

# Berechnung gewölbter Platten

Autor(en): **Keller, Huldreich**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **61/62 (1913)**

Heft 12

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-30695>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Berechnung gewölbter Platten. — Wettbewerb für die Hochbauten der Chur-Arosa-Bahn. — Das Bürgerhaus in der Schweiz. — Zum Wettbewerb für den Entwurf zu einer Strassenbrücke über den Rhein in Cöln. — Miscellanea: Zum Gott-hardvertrag. Murgkraftwerk. Internationale Organisation der drahtlosen Zeitübermittlung. Wasserstoffgewinnung unter hohem Druck. Wärmeerzeugung in Wohnungen mit Hilfe der Gasversorgung. Ueber das Rosten von Eisen trotz Schutzanstriches. Neue

Kapselwerke als Gebläsemaschinen. Eine deutsche beleuchtungstechnische Gesellschaft. Schweizerische Bundesbahnen. Beratungsstelle für Heimatschutz in Bern. Deutscher Verein von Gas- und Wasserfachmannern. Zürcherisches Technikum Winterthur. — Korrespondenz. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Bernischer Ing.- und Arch.-Verein. G. e. P.: Stellenvermittlung. Tafel 35 bis 38: Das Bürgerhaus in Genf.

Band 61.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 12.

**Berechnung gewölbter Platten.**

Von Dipl. Ing. Dr. *Huldreich Keller* in Zürich.

(Fortsetzung statt Schluss von Seite 128)

Die Ergebnisse zweier Hauptdurchrechnungsgruppen sind in die Abbildungen 12 bis 17 eingetragen und geben ein ebenso lehrreiches wie anschauliches Bild über den Verlauf der Normalspannungen in den einzelnen Punkten der Platte und die Wanderung der einzelnen Punkte der Meridian-Mittelfaser infolge der Durchbiegung. Wir heben besonders hervor, dass die einzelnen Ergebnisse für folgende Bedingungen gelten;

Zahlenbeispiel . . . . . I II  
 Platte am Rand *freiauflegend eingespannt*<sup>1)</sup>

*Diskussion der Rechnungsergebnisse der Zahlenbeispiele I u. II.*

Ein Vergleich der Abbildungen 12 bis 15 zeigt, dass die Normalspannungen in der am Rand eingespannten Platte durchschnittlich viel niedriger sind als in der frei aufliegenden Platte. In letzterer tritt die grösste Spannung als Tangentialspannung  $\sigma_t = +1468 \text{ kg/cm}^2$  (Zug) an der Innenfaser im Abstand  $x = 90 \text{ cm}$ , Abbildung 13, die nächstgrösste als Radialspannung  $\sigma_r = -1180 \text{ kg/cm}^2$  (Druck) an der Aussenfaser zwischen den berechneten Punkten  $x = 70$  und  $80 \text{ cm}$  auf, Abbildung 12. Bei der am Rand eingespannten Stelle beträgt die Höchstbeanspruchung  $-1148 \text{ kg/cm}^2$ . Es ist dies die Druckspannung in Richtung des

<sup>1)</sup> aber in Richtung des Halbmessers beweglich.

Meridians an der Innenfaser des Aussenrandes, Abbildung 14. Die höchste an dem am Rand eingespannten Deckel auftretende Tangentialspannung finden wir ebenfalls am äusseren Rand, und zwar an der äusseren Faser mit  $+726 \text{ kg/cm}^2$  (Zug). Alle andern am eingespannten Deckel erscheinenden Spannungen sind viel kleiner als die soeben genannten.

Die Abbildungen 12 bis 15 zeigen ferner, dass für beide Lagerungsarten des Deckels Punkte zu finden sind, die entweder in Richtung des Meridians oder des Parallelkreises spannungslos sind. Es ist dies der Fall z. B. laut Abbildung 12 in Richtung des Meridians an der innern Begrenzungsfaser im Abstand  $x = 45 \text{ cm}$  von der Symmetrieaxe, laut Abbildung 13 in „tangentialer“ Richtung an der äussern Begrenzungsfaser bei  $x = 78 \text{ cm}$ , an der innern Begrenzungsfaser bei  $x = 56 \text{ cm}$  usw.

Eine weitere Betrachtung der die „Radialspannungen“ am frei aufliegenden und am aussen eingespannten Deckel darstellenden Abbildungen 12 und 14 zeigt, dass in beiden Fällen zwischen der Symmetrieaxe und dem Aussenrand je ein Querschnitt vorkommt, der keiner Biegungs-, sondern nur einfacher normaler Druckspannung unterworfen ist. Es ist dies jeweils derjenige Kegelschnitt, in welchem im graphischen Bild die Radialspannungen in der innern und äussern Begrenzungsfaser gleich gross erscheinen. Schätzungsweise trifft dies zu in Abbildung 12 für die Kote  $x = 22 \text{ cm}$ , in Abbildung 14 für den Halbmesser  $x = 8 \text{ cm}$ . Hier zeigt die elastische Linie relative Inflexionspunkte. In Abbildung 12 verschwindet das Biegemoment natürlich ein zweites

