letzte Summand natürlich weg, weil dann  $x_f = 0$ .

$$\Delta y_c = \sum_j^c \left[ \frac{dy}{E} \left( \sigma_{r0} - \frac{\sigma_{r0}}{m} \right) \right] + \sum_j^c (\psi dx) \quad (35).$$

Man schafft sich ein anschauliches Bild von der Formänderung der Platte, wenn man die Koordinatenänderung eines jeden Punktes der Meridian-Mittelfaser in viel grösserem, und zwar dem 20- bis 100fachen Masstab aufzeichnet gegenüber den Koordinaten selbst.

*Zahlenbeispiele.*

Das entwickelte Rechnungsverfahren soll nun angewendet werden auf einige Zahlenbeispiele:

Wir wählen als erstes Beispiel den in Abbildung 11 dargestellten gewölbten gusseisernen Deckel, wie ein solcher in den Werkstätten von Escher Wyss & Cie. in Zürich dazu verwendet wird, die Gehäuse von Dampfturbinen probenhalber abzapfen. Es ist dies also ein Hilfsboden, der nicht zur Lieferung der Turbine gehört.

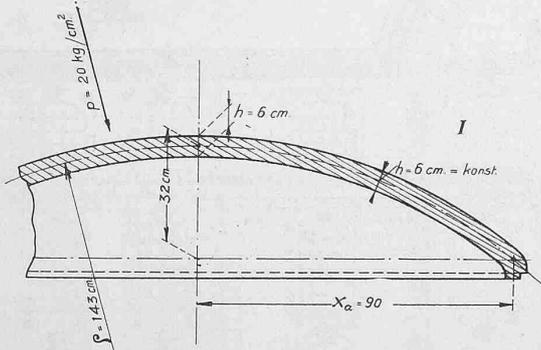


Abbildung 11.

Der Boden ist gemäss Abbildung 11 in der Mitte voll, hat eine gleichmässige Wölbung mit einem Krümmungshalbmesser  $\rho = 143 \text{ cm}$  und soll laut Werkstattzeichnung eine stets gleiche Dicke  $h = 6 \text{ cm}$  haben.

Wir haben diese gewölbte Platte als Beispiel gewählt, weil sie als Teil einer Hohlkugel vom Hohlmesser  $\rho = 143 \text{ cm}$  und von stets gleicher Dicke einen wertvollen Vergleich mit der vollständigen Hohlkugel für den Fall gleicher spezifischer Belastung zulässt.

Die nachstehende Rechnung wurde durchgeführt für einen auf der konvexen Seite wirkenden Ueberdruck von  $20 \text{ at}$   $p = (-20) \text{ kg/cm}^2$ .

Dieser Druck wurde für die Rechnung so hoch gewählt, um sie zuverlässlicher zu gestalten. Für kleinere Ueberdrücke ändern sich die Ergebnisse proportional.

*Vergleich mit der Hohlkugel.*

Bei  $(-20)$  at Ueberdruck würde die vollständige Hohlkugel vom mittlern Halbmesser  $\rho = 143 \text{ cm}$ , der Dicke  $h = 6 \text{ cm}$  eine mittlere Druckspannung  $\sigma_k$  erfahren, die sich nach der Formel berechnen lässt:

$$\sigma_k = (R^2 \pi p) : (2 R \pi h) = \frac{R p}{2 h},$$

$$\sigma_k = \frac{143 \cdot (-20)}{2 \cdot 6} = -239 \text{ kg/cm}^2 \quad (36).$$

Unter dieser spezifischen Belastung würde sich der Halbmesser verändern um den Betrag

$$\Delta R = \frac{R}{E} \left( \sigma_{rk} - \frac{\sigma_{rk}}{m} \right).$$

Hierin ist  $R = 143 \text{ cm}$ ;  $E$  für Gusseisen  $= 900\,000 \text{ kg/cm}^2$ ;  $m$  für dieses Material rund  $5^1$ ;  $\sigma_{rk} = \sigma_{rk} = \sigma_k = -239 \text{ kg/cm}^2$ .

$$\Delta R = \frac{143}{900\,000} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) (-239) = -0,0305 \text{ cm},$$

$$\Delta R = -0,305 \text{ mm} \quad (37).$$

Wie bereits bemerkt, ist es nun höchst lehrreich, festzustellen, wie sich die Hohlkugelkalotte in ihrer Beanspruchung und Formänderung der vollständigen Hohlkugel gegenüber verhält.

