

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 65/66 (1915)
Heft: 15

Artikel: Calcul des cadres à angles rigides considérés comme poutres continues
Autor: Lacroix, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32301>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 05.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Calcul des cadres à angles rigides considérés comme poutres continues.

Par E. Lacroix, ingénieur civil à Genève.

On assimile parfois le calcul des cadres rectangulaires à angles rigides employés dans les constructions métalliques et en béton armé à celui de poutres continues dont les travées extrêmes auraient été rabattues de 90° autour des points d'appuis, comme le montre la figure 1. Il peut paraître intéressant de rechercher dans quelles limites ce procédé de calcul est rigoureux.

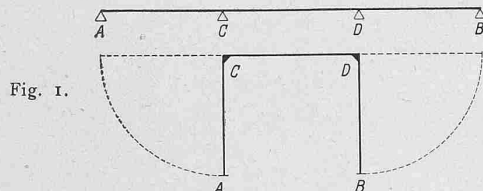


Fig. 1.

A. Cadre rectangulaire encastré à la base.

Nous considérons le cas d'une force unique P sur l'entrait. Les différents moments sont donnés par les expressions connues

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{Px x'}{2l} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{x'-x}{l(6k+1)} \right) \\ M_B &= \frac{Px x'}{2l} \left(\frac{1}{k+2} + \frac{x'-x}{l(6k+1)} \right) \\ M_C &= -\frac{Px x'}{2l} \left(\frac{1}{k+2} + \frac{x'-x}{l(6k+1)} \right) \\ M_D &= -\frac{Px x'}{2l} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{x'-x}{l(6k+1)} \right) \end{aligned} \right\} \dots I$$

qui permettent de tracer la surface des moments en partant de la surface relative à la poutre simple CD chargée par P . Dans ces formules le facteur k a la valeur

$$k = \frac{J_1}{l} \cdot \frac{h}{J_2}$$

Les lettres ont la signification visible dans la fig. 2.

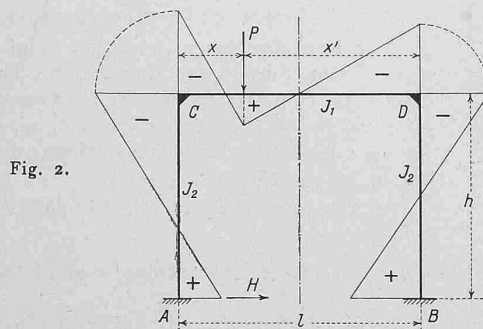


Fig. 2.

Outre M_A agissent en A la poussée

$$H = \frac{3Px x'}{2lh(k+2)} \dots Ia$$

et la réaction verticale

$$A = \frac{Px x' (x' - x)}{l^3 (6k + 1)} + \frac{Px'}{l} = \frac{Px'}{l^3} \left[l^2 + \frac{x(x' - x)}{6k + 1} \right] \dots Ib$$

Ces formules ne tiennent pas compte des déformations dues aux forces normales, comme c'est du reste l'usage de le faire dans le calcul des cadres, parce que ces déformations sont généralement négligeables par rapport à celles dues aux moments. Ceci est d'autant plus fondé ici que les forces normales ne sont pas comparables dans les deux méthodes de calcul.

La poutre continue correspondante est encastrée à ses deux extrémités. Si l'on part de la formule des trois moments, on supposera un point d'appuis accessoire au-delà de A et B à une distance tendant vers 0. On aura successivement (fig. 3):

$$2M_A \frac{h}{J_2} + M_C \frac{h}{J_2} = 0 \dots (1)$$

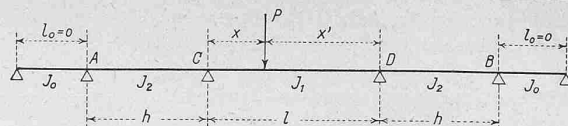


Fig. 3.

