

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67/68 (1916)
Heft: 21

Artikel: Die oskulierenden Kegelschnitte bei der Kettenlinie
Autor: Kiefer, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33011>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

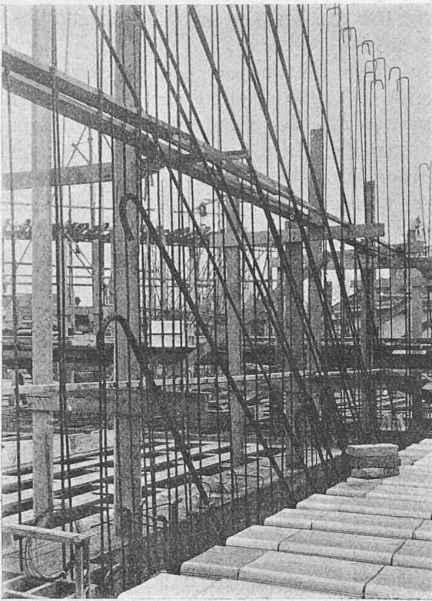


Abb. 13. Wandträger-Armierung.

beurteilen; alle sprachen sich sehr günstig darüber aus.

Die Ausführung hat die in die Architekten Bischoff & Weideli gesetzten Erwartungen voll erfüllt, sowohl in wirtschaftlich-technischer als auch, wie schon unsere Bilder zeigen, in architektonisch-künstlerischer Hinsicht.

Die oskulierenden Kegelschnitte bei der Kettenlinie.

Von A. Kiefer, Zürich.

Abb. 1. Der Krümmungsradius MB in irgend einem Punkte B der Kettenlinie ist gleich dem Stück BB^* der Normalen zwischen B und der Direktrix. Um hieraus einige Folgerungen zu ziehen, sei auf folgende Eigenschaft der Kegelschnitte hingewiesen (J. Steiner; Ges. Werke, Bd. II, S. 341): Wenn man bei einem Kegelschnitt den Krümmungsradius über den Kurvenpunkt hinaus um sich selber verlängert und über der Verlängerung als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so schneidet er denjenigen Kreis rechtwinklig, von dessen Punkten rechtwinklige Tangentenpaare an den Kegelschnitt gehen; der Kreis über dem verlängerten Krümmungsradius hat also bei der Parabel den Mittelpunkt auf ihrer Leitlinie und bei der gleichseitigen Hyperbel geht der Kreis durch ihren Mittelpunkt.

Denkt man sich in dem Punkte B der Kettenlinie den Krümmungskreis gelegt, so kann man umgekehrt nach den Kegelschnitten durch B fragen, die den Kreis ebenfalls zum Krümmungskreis in B haben. Es gibt unendlich viele Parabeln, welche den Kreis und also auch die Kettenlinie in B dreipunktig berühren; ihre Leitlinien gehen, dem angeführten Satze gemäss, alle durch die Mitte M' von BB^* . Ist die Leitlinie gewählt, so ist die Parabel bestimmt. Unter diesen Parabeln gibt es eine, welche die Kettenlinie vierpunktig berührt; die Leitlinie dieser besondern Parabel geht durch die Mitte M' von BB^* und ferner auch durch die Mitte der unendlich benachbarten Lage von BB^* , deren Verlängerung durch den Krümmungsmittelpunkt M läuft. Denkt man sich durch M alle möglichen Transversalen gelegt und für jede das Stück zwischen der festen Tangente TB und der Direktrix TB^* der Kettenlinie halbiert, so ist der geometrische Ort der Mitten M' die Hyperbel, deren Mittelpunkt M^* die Mitte von MT ist und deren Asymptoten M^*U , M^*B zu BT und TB^* parallel laufen. Die Leitlinie der vierpunktig berührenden Parabel ist die Hyperbeltangente in M' ; da M' die Mitte von BB^* ist, so ist diese Tangente die Gerade $M'U$ und dabei ist $TU = \frac{1}{2} B^*T = BM^*$.

33,45 Fr./m³, oder einschl. Architekten-Honorar und Bauführung 35,95 Fr./m³. Der 2151 m² messende Bauplatz kostete (1913) 600000 Fr., bezw. 279 Fr./m² Grundfläche oder 357 Fr./m² überbauter Fläche, was angesichts der vorzüglichen, zentralen Lage mässig erscheint. Als Experten hatten das Bauprojekt einerseits die Architekten Rittmeyer & Furrer, anderseits die Architekten H. Fietz, O. Pflughard und H. Wehrli zu

Es gibt auch unendlich viele gleichseitige Hyperbeln, welche die Kettenlinie in B dreipunktig berühren; die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Hyperbeln liegen auf dem Kreis, der BB^* zum Durchmesser hat. Ist der Mittelpunkt gewählt, so ist die zugehörige gleichseitige Hyperbel bestimmt.