<sup>1)</sup> Siehe Föppl, Band III, Seite 43, Zeile 5 von unten.

*Untersuchung der Platte nach Abbildung 11 für  $p = (-20) \text{ kg/cm}^2$ .*

Diese Platte von der Form einer Hohlkugelkalotte hat einen äusseren Halbmesser

$$x_a = 90 \text{ cm}.$$

Weil sie in der Mitte nicht durchbrochen, so ist  $x_i = 0$ .

Der Boden liegt bei der Verwendung auf einer im Turbinengehäuse vorgesehenen Randfläche auf, welche einer Ebene angehört, die zur Turbinenwelle, also zur Symmetrieaxe der Platte senkrecht steht. Diese Auflage vermag demnach auf die Platte nur Reaktionskräfte in Richtung parallel zur Symmetrieaxe zu übertragen.

Der Meridianquerschnitt erfährt eine mittlere Tangentialspannung

$$\sigma_t^* = \frac{\text{seitliche Projektion des Bodens auf die Bildfläche} \times \text{Ueberdruck}}{\text{Meridianquerschnitt}}.$$

Die seitliche Projektion des Bodens auf die Bildfläche berechnet sich wie folgt (vergl. Abbildung 1):

$$\text{Fläche } A_1 J A_2 J_1 A_1 = F = \frac{\rho^2}{2} \left( 2 \frac{\varphi_a^0 \pi}{180^\circ} - \sin(2 \varphi_a^0) \right).$$

$$\sin \varphi_a^0 = \frac{x_a}{\rho} = \frac{90}{143} = 0,63,$$

$$\varphi_a^0 = 39^\circ; \quad \frac{\varphi_a^0}{\rho} = 0,681,$$

$$\sin(2 \varphi_a^0) = \sin 78^\circ = 0,978,$$

$$2 \frac{\varphi_a^0 \pi}{180^\circ} = 2 \frac{\varphi_a^0}{\rho} = 1,362.$$

$$F = \frac{143^2}{2} (1,362 - 0,978) = 3920 \text{ cm}^2.$$

Meridianquerschnitt  $f = 2 \varphi_a \rho h$ ,

$$f = 2 \cdot 0,681 \cdot 143 \cdot 6 = 1170 \text{ cm}^2.$$

$$\sigma_t^* = \frac{F p}{f} = \frac{3920 (-20)}{1170} = (-67) \text{ kg/cm}^2 \quad (38)$$

statt  $\sigma^k = (-239) \text{ kg/cm}^2$ , wie wir in Gl. (36) für die vollständige Hohlkugel gefunden hatten. Diese Verschiedenheit lässt bereits vermuten, dass in dem zu berechnenden Boden die Beanspruchung von Punkt zu Punkt der Mittelfaser (und in noch höherem Mass der Aussenfaser) stark veränderlich sein werde. Es ist nämlich anzunehmen, dass die Beanspruchung des Bodens in der Nähe der Symmetrieaxe von derjenigen in der vollen Hohlkugel nicht sehr abweicht. Damit aber die mittlere Beanspruchung des Bodens, d. i.  $\sigma_t^*$  nur etwa  $\frac{1}{4}$  (d. i. „67“ gegenüber „239“) von derjenigen der Hohlkugel sei, muss am Aussenrand eine grosse Beanspruchung auftreten, welche ein entgegengesetztes Vorzeichen zu derjenigen in der Mitte des Bodens hat. Die in später folgenden Abbildungen und in der dazu gehörenden Zahlentafel wiedergegebenen Rechnungswerte bestätigen denn auch die Richtigkeit dieser Vermutung.

Die aussen frei aufliegende Platte erfährt daselbst eine mittlere sogenannte Radialspannung

$$\sigma_{ra} = \frac{x_a p \sin \varphi_a}{2 h_a} = \frac{90 \cdot (-20) \cdot 0,63}{2 \cdot 6},$$

$$\sigma_{ra} = (-94) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots (\text{Druckspannung}) \quad (39).$$

Nummehr stellen wir uns das Schema für die Haupttafel auf:

Dabei beginnen wir nicht mit  $x_i = 0$ , wie wir dies eigentlich tun sollten, sondern mit  $x = 10 \text{ cm}$ . Wir müssten nämlich sonst die ersten Intervalle  $dx$  so klein nehmen, damit sie gegenüber  $x$  vorschriftsmässig klein genug sind, dass dadurch die Rechnung sehr weitläufig würde, ohne besondern Gewinn zu ergeben. So schätzen wir die zu machenden Annahmen statt für  $x = 0$  für  $x = 10 \text{ cm}$  und extrapolieren nach erfolgter Durchrechnung rückwärts auf  $x = 0$ .