$$M_A \frac{h}{J_2} + 2M_C \left(\frac{h}{J_2} + \frac{l}{J_1} \right) + M_D \frac{l}{J_1} = -\frac{Px'(l^2 - x'^2)}{lJ_1} \dots (2)$$

$$M_C \frac{l}{J_1} + 2M_D \left(\frac{l}{J_1} + \frac{h}{J_2} \right) + M_B \frac{h}{J_2} = -\frac{Px(l^2 - x^2)}{lJ_1} \dots (3)$$

$$M_D \frac{h}{J_2} + 2M_B \frac{h}{J_2} = 0 \dots (4)$$

de (1) on tire

$$M_A = -\frac{M_C}{2}$$

et de (4)

$$M_B = -\frac{M_D}{2}$$

valeurs qui, substituées dans (2) et (3) donnent

$$M_C l \left(\frac{3h}{2J_2} + \frac{2l}{J_1} \right) + M_D \frac{l^2}{J_1} = -\frac{Px'(l^2 - x'^2)}{J_1} \dots (5)$$

$$M_C \frac{l^2}{J_1} + M_D l \left(\frac{3h}{2J_2} + \frac{2l}{J_1} \right) = -\frac{Px(l^2 - x^2)}{J_1} \dots (6)$$

Si l'on introduit le facteur $k = \frac{J_1}{l} \cdot \frac{h}{J_2}$ on obtient en résolvant ce système sur M_D et M_C

$$\left. \begin{aligned} M_D &= -\frac{2P[x(l^2 - x^2)(3k + 4) - 2x'(l^2 - x'^2)]}{3l^2[4(2k + 1) + 3k^2]} \\ M_C &= -\frac{2P[x'(l^2 - x'^2)(3k + 4) - 2x(l^2 - x^2)]}{3l^2[4(2k + 1) + 3k^2]} \end{aligned} \right\} \dots II$$

M_A et M_B étant dans le rapport constant $-\frac{1}{2}$ avec ces deux moments, sont également connus.

Le moment dans la 1^{re} travée s'annule pour $x = \frac{h}{3}$ on aura donc à gauche de cette section

$$H \frac{h}{3} + M_A = 0$$

d'où

$$H = \frac{3}{2} \frac{M_C}{h} = -\frac{P[x'(l^2 - x'^2)(3k + 4) - 2x(l^2 - x^2)]}{h l^2 [4(2k + 1) + 3k^2]} \dots IIa$$

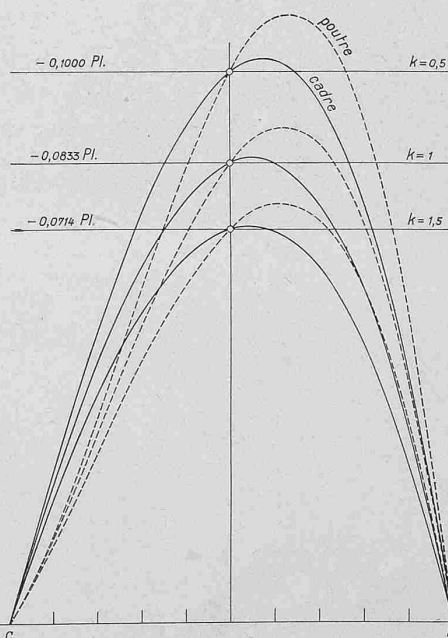


Fig. 4. Lignes d'influence M_D entre $CD = l$ pour un cadre encastré à la base et pour la poutre correspondante.

La comparaison entre les deux méthodes de calcul représentées par les formules I et II se trouve simplifiée par le fait que la somme des valeurs symétriques d'un moment quelconque est la même pour le cadre ou pour la poutre.