*Zahlentafel 8. Zusammenstellung der Hauptdaten für die Rechnungsbeispiele.*

| Beispiel Nr. . . . . .  | I  | II                     | III             | IV     | V                   | VI    | VII   | VIII  | IX                     | IX <sub>v</sub> | X  | X <sub>f</sub>        |
|---|--|------------------------|-----------------|--------|---------------------|-------|-------|-------|------------------------|-----------------|--|-----------------------|
| Schnitt-Abbildung Nr. . . . . .   | 18 u. 11   | 18                     | 18              | 18     | 18                  | 18    | 18    | 18    | 18 u. 32               | 18 u. 35        | 18   | 18                    |
| Material. . . . .   | Gusseisen $G = 900\,000 \text{ kg/cm}^2$ ; $m = 5$ |                        |                 |        |                     |       |       |       |                        |                 | Flusseisen<br>$G = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$<br>$m = 3,33$ |                       |
| Randbedingungen:  |  |                        |                 |        |                     |       |       |       |                        |                 | Bohrung mit<br>Radius $r = 15 \text{ cm}$<br>mit Nabe            |                       |
| 1. in der Mitte . . . . .   | voll   |                        |                 |        |                     |       |       |       |                        |                 | voll   |                       |
| 2. am Rand, und zwar axial . . . . .  | frei aufliegend                                    | eingespannt nachgiebig | frei aufliegend |        |                     |       |       |       | eingespannt nachgiebig |                 | unfrei   |                       |
| Aussenhalbmesser . . . . . cm   | 90   | 90                     | 90              | 90     | 90                  | 90    | 60    | 60    | 90                     | 90              | 30   | 30                    |
| Mittlerer Wölbungshalbmesser . . . . .  | 143  | 143                    | 260             | 510    | $\infty$            | 143   | 143   | 95,5  | 143                    | 143             | 103,5  | 103,5                 |
| Pfeilhöhe der Wölbung . . . . .   | 32,1   | —                      | 16              | 8      | 0                   | —     | —     | —     | —                      | —               | —  | —                     |
| Dicke d. Platten, soweit sie stets gleich . . . . .   | 6  | 6                      | 6               | 6      | 6                   | 9     | 6     | 6     | 6                      | 6               | 0,99   | 0,99                  |
| Spezifische Belastung $p$ . . . . . $\text{kg/cm}^2$  | — 20 auf konvexe Seite                             |                        |                 |        |                     |       |       |       |                        |                 | +16  | +16 auf konkave Seite |
| Spannungsdiagramm . . . . . Abb.  | 19   | 20                     | 21              | 22     | 23                  | 24    | 25    | 26    | 27                     | 28              | 29   | 30                    |
| Es betragen die Spannungen innen:   |  |                        |                 |        |                     |       |       |       |                        |                 |  |                       |
| in der Mittelfaser $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r0i} \text{ . . . . . } \text{kg/cm}^2 \\ \sigma_{t0i} \text{ . . . . . } \end{array} \right.$                                     | -258   | -268                   | -720            | -1085  | 0                   | -212  | -372  | -185  | 0                      | 0               | +1080  | +840                  |
| in der Aussenfaser $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r\frac{h}{2}i} \text{ . . . . . } \text{kg/cm}^2 \\ \sigma_{t\frac{h}{2}i} \text{ . . . . . } \end{array} \right.$                 | -365   | -271                   | -965            | -3230  | -5620               | -240  | -605  | -190  | 0                      | 0               | +1100  | +940                  |
| Es betragen die Spannungen am Aussenrand:   |  |                        |                 |        |                     |       |       |       |                        |                 |  |                       |
| in der Mittelfaser $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r0a} \text{ . . . . . } \text{kg/cm}^2 \\ \sigma_{t0a} \text{ . . . . . } \end{array} \right.$                                     | -94  | -94                    | -51             | -26,5  | 0                   | -62   | -42   | -62   | -94                    | -62             | +70  | +609                  |
| in der Aussenfaser $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r\frac{h}{2}a} \text{ . . . . . } \text{kg/cm}^2 \\ \sigma_{t\frac{h}{2}a} \text{ . . . . . } \end{array} \right.$<br>(Höchstwert) | +1277  | +516                   | +2020           | +2180  | 0                   | +620  | +832  | +554  | +1510                  | +1260           | -2212  | +55                   |
| Durchbiegung in der Mitte $\Delta y = \text{mm}$  | -2,45  | -1,44                  | -9,54           | -24,33 | -56,8 <sup>1)</sup> | -1,42 | -2,29 | -0,86 | -2,78                  | -2,30           | +2,00  | +0,51                 |
| Dehnung d. Aussenhalbmessers $\Delta x = \text{mm}$   | +1,47  | +0,56                  | +0,53           | +2,22  | —                   | +0,73 | +0,57 | +0,38 | +1,56                  | +1,39           | -0,33  | -0,04                 |
| Diagramm der Durchbiegung $\Delta y$ . . . . . Abb.   | 36   | 36                     | —               | —      | —                   | —     | —     | —     | 36                     | 36              | —  | —                     |
| Diagramm der Aenderung $\Delta x$ . . . . .   | 37   | 37                     | —               | —      | —                   | —     | —     | —     | 37                     | 37              | —  | —                     |

<sup>1)</sup> Die Formel nach Föppl, Bd. III, S. 261, Gl. (185) giebt  $-52,7 \text{ mm}$ , also  $7,2 \%$  weniger. Diese an sich geringe Abweichung liegt wahrscheinlich darin begründet, dass wir noch weitere annäherndere Durchrechnungen hätten vornehmen sollen.