Man kann ferner unendlich viele Kegelschnitte finden, welche die Kettenlinie in B vierpunktig berühren; es sind einfach die vierpunktig berührenden Kegelschnitte der vorigen besondern Parabel. Diese Kegelschnitte können als kollineare Figuren zur Parabel gezeichnet werden mit B als Zentrum und BT als Axe; die Mittelpunkte dieser vierpunktig berührenden Kegelschnitte liegen auf der Geraden l , welche durch B nach dem unendlich fernen Parabelmittelpunkt, also senkrecht zu $M'U$ gezogen werden kann.

Unter diesen vierpunktig berührenden Kegelschnitten gibt es eine gleichseitige Hyperbel; ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Geraden l mit dem Kreis über BB^* als Durchmesser.

Bezeichnet man den Winkel zwischen l und BB^* mit α , so ist auch $\angle VUM' = \alpha$ und aus der Abbildung folgt:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{VM'}{VB^*} = \frac{2}{3}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \varphi.$$

Das Büschel vierpunktig berührender Kegelschnitte weist einen Kegelschnitt auf, der die Kettenlinie fünfpunktig berührt. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt von l mit der zum benachbarten Punkt der Kettenlinie gehörigen Geraden l . Die Gerade l bildet mit BQ den Winkel $\varphi - \alpha$; daher ist der Winkel zwischen l und der unendlich benachbarten Geraden $\Delta \varphi - \Delta \alpha$, und wenn N der Schnittpunkt der zwei Geraden ist, so folgt aus der Abbildung

$$NB \cdot (\Delta \varphi - \Delta \alpha) = BB^* \cdot \Delta \varphi \cdot \cos \alpha$$

$$NB = BB^* \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{\Delta \alpha}{\Delta \varphi}};$$

aber da $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2}{3}$, so zeigt eine elementare Ueberlegung,

$$\text{dass} \quad \frac{\Delta \alpha}{\Delta \varphi} = \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}$$

$$\text{ist und somit} \quad NB = BB^* \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}}.$$

Damit ist der Mittelpunkt des fünfpunktig berührenden Kegelschnittes bestimmt. Man kann fragen, ob dieser Kegelschnitt Parabel oder gleichseitige Hyperbel werden kann.

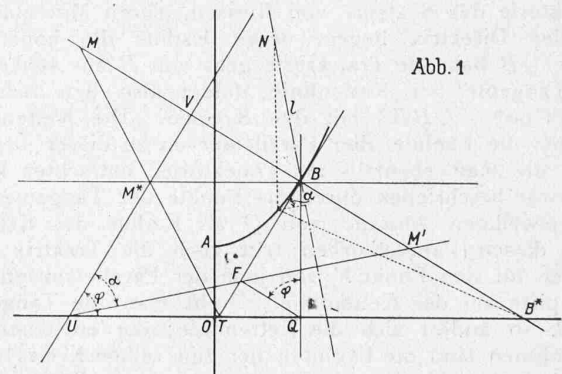


Abb. 1.

Im ersten Fall muss NB unendlich gross werden; also $1 - \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} = 0$. Hieraus, in Verbindung mit $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2}{3}$

$$\text{folgt} \quad \operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \alpha + \varphi = 90^\circ.$$

Im zweiten Fall muss N auf den Kreis über BB^* als Durchmesser fallen; also $NB = -BB^* \cos \alpha$

$$-BB^* \cos \alpha = BB^* \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}}$$

$$-1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}}$$

Hieraus und in Verbindung mit $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2}{3}$ folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = i\sqrt{6}.$$