Ainsi, d'après les formules I, on a pour M_c par exemple, x prenant les valeurs x et $l-x = x'$

$$M_c + M_c' = - \frac{2 P x x'}{l(k+2)}$$

tandis que la formule correspondante II donne

$$M_c + M_c' = - \frac{2 P}{3 l^2 [4(2k+1) + 3k^2]} \left[(3k+4) [x'(l^2 - x'^2) + x(l^2 - x^2)] - 2 [x(l^2 - x^2) + x'(l^2 - x'^2)] \right]$$

$$= - \frac{2 P}{l^2 [4(2k+1) + 3k^2]} (3k+2) l x x' = - \frac{2 P x x'}{l(k+2)}$$

comme plus haut. On verrait d'une manière analogue qu'il en est bien ainsi pour M_D , par conséquent aussi pour M_A et M_B . — Ces sommes étant égales en A , B , C et D , il en sera de même, par proportionnalité, pour toute section des montants AC et BD . Il en sera encore de même, pour la même raison, de la partie négative du moment des sections entre C et D ; la partie positive étant, dans les deux cas, le moment de la poutre simple, la remarque énoncée plus haut s'applique donc bien à toutes les sections du cadre.

De plus, pour la section au milieu de CD , les moments provenant de P dans les positions symétriques x et x' sont égaux entr'eux, par conséquent égaux chacun à la moitié des sommes égales pour le cadre et la poutre. Il en résulte que les moments dans cette section sont égaux par les deux méthodes, quelque soit la position de P entre C et D . La valeur commune est, si P est sur la moitié gauche de CD

$$M = \frac{Px}{2} + \frac{M_c + M_D}{2} = \frac{Px}{2} + \frac{M_c + M_c'}{2} = \frac{Px}{2} - \frac{Px x'}{l(k+2)}$$

et le calcul de cette section est rigoureusement exact par la poutre continue, quelque soit le cas de charge sur CD . Pour toutes les autres sections du cadre, le calcul comme poutre continue n'est donc exact que pour des systèmes de deux ou plusieurs forces symétriques par rapport à l'axe du cadre. Cela sera en particulier le cas pour une force unique agissant au milieu et pour une charge uniformément répartie.

Les différences entre les deux méthodes apparaissent clairement dans les lignes d'influence des moments, calculées d'après les formules I et II. La fig. 4 donne les courbes de M_D pour les valeurs du paramètre $k = 1$, $k = 0,5$ et $k = 1,5$ correspondant respectivement — si l'on suppose, pour fixer les idées, J_1 égal à J_2 ou peu différent — au cadre équilateral, surbaissé ou surhaussé. Les courbes relatives au cadre sont en plein, celles de la poutre continue en pointillé. Dans le voisinage des ordonnées maxima, soit par exemple pour $x = 0,6 l$, le calcul d'après la poutre donne des ordonnées d'environ 7% trop grandes en valeur absolue. Le maximum de la différence a lieu pour $x = 0,212 l$, où le calcul comme poutre donne une valeur de 25% trop petite.

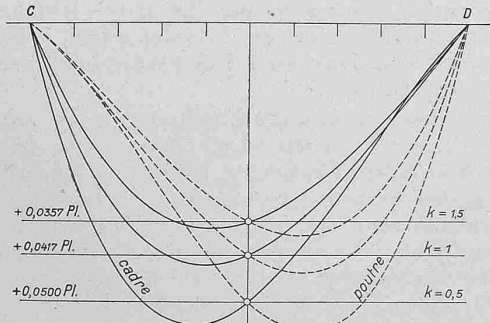


Fig. 7. Lignes d'influence M_D entre $CD = l$ pour un cadre encastré à la base et pour la poutre correspondante.

D'une façon analogue, la fig. 5 donne les courbes pour M_B , moment d'encastement. Pour l'abscisse $x = 0,3 l$ par exemple, les ordonnées d'après la poutre continue sont pour $k = 1$, $0,5$ et $1,5$ respectivement de 35, 43 et 31% trop petites.

Quant à la poussée H , on trouve avec $x = 0,3 l$ ou $0,7 l$, pour $k = 1$, $0,5$ et $1,5$ des différences de $\pm 24, 28$ ou 15% .