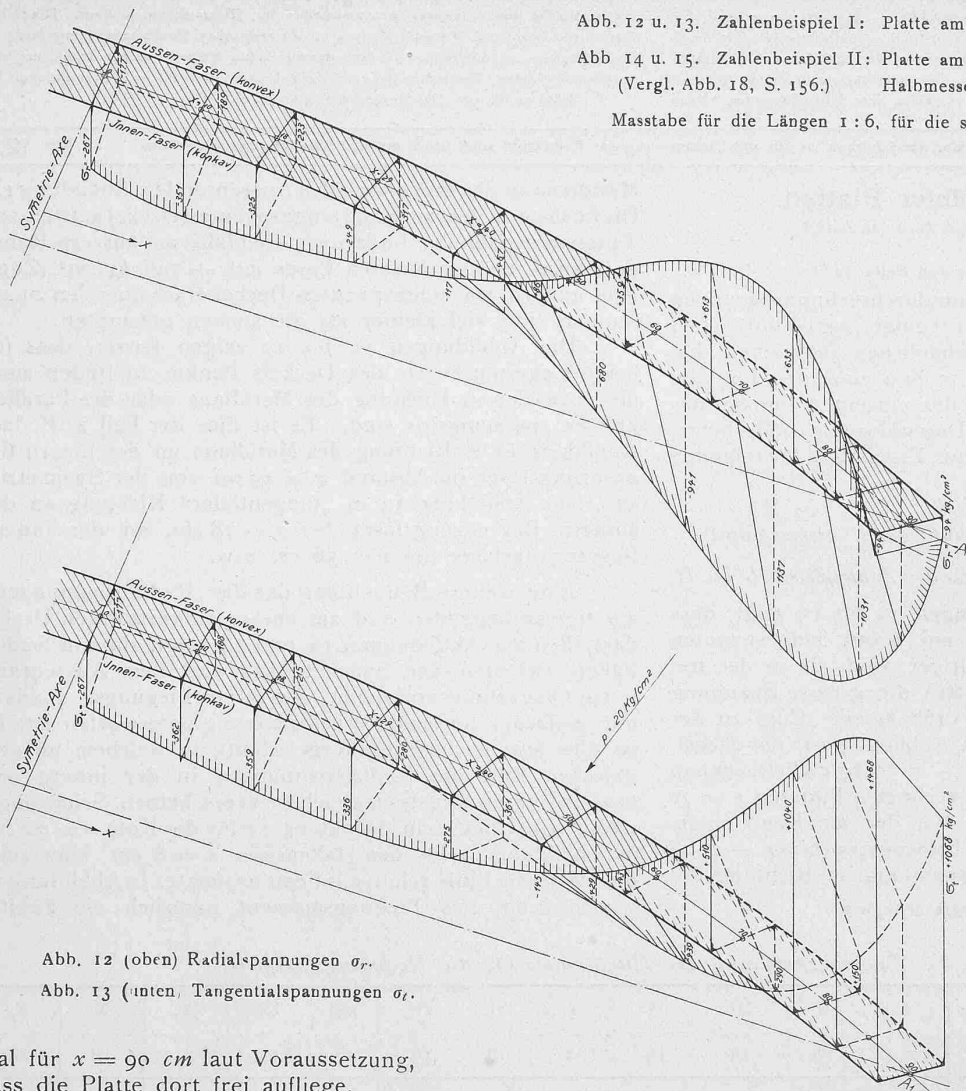


Abb. 12 (oben) Radialspannungen  $\sigma_r$ .  
Abb. 13 (unten) Tangentialspannungen  $\sigma_t$ .

Mal für  $x = 90 \text{ cm}$  laut Voraussetzung, dass die Platte dort frei aufliege.

Die in den Abbildungen 12 bis 15 gegebenen Darstellungen der Spannungsverteilungen lehren ferner, dass die Platte einem „Körper gleicher Festigkeit“ angenähert werden könnte, wenn sie in der Mitte dünner, gegen aussen und besonders am Rand dicker gehalten wäre.

*Durchbiegung des nach Abbildung 11 ausgebildeten und auf der konvexen Seite mit  $20 \text{ kg/cm}^2$  belasteten Deckels.*

In den Abbildungen 16 und 17 ist die rechnerische Durchbiegung der Mittelfaser des Deckels dargestellt für die zwei Fälle:

I. Die Platte ist am Rand frei aufliegend (Kurve I).

II. Die Platte ist am Rand so eingespannt, dass ihr Aussenquerschnitt sich wohl in Richtung senkrecht zur Symmetrieaxe parallel verschieben, nicht aber verdrehen kann. Der Kürze halber wollen wir diesen Fall mit „Platte aussen eingespannt“ bezeichnen, obschon dieses Einspannen nur bedingt geschieht (Wahrung der Verschiebbarkeit) (Kurve II).

Die Kurve O stellt die Meridian-Mittelfaser (Kreisbogen) im unbelasteten Zustand dar. Es ist wohl zu beachten, dass die Masstäbe für die Mittelfaser

Abb. 12 u. 13. Zahlenbeispiel I: Platte am Rand frei aufliegend.

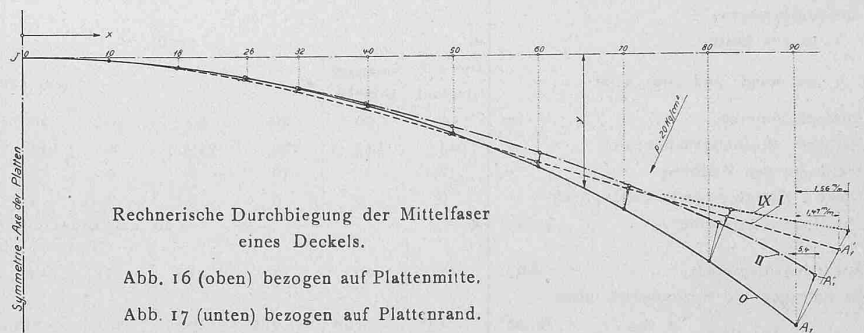
Abb. 14 u. 15. Zahlenbeispiel II: Platte am Rand eingespannt, aber in Richtung des (Vergl. Abb. 18, S. 156.) Halbmessers beweglich.