Vom Halbmesser  $x = 10 \text{ cm}$  ausgehend, wählen wir die Intervalle  $dx$  zuerst nur klein ( $dx = 1$ ), dann immer grösser, bis zuletzt  $dx = 5 \text{ cm}$  wird und bleibt. (Wie sich jedoch erst später herausstellte, wäre es für die Genauigkeit der Rechnung besser gewesen, das Intervall  $dx$  gegen den Aussenrand hin wieder kleiner werden zu lassen. z. B.  $dx = 5, 4, 3, 2 \text{ cm}$ .) Für welche Halbmesser die Einzel-

rechnungen auszuführen sind, muss eben das praktische Gefühl und etwas Uebung weisen. In unserem Beispiel<sup>1)</sup> wurden sie vorgenommen für  $x = 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 29, 32, 36, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85$  und  $90 \text{ cm}$ . (Schluss folgt.)

auf Seite 27 auch der Lageplan des Bundesplatzes und seiner Umgebung findet.

Aus dem Vergleich ergibt sich, inwieweit der Architekt den Wünschen des Preisgerichts entsprechen konnte; die Höhen sind vermindert worden am Hauptgesimse des

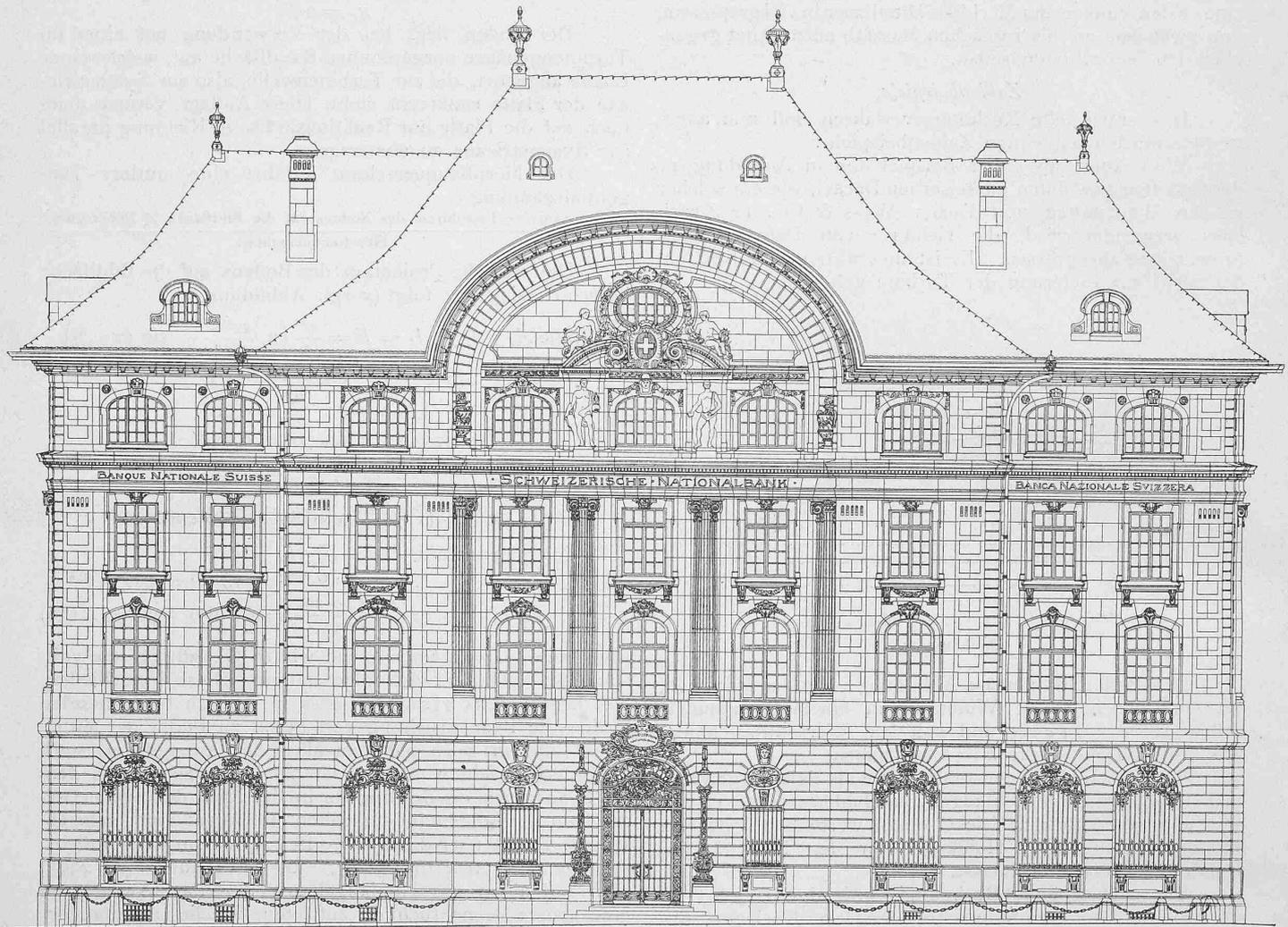


Abb. 1. Hauptfassade (Westfassade) am Bundesplatz, 1:200 (Abb. 1 und 2 nach Originalplänen).

## Die Schweiz. Nationalbank in Bern.

Erbaut durch Arch. Ed. Joos in Bern.

(Mit Tafeln 29 bis 32.)

Als vor fünf Jahren der Wettbewerb um das Nationalbankgebäude zum Austrag kam, war namentlich auch die Frage zu entscheiden, ob die Architektur dieses hervorragenden und im Platzbild wesentlich mitsprechenden Gebäudes sich den bestehenden Bauten, dem Bundeshaus und der Bernischen Kantonalbank, anzupassen habe, oder ob auch hier, zudem für ein nichtbernisches Amtsgebäude, der für das einheitliche Strassenbild Berns im allgemeinen massgebende Architektur-Charakter der passende sei. Das Preisgericht bekannte sich zu der erstern Auffassung, gab indessen dem Projekt von Architekt Ed. Joos wegen seiner Grundrisslösung den Vorzug, mit dem Wunsche