La réaction verticale du cadre n'a pas d'homologue dans la poutre. On en est réduit, dans le calcul approché, à prendre la valeur correspondant à la poutre simple

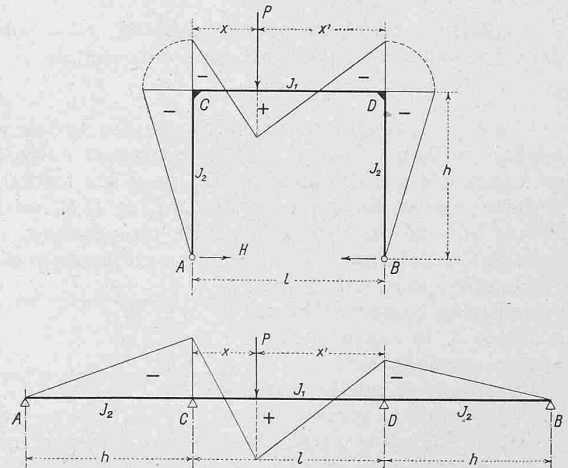
$$A = \frac{P x'}{l}$$

ce qui revient à négliger, dans l'expression Ib pour A , le terme

$$\frac{P x x' (x' - x)}{l^3 (6k + 1)}$$

qui est, du reste, peu considérable (1,2 à 3% pour $x = 0,3 l$ et k variant de $0,5$ à $1,5$).

Fig. 6.



B. Cadre rectangulaire reposant sur rotules.

On a pour le cadre (fig. 6):

$$M_c = M_D = - H h = - \frac{3 P x x'}{2 l (2k + 3)}$$

$$\text{où } k = \frac{J_1}{l} \cdot \frac{h}{J_2} \text{ comme devant.}$$

Pour la poutre continue correspondante, on obtient en faisant d'emblée $M_A = M_B = 0$ dans la formule des trois moments

$$M_D = - \frac{P x x'}{l^2} \cdot \frac{x(2k+3) + 2kl}{4k(k+2) + 3}$$

$$M_C = - \frac{P x' x}{l^2} \cdot \frac{x'(2k+3) + 2kl}{4k(k+2) + 3}$$

Comme pour le cadre, $H = - \frac{M_D}{h}$.

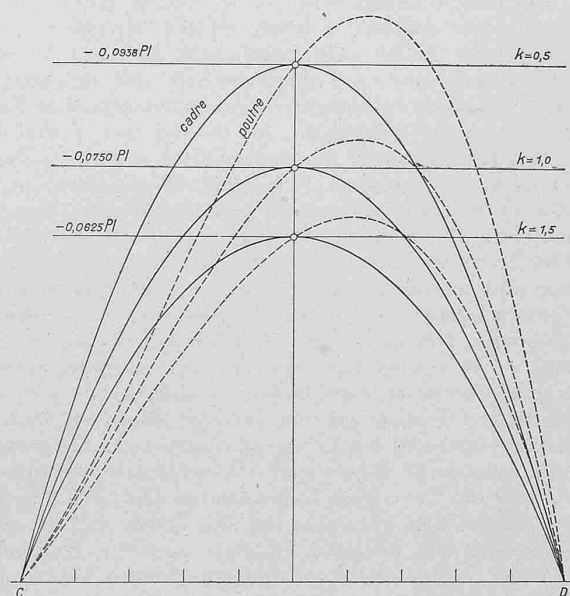


Fig. 5. Lignes d'influence M_D entre $CD = l$ pour un cadre reposant sur rotules et pour la poutre correspondante.

On vérifie facilement que la somme des valeurs symétriques est la même pour le cadre et la poutre. Par suite, comme pour le cadre encastré, le calcul comme poutre continue n'est généralement rigoureux que pour la section dans l'axe. Pour toutes les autres sections du cadre, il ne vaut que pour des systèmes de forces symétriques par rapport à son axe.

La figure 7 donne les lignes d'influence de M_p pour $k = 1, 0,5$ et $1,5$. Avec $x = 0,3 l$ ou $0,7 l$, on a pour les trois valeurs du paramètre considérées des différences entre les deux méthodes de $\pm 22, 27$ et 20% . H étant proportionnel à M_p , les différences relatives entre les deux valeurs de H sont les mêmes.