Masstäbe für die Längen 1 : 6, für die spez. Spannungen  $30 \text{ kg/cm}^2 = 1 \text{ mm}$ .

einerseits und für ihre Durchbiegung andererseits verschieden sind, und zwar ist die Meridian-Mittelfaser aufgezeichnet im Masstab 1 : 8, die Aenderung von deren Koordinaten im Masstab 5 : 1, sodass also die Aenderungen der Koordinaten selbst in 40facher Vergrößerung dargestellt sind.

Weil wir von der Mitte aus gerechnet haben, ist in Abbildung 16 demgemäss die Verschiebung der einzelnen Punkte relativ zum Mittelpunkt J aufgetragen und dabei die Annahme gemacht, dass alle weiter aussen liegenden Punkte sich verschieben können. Die Mittelfaser geht aus ihrer ursprünglichen Lage  $J A_1$  (Deckel unbelastet) über entweder in die Lage  $J A_1'$  oder in die Lage  $J A_1''$ , je nachdem der Deckel am Rand „frei aufliegend“ oder „eingespannt“ ist.

Die Darstellung Abbildung 17 ist für die der Wirklichkeit eher entsprechende Annahme getroffen, dass der Randpunkt  $A_1$  sich nur auf der Wagerechten, d. i. senk-

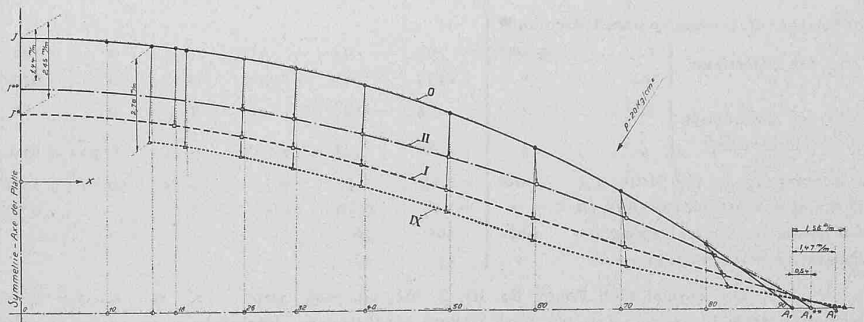


Rechnerische Durchbiegung der Mittelfaser eines Deckels.

Abb. 16 (oben) bezogen auf Plattenmitte.

Abb. 17 (unten) bezogen auf Plattenrand.

(Masstäbe und Bezeichnungen vergleiche Text.)



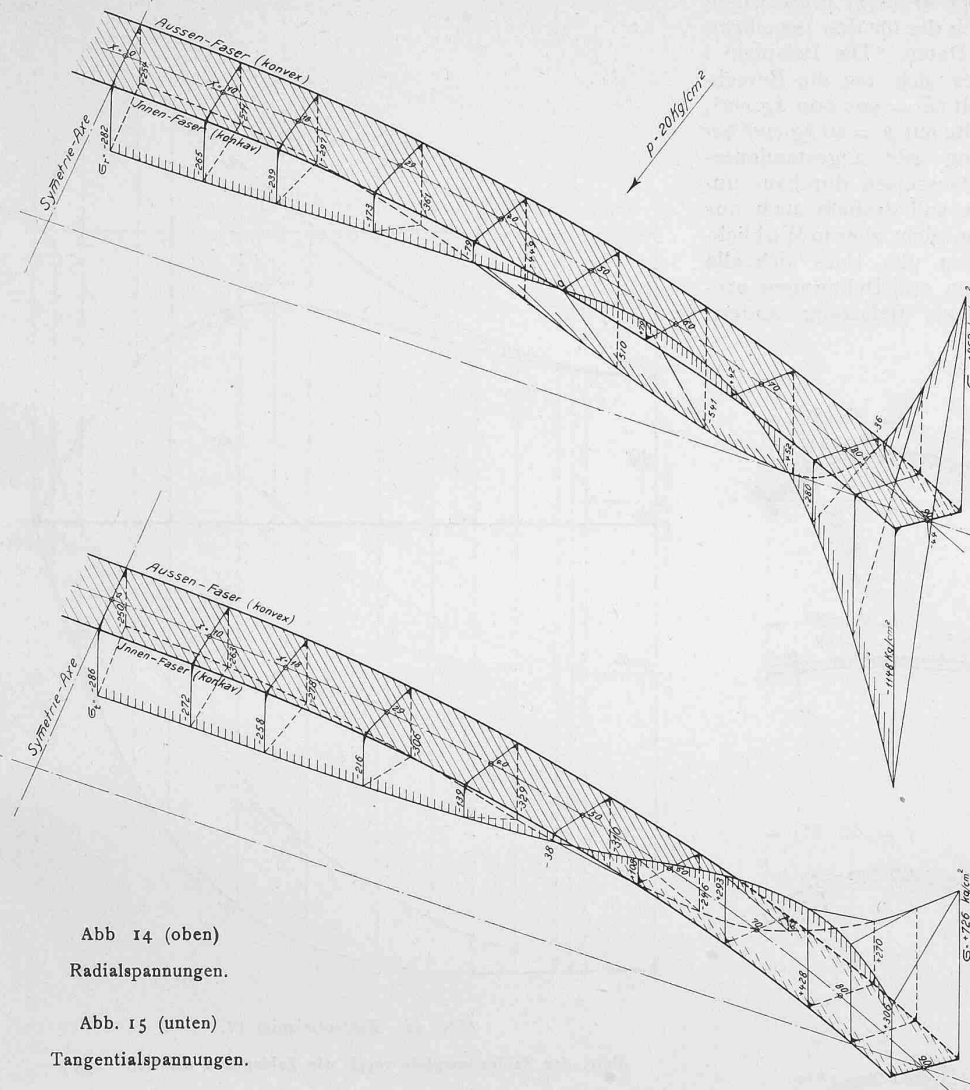


Abb. 14 (oben)  
Radialspannungen.