Zusammengefasst: In jedem Punkte B einer Kettenlinie gibt es unendlich viele dreipunktig berührende Parabeln und gleichseitige Hyperbeln. Die Leitlinien der erstern gehen alle durch die Mitte M' von BB^* und die Mittelpunkte der letztern liegen auf dem Kreise über BB^* als Durchmesser. Im Punkte B gibt es eine vierpunktig berührende Parabel und eine vierpunktig berührende gleichseitige Hyperbel. Die Leitlinie der erstern wird gefunden, indem man B^*T um die Hälfte verlängert und den so entstandenen Punkt U mit M' verbindet; der Mittelpunkt der letztern ist der Schnittpunkt des Kreises über BB^* als Durchmesser mit der Geraden l , die durch B geht und auf $M'U$ senkrecht steht. Auf l liegen die Mittelpunkte von unendlich vielen Kegelschnitten, die alle die Kettenlinie in B vierpunktig berühren. Unter diesen Kegelschnitten gibt es einen, der die Kettenlinie fünfpunktig berührt. Der Abstand seines Mittelpunktes N von B ist

$$BN = BB^* \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{2}{3} \cos^2 \alpha}.$$

Auf der Kettenlinie gibt es auf

jeder Seite vom Scheitelpunkt einen Punkt, wo eine fünfpunktig berührende Parabel angebracht werden kann; die Kurventangente in einem solchen Punkt bildet mit der Direktrix einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ ist. Dagegen gibt es auf der Kettenlinie keinen reellen Punkt mit einer fünfpunktig berührenden gleichseitigen Hyperbel.

Auf den Scheitelpunkt A der Kettenlinie angewendet:

Im Scheitelpunkt hat der Krümmungskreis, der aus Symmetriegründen vierpunktig berührt, einen Radius, dessen Länge gleich AO ist. Die Leitlinie der vierpunktig berührenden Parabel geht durch die Mitte von AO parallel zur Direktrix. Der Mittelpunkt der vierpunktig berührenden gleichseitigen Hyperbel ist O . Aus Symmetriegründen gibt es im Scheitelpunkt noch einen sechspunktig berührenden Kegelschnitt; sein Mittelpunkt wird, entsprechend der Formel für ON , in der $\alpha = \varphi = 0$ zu setzen ist, gefunden, indem man OA über A hinaus um das Dreifache verlängert.

Sind die Direktrix und ein Punkt B gewählt, so gibt es durch B unendlich viele Kettenlinien. Jede derselben hat in B dieselbe Grösse der Tangentialspannung, welche durch das Lot BQ von B auf die Direktrix gemessen wird. Ist die Tangente der Kettenlinie in B ebenfalls gewählt, so ist die Kettenlinie bestimmt; sie ist die Evolute der Trajektorie des Systems von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Direktrix liegen, deren Radius die konstante Länge QB hat; die Trajektorie geht von B aus senkrecht zur Tangente der Kettenlinie, bildet also den Schnittwinkel $90^\circ - QBB^*$ mit den Kreisen. Die Kettenlinie ist auch die Evolute aller Parallelkurven zu dieser Trajektorie, die man ebenfalls als Trajektorien betrachten kann und zwar beschrieben durch die Punkte der Tangente mit dem jeweiligen Abstand von Q als Radius der Kreise; unter diesen Parallelkurven tritt auch die Traktrix auf, nämlich für den Punkt F und jede der Parallelkurven hat die Spitze auf der Kettenlinie. Dreht man die Tangente um B , so ändert sich die Kettenlinie; die entstehenden Kettenlinien sind die Evoluten der zum selben Kreissystem gehörigen Trajektorien, die den verschiedenen Grössen des Schnittwinkels entsprechen. Da der Krümmungsmittelpunkt für jede Kettenlinie gefunden wird, indem man die Normale B^*B über B hinaus um sich selber verlängert, so liegen alle Krümmungsmittelpunkte auf der symmetrischen Geraden der Direktrix zum Punkte B und die Krümmungskreise bilden einen Kreisbüschel, von dem B der Grundpunkt ist und der andere auf QB in dreifachem Abstand von der Direktrix liegt. Also:

Durch einen festen Punkt B gibt es unendlich viele Kettenlinien mit gegebener Direktrix. Ihre zu B gehörigen Krümmungsmittelpunkte liegen auf einer zur Direktrix parallelen Geraden und die Krümmungskreise bilden ein Büschel.¹⁾ Die Kettenlinie ist der geometrische Ort für die Spitzen aller Parallelkurven zu einer Traktrix.

Dieser letztere Satz enthält nichts besonderes; denn jede Kurve ist der Ort für die Spitzen aller Parallelkurven zu irgend einer Evolute der Kurve.