um Vereinfachung der Architektur und Verminderung der Höhenentwicklung der Fassaden und Dächer. So hat nun auch der Bundesplatz sein ausgesprochenes Bernerhaus erhalten. Wir verweisen im übrigen auf die Darstellung des Wettbewerbs-Ergebnisses in Band LI, Seite 322 u. ff., wo sich

Mittelbaues um rund  $4 \text{ m}$ , an jenem der Seitenflügel, das nun in gleicher Höhe durchläuft, um rund  $2 \text{ m}$ , an der Dachfirst des Mittelbaues um rund  $6 \text{ m}$  (Abbildung 1). Damit dürfte wohl die unterste für diesen Bauarakter noch zulässige Grenze erreicht sein (vergl. Tafel 32). An der Amthausgasse musste aus baupolizeilichen Gründen die Höhe noch mehr vermindert werden, was die Fassadengestaltung einigermassen erschwerte (Abb. 2, Seite 129). Ueber die Aussenarchitektur, die wir in heutiger Nummer zur Darstellung bringen, in der Absicht, Grundrisse und Innenaufnahmen in nächster Nummer zu zeigen, äusserte sich anlässlich der vor Jahresfrist erfolgten Eröffnung des Gebäudes ein fachmännischer Artikel im Berner „Bund“ u. a. wie folgt:

„Die Grundrissanlage und der Zweck des Gebäudes bedingte reichliche Lichtquellen der Fassaden und besonders am Bundesplatze neun Fensterachsen, die massgebend wurden für die Flächenbehandlung. Die in Korbformen zum Ausdruck gelangende Bewegung der Hauptgesimslinie ist in Anbetracht der Fernwirkung des Gebäudes als Abschluss der Bundesgasse motiviert.

„Der Bau ruht auf massivem Hartsteinsockel und löst sich über dem Stockgurt in eine, die erste und zweite Etage umfassende jonische Ordnung mit ringsumführenden Gesimsen auf. Gegen den Bundesplatz bilden Dreiviertel-

<sup>1)</sup> Zu zeigen, wie die «Haupttafel» und die «Ausrechnungsblätter» anzuordnen und zu benützen sind, verbietet leider hier der Raumangel. Interessenten finden hierüber Ausführliches im «Forschungsheft» 124, insbesondere in den Tafeln 1 bis 7.