Abb. 15 (unten)  
Tangentialspannungen.

Die für die wirklichen Koordinatenänderungen gefundenen Rechnungswerte sind in den Abbildungen 16 und 17 eingeschrieben. (Für Fall II, d. h. „aussen eingespannt“, ist der Wert  $\Delta x_a$  nicht zuverlässlich. Vermutlich liegt ein Rechenfehler vor infolge der Wahl zu grosser Intervalle für  $dx$  gegen den Aussenrand hin.)

Nach unserer Rechnung und nach Abbildung 17 kommt die grösste Aenderung der Koordinate in Richtung parallel zur Symmetrieaxe in der Mitte der Platte vor, wie nicht anders zu erwarten war. Sie beträgt bei der frei aufliegenden Platte 2,45 mm, bei der am Rand eingespannten Platte nur 1,44 mm.

Der äusserste Punkt  $A_1$  der Meridian-Mittelfaser verschiebt sich um 1,47 mm nach aussen, wenn die Platte aussen frei aufliegend, dagegen nur um rund 0,56 mm, wenn die Platten „aussen eingespannt“.

Von der Wiedergabe aller Rechnungs- und insbesondere der Zwischenwerte wurde mit Rücksicht auf deren grosse Zahl abgesehen.

Im Anschluss an diese eingehend besprochenen Beispiele I und II wurden noch zehn weitere Beispiele durchgerechnet. In Zahlentafel 8 sind von allen zwölf Beispielen die ihnen zugrunde gelegten Bedingungen zusammengestellt. Die Hauptabmessungen der durchgerech-

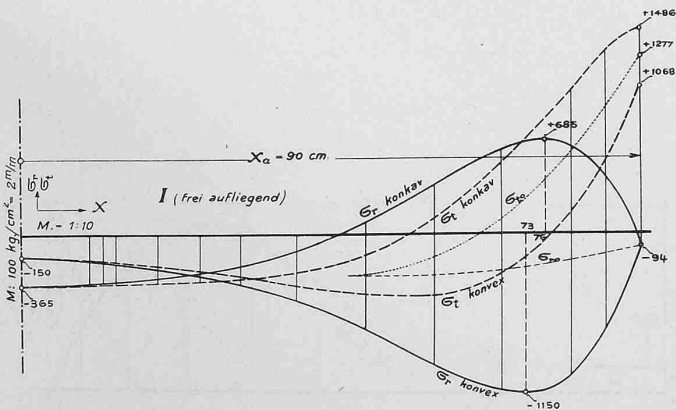


Abb. 19. Zahlenbeispiel I (frei aufliegend).

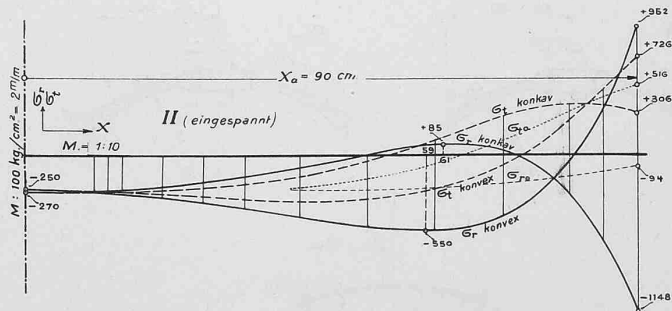


Abb. 20. Zahlenbeispiel II (eingespannt).

|                        | Für I | Für II |
|------------------------|-------|--------|
| $q$ in $cm =$ konstant | 143   | 143    |
| $x_a$ in $cm$          | 90    | 90     |
| $x_i$ in $cm$          | 0     | 0      |
| $h$ in $cm =$ konstant | 6     | 6      |
| $p$ in $at$            | — 20  | — 20   |

recht zur Symmetrieaxe, nicht aber parallel hierzu bewegen könne, und zwar nach den Lagen  $A_1^*$  oder  $A_1^{**}$ , je nachdem die Platte am Rand frei aufliegt oder eingespannt ist. Der Mittelpunkt der Platte bewegt sich hierbei aus der ursprünglichen Lage  $J$  nach  $J^*$  oder  $J^{**}$ .

neten Platten finden sich in Abbildung 18, I bis X (S. 156). Diese Beispiele geben über folgende Fragen Aufschluss:

- Unterschied zwischen den Randbedingungen „Platte aussen frei aufliegend“ und „eingespannt“.
- Einfluss der Plattenwölbung.
- „ „ Plattendicke.
- „ „ Grösse des äusseren Halbmessers „ $x_a$ “.
- „ „ Bohrung und der versteifenden Nabe.
- „ „ Verdickung des Plattenrandes.
- Unterschied zwischen „aussen nachgiebig eingespannt“ und „fest eingespannt“.