Quant aux réactions verticales A , elles sont égales dans les deux cas à celle de la poutre simple.

On n'a considéré jusqu'ici que des forces verticales appliquées entre C et D . La comparaison entre les deux méthodes n'a pas de raison d'être pour les forces agissant unilatéralement sur les montants AC et DB , ou pour les efforts dus à un changement de température, les deux systèmes se déformant d'une manière entièrement différente. Par contre, pour deux forces symétriques comme l'indique la figure 8, le calcul comme poutre continue est de nouveau rigoureux, que le cadre soit du reste à rotules ou encastré. Le cas se présente pratiquement pour la poussée de la terre par exemple.

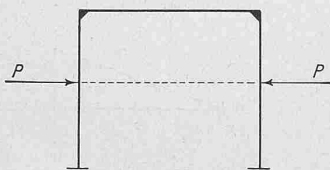


Fig. 8.

Dans la pratique, le poids propre et la charge totale de l'ouvrage sont très souvent assimilables à des charges uniformément réparties, ou à des systèmes de forces symétriques par rapport à l'axe du cadre, et le calcul comme poutre continue leur est applicable. Mais pour les cas nombreux où, soit la charge permanente, soit la charge utile la plus dangereuse échappe à cette condition, les moments d'encastrement, ceux dans les angles du cadre et la poussée ne peuvent sans erreur appréciable être calculés comme ceux d'une poutre continue.

† P. E. Huber-Werdmüller.

(Mit Tafel 21.)

Am letzten Donnerstag ist in Zürich einem Manne die letzte Ehre erwiesen worden, dessen Wirken in ganz hervorragender Weise dazu beigetragen hat, das Ansehen unserer schweizerischen Technikerschaft und Industrie in der ganzen Kulturwelt zu mehren und zu festigen. Der Name des in seinem 79. Lebensjahr, am Abend des 4. Oktober durch eine Herzlähmung, ganz unerwartet aus voller Tätigkeit abgerufenen Ingenieur P. E. Huber-Werdmüller ist als der des Gründers und langjährigen Präsidenten der Maschinenfabrik Oerlikon unzertrennlich mit der Geschichte der Elektrotechnik, namentlich der elektrischen Kraftübertragung und mannigfacher technischer Anwendungen der elektrischen Energie verbunden. Ungeachtet eines schweren Augenleidens, dem er schon seit vielen Jahren unterworfen war, hat er sich stets mit bewunderungswürdiger innerer Kraft seine unermüdliche Schaffensfreudigkeit bewahrt und bis zur letzten Stunde bei den verschiedenen von ihm ins Leben gerufenen und mit Erfolg geleiteten Unternehmungen fördernd mitgewirkt. Gross sind die Verdienste, die sich der Verstorbene um das engere Gemeinwesen erworben hat, dem er entstammte, und allgemein war die Verehrung, die seine Fachgenossen dem Kollegen entgegenbrachten, der unverdrossen mit regstem Interesse und gründlichem Verständnis bis zuletzt an Allem Anteil nahm, was sie bewegte. Noch an der letzten Generalversammlung des Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Vereins zu Ende August dieses Jahres

konnten ihm in voller Rüstigkeit die Kollegen die Freundschaft schütteln, nicht ahnend wie bald er ihrem Kreise entrückt werden sollte.