Wählt man von einer Kettenlinie die Direktrix und eine Tangente, so gibt es unendlich viele Kettenlinien. Ist der Berührungspunkt B auf der Tangente angenommen, so gehört eine bestimmte Kettenlinie zu ihm, die, wie gesehen, als Evolute einer Trajektorie auftritt. Verschiebt man B auf der festen Tangente, so sind die Trajektorien für den Schnittpunkt T der Tangente und Direktrix ähnlich und ähnlich gelegen und daher sind auch alle Kettenlinien ähnlich und ähnlich gelegen.

Durch die Direktrix und eine Tangente sind unendlich viele Kettenlinien bestimmt. Die Krümmungsmittelpunkte, die zu den Berührungspunkten auf der gegebenen Tangente gehören, liegen auf einer Geraden durch den Schnittpunkt T der Tangente und Direktrix und ebenso liegen die Scheitelpunkte aller dieser Kettenlinien auf einer Geraden durch T . Alle Kettenlinien haben noch eine zweite durch T gehende Tangente gemein. Hält man B und seine Tangente fest, verschiebt die Direktrix parallel, so liegen die Scheitelpunkte der dadurch bestimmten Kettenlinien auf einer Geraden durch B ; die Kettenlinien sind ähnlich und ähnlich gelegen.

Von diesen zwei Sätzen sind die folgenden zwei spezielle Fälle:

Hält man von einer Kettenlinie den Scheitelpunkt fest, verschiebt die Direktrix parallel, so gehen vom Schnittpunkte der Direktrix und Axe an die Kettenlinien parallele Tangentenpaare.

Hält man von einer Kettenlinie die Direktrix und Axe fest, verschiebt den Scheitel auf der Axe, so berühren alle Kettenlinien dieselben zwei durch den Schnittpunkt von Direktrix und Axe gehenden Geraden.²⁾

Der Winkel α , den eine dieser Geraden mit der Axe einschliesst, lässt sich folgendermassen berechnen. Der Berührungspunkt dieser Geraden mit einer der Kettenlinien hat von der Axe den Abstand $\frac{a}{\cos \alpha}$; andererseits ist dieser Abstand gemäss den Gleichungen für die Kettenlinie $a \operatorname{Lg} \cotg \frac{\alpha}{2}$. Aus der Gleichung

$$\frac{a}{\cos \alpha} = a \operatorname{Lg} \cotg \frac{\alpha}{2}, \text{ oder } e^{\frac{1}{\cos \alpha}} = \cotg \frac{\alpha}{2}$$

ergibt sich $\alpha = 33^\circ 32'$.

Sind von einer Kettenlinie zwei Punkte B, C , die Tangente in B , ferner die Richtung der Direktrix gewählt, so ist die Kettenlinie bestimmt. Man kann zunächst eine Direktrix von dieser Richtung annehmen, auf schon angegebene Art die zugehörige Kettenlinie finden, die in B die gegebene Tangente hat, dann für B als Aehnlichkeitspunkt die ähnliche Kettenlinie durch C suchen. Oder man kann an eine beliebige schon gezeichnete Kettenlinie, deren Direktrix dieselbe Richtung hat, die Tangente parallel zur Tangente in B legen, die Kettenlinie mit dem gefundenen Berührungspunkt parallel nach B schieben und für B als Aehnlichkeitspunkt die ähnliche Kettenlinie durch C suchen, wobei es sich wesentlich um die entsprechenden Punkte zum Scheitelpunkt A und zu O handelt. Vermittelst des Dreieckes BFQ und des entsprechenden Dreieckes für C bekommt man die Tangente in C , die Länge des Bogens BC als Differenz der ungleichen Katheten der zwei Dreiecke und auch die Krümmungsmittelpunkte für B und C .

Ist ein Kegelschnitt und auf ihm ein Punkt B gegeben, so kann nach den Kettenlinien gefragt werden,

¹⁾ Dieser Satz ist ein spezieller Fall von einem allgemeineren Satz, auf den der Verfasser durch seinen hochverehrten ehemaligen Lehrer, den 1909 verstorbenen Prof. Dr. A. Herzog aufmerksam gemacht wurde:

„Bei einem beliebigen einfach unendlichen Kurvensystem gibt es durch einen Punkt, entsprechend allen Grössen des Schnittwinkels, unendlich viele Trajektorien und die zu dem Punkt gehörigen Krümmungsmittelpunkte aller dieser Trajektorien liegen auf einer Geraden.“

²⁾ Dieser letzte Satz ist von Herrn Ingenieur E. Huber analytisch bewiesen worden.