Die einer und derselben Gruppe a) bis g) angehörigen Platten unterscheiden sich nur durch die für den jeweiligen Programmpunkt gekennzeichneten Daten. Die Beispiele I bis IX<sub>v</sub> haben das gemein, dass es sich um die Berechnungen gusseiserner Platten handelt ( $E = 900\,000\text{ kg/cm}^2$ ;  $m = 5$ ), welche von der konvexen Seite mit  $p = 20\text{ kg/cm}^2$  belastet sein sollen. Diese Belastung gibt zugeständnermassen für fast alle Beispiele für Gusseisen durchaus unzulässig hohe Beanspruchungen. Sie soll deshalb auch nur für unsere vergleichsweise Rechnung, nicht aber in Wirklichkeit Gültigkeit haben. Wir erinnern uns, dass sich alle rechnerisch festgestellten Spannungen und Dehnungen proportional zur gewählten spezifischen Belastung ändern würden.

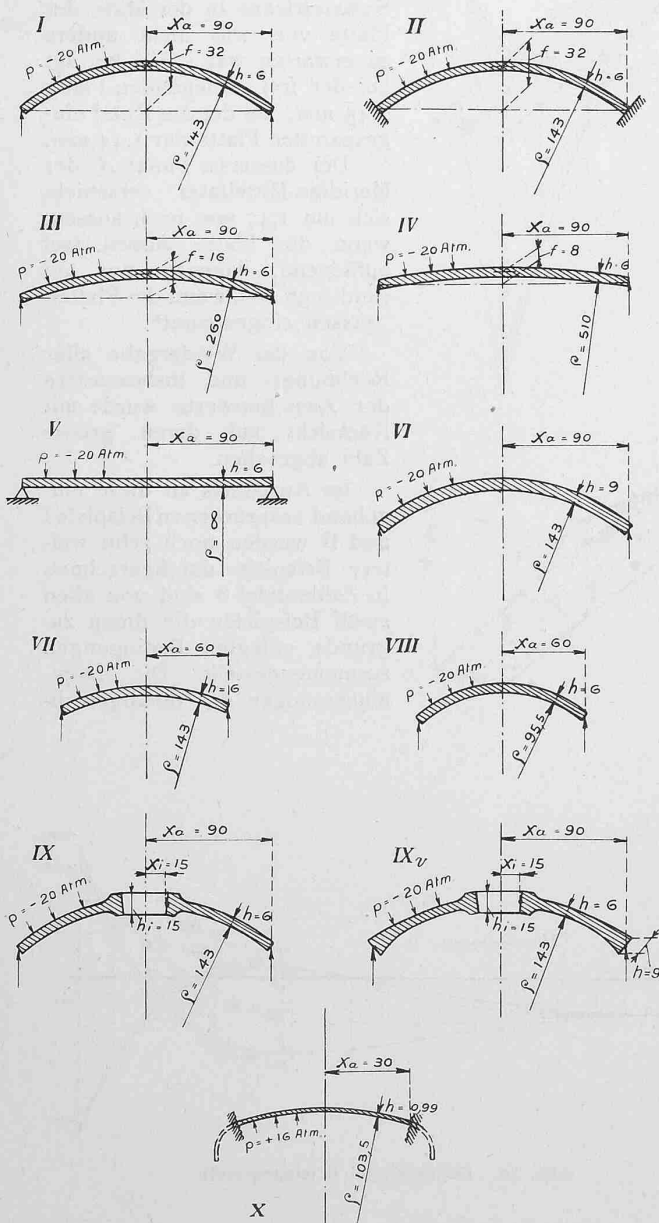


Abb. 18. Deckel nach Zahlenbeispielen I bis X. — 1 : 50.

Den Beispielen X und X<sub>v</sub> ist der Boden aus Fluss-eisen zugrunde gelegt, der von Professor Dr. v. Bach bezüglich Durchbiegen untersucht und in der „Z. d. V. d. I.“, 1899, S. 1585 in Abbildungen 1 und 2 abgebildet wurde. ( $E = 2\,100\,000\text{ kg/cm}^2$ ;  $m = 10/3$ .) Die Hauptrechnungsergebnisse sind in den Diagrammen Abbildungen 19 bis 30 aufgetragen.

(Schluss folgt.)

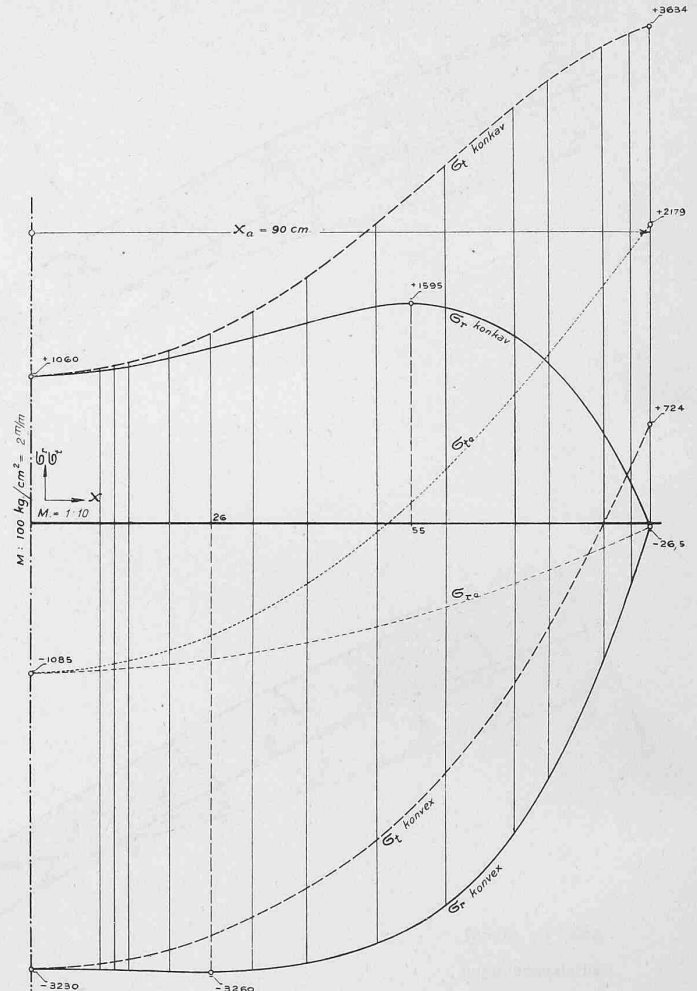


Abb. 22. Zahlenbeispiel IV.