P. E. Huber wurde zu Zürich am 24. Dezember 1836 als Sohn des Seidenfabrikanten J. R. Huber geboren. Nach dem Besuche der städtischen Realschule in Zürich brachte er einige Jahre an einem Collège in Neuenburg und im Pensionat Devrient in Lausanne-Ouchy zu. An der oberen Industrieschule in Zürich erwarb er sodann die Maturität, mit der er bei Eröffnung der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich 1855 in deren Mechanisch-Technischen Abteilung eintrat. Huber gehörte somit zu der kleinen noch tätigen Schar jener, die wir 1905 beim Jubiläum der Eidg. Techn. Hochschule vor zehn Jahren als die Hundertsemestrigen begrüßen konnten. Nach Erlangung des Diploms im Jahre 1858 begann er seine Tätigkeit mit einer Praxis von 1859 bis 1861 bei Gebrüder Sulzer in Winterthur, an die sich mehrjährige Studienreisen in Frankreich, England und Belgien anreiheten. Unter der Firma P. E. Huber & Cie. gründete er sodann 1863 ein „Schmiede- und Walzwerk“ in Oerlikon, das bis 1868 bestand. Im Herbst 1867 als Mitglied des Gemeinderates Riesbach (Zürich) gewählt und zu dessen Bauvorstand bezeichnet, widmete sich Huber nun mit Vorliebe und bestem Erfolge dieser öffentlichen Stelle, die er bis 1877 bekleidete, zugleich als Mitglied, und seit 1874 als Präsident der Schulpflege Riesbach amtierend. Sich neuerdings ganz seinem Spezialfache zuwendend gründete er sodann 1876 die „A. G. der Werkzeug- und Maschinenfabrik Oerlikon“, jetzt „Maschinenfabrik Oerlikon“, der er von Anbeginn bis zum Jahr 1911 als Präsident und Delegierter des Verwaltungsrates vorgestanden ist, während er auch weiterhin bis zuletzt ihrem Verwaltungsrate angehörte. Vom September 1878 bis zum Dezember 1894 hat er das Werk zugleich persönlich als Direktor geführt, namentlich die Fabrikation von Werkzeugmaschinen und von Walzenstühlen für Müllerei (bis 1885) und seither von elektrischen Maschinen leitend. An den zahlreichen, in diesen Jahren von der Maschinenfabrik ausgeführten Arbeiten und Anlagen kommt somit seinem Unternehmungsgeist und seinem persönlichen Eingreifen ein grosser Teil des Verdienstes zu. Unvergesslich für alle Zeiten bleibt darin namentlich das der Anregung von Dr. Ing. Oskar v. Miller entsprungene und dank dem energischen Eintreten P. E. Hubers zur Tat gewordene, gemeinsam mit dem Generaldirektor E. Rathenau von der A. E. G. durchgeführte Unternehmen der ersten elektrischen Kraftübertragung auf grosse Entfernung, von Lauffen am Neckar nach Frankfurt a. M.¹⁾ anlässlich der Elektrizitätsausstellung im Jahre 1891. Dessen glückliches Ergebnis sicherte der Maschinenfabrik Oerlikon auf eine Reihe von Jahren eine führende Stellung auf diesem Gebiet. Die Schweizerische Bauzeitung hat oft Gelegenheit gefunden, ihren Lesern über die Arbeiten Oerlikons auf diesem Felde eingehend zu berichten, wie auch über die bahnbrechenden Verdienste, die die Maschinenfabrik Oerlikon sich weiterhin unter der Präsidentschaft P. E. Hubers um die elektrische Traktion auf den schweizerischen Eisenbahnen erworben hat.

Ein anderes grosses schweizerisches Unternehmen, an dem Huber hervorragenden Anteil hatte, ist die *Aluminium-Industrie-Gesellschaft Neuhausen*. Diesem im Jahre 1888 auf Anregung befreundeter schweizerischer Ingenieure und Maschinenbaufirmen und gemeinsam mit ihnen ins Leben gerufenen Werk, das in der gesamten Aluminium-Erzeugung eine hervorragende Rolle spielt, ist er von Anfang an bis zu seinem Tode als Präsident und Delegierter des Verwaltungsrates vorgestanden.

Neben solcher technisch-industriellen Betätigung, die seine Arbeit in erster Linie und in weitem Masse in Anspruch nahm, hat sich der Verstorbene auch immer mit Weitblick und grosser Hingebung in den Dienst der Allgemeinheit gestellt. Es sei hier seiner Mitarbeit im Zentral-

¹⁾ Schweiz. Bauzeitung, Bd. XVIII, S. 74 u. 162 (Sept. u. Dez. 1891); Bd. XX, S. 67 (10. Sept. 1892).