(Betr. der Zahlenbeispiele vergl. die Zahlentafel auf Seite 153.)

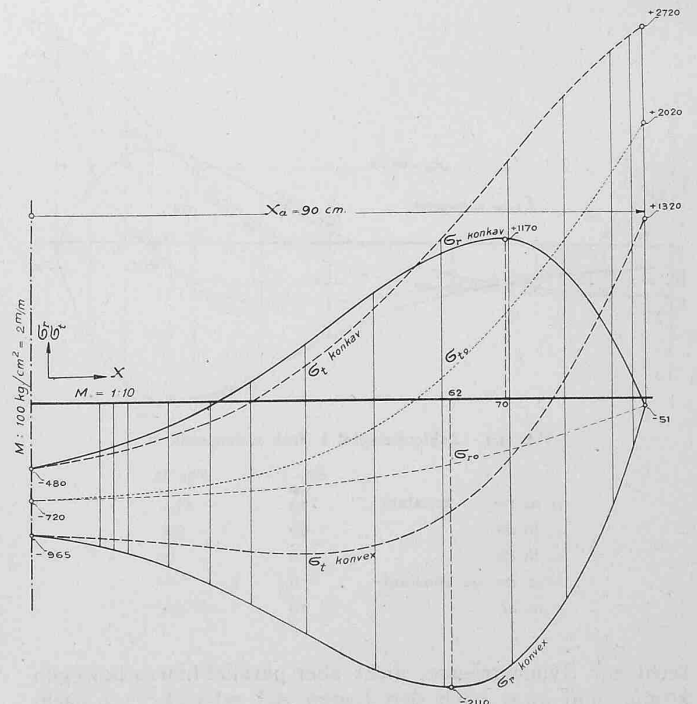


Abb. 21. Zahlenbeispiel III.

Für Zahlenbeispiel I bis IX<sub>v</sub> ist das Material Gusseisen.

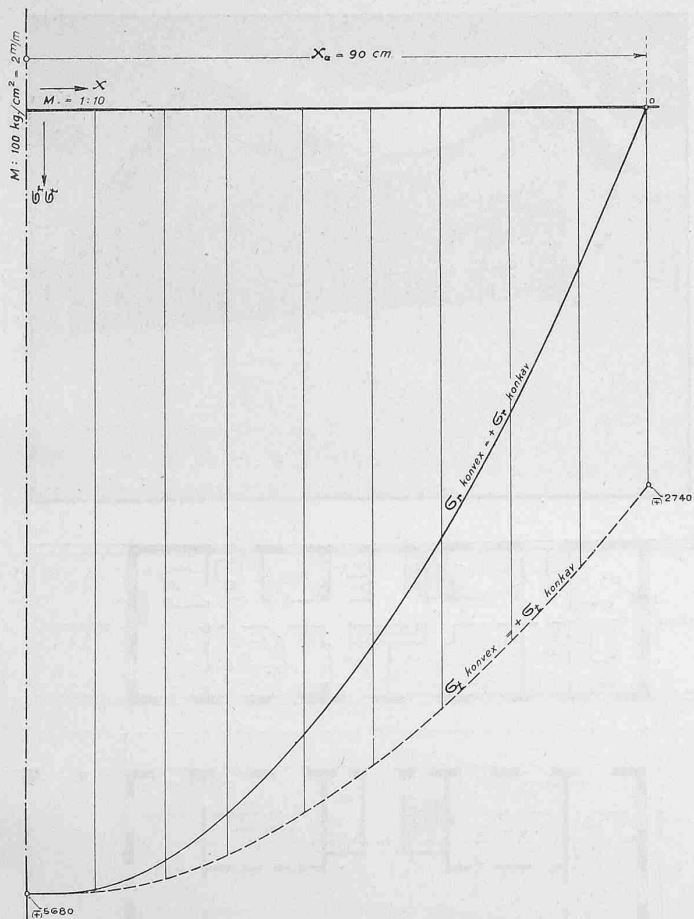


Abb. 23. Zahlenbeispiel V.

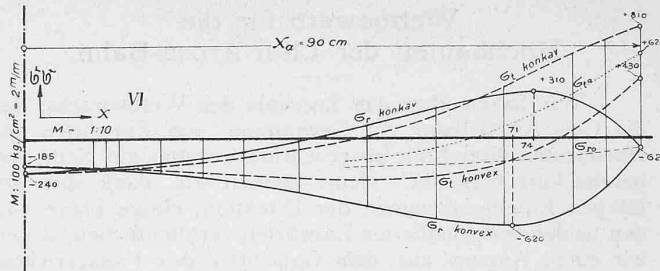


Abb. 24. Beispiel VI.

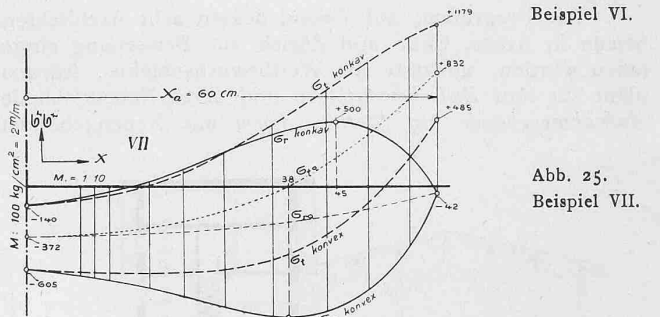


Abb. 25. Beispiel VII.

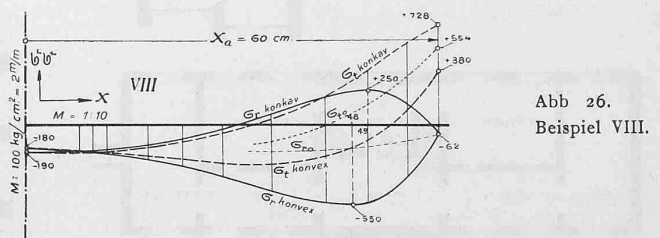


Abb. 26. Beispiel VIII.

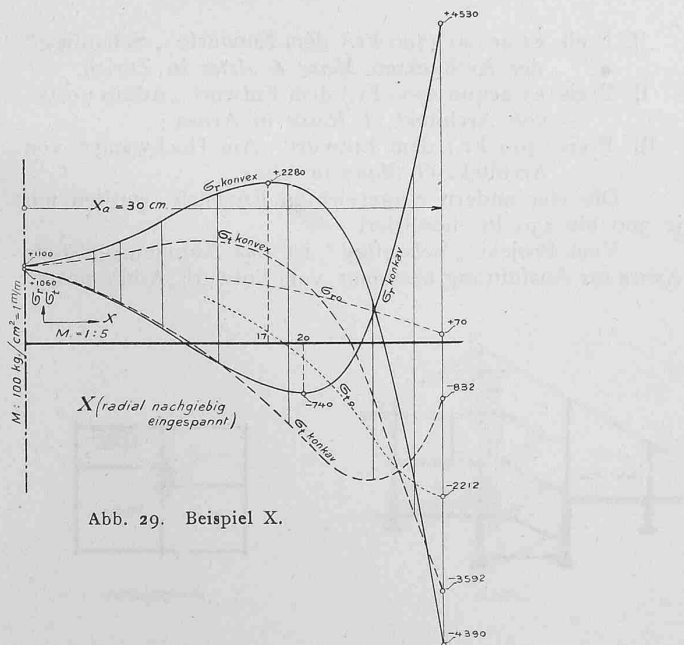


Abb. 29. Beispiel X.

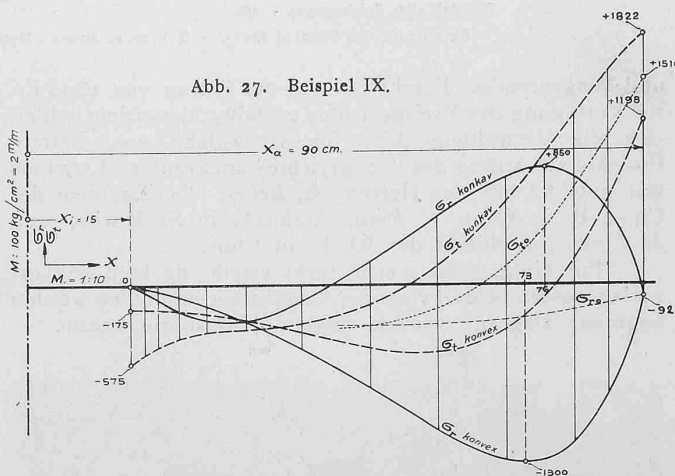


Abb. 27. Beispiel IX.

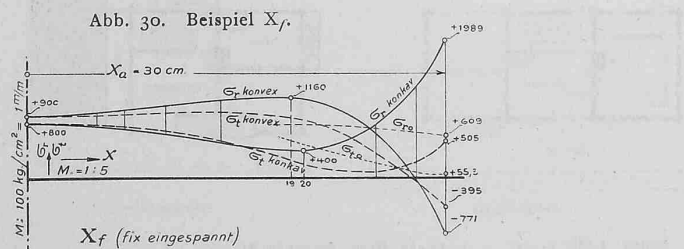


Abb. 30. Beispiel X\_f.

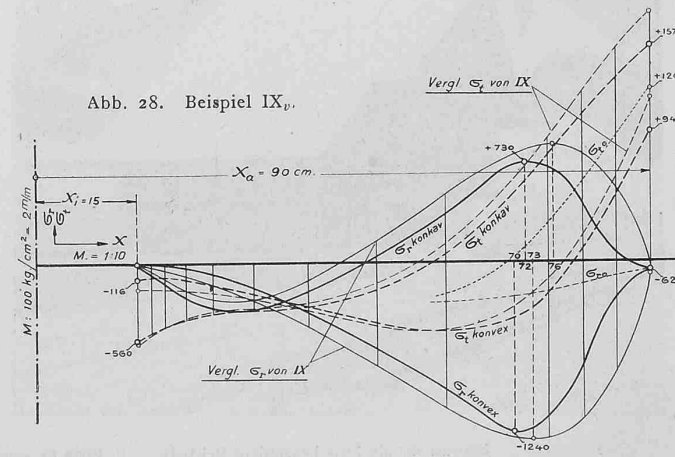


Abb. 28. Beispiel IX\